Ph. Sp. 956 b/2

<36623673460010 S

<36623673460010

Bayer. Staatsbibliothek

# LOGIK.

## EINE UNTERSUCHUNG DER PRINCIPIEN DER ERKENNTNISS

UND DER

## METHODEN WISSENSCHAFTLICHER FORSCHUNG

VON

**WILHELM WUNDT.**

ZWEI BÄNDE.

ZWEITER BAND.

**METHODENLEHRE.**

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1883.

129

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# LOGIK.

## EINE UNTERSUCHUNG DER PRINCIPIEN DER ERKENNTNISS

UND DER

## METHODEN WISSENSCHAFTLICHER FORSCHUNG

VON

**WILHELM WUNDT.**

ZWEI BÄNDE.

ZWEITER BAND.

**METHODENLEHRE.**

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1883.

# METHODENLEHRE.

VON

WILHELM WUNDT,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG.

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1883.

Das Recht der Uebersetzung wird vorbehalten.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

# Vorwort.

In dem vorliegenden Werke ist der Versuch gemacht, die wissenschaftlichen Methoden und ihre Principien einer vergleichenden Untersuchung zu unterwerfen, welche so viel als möglich unmittelbar aus den Quellen der Einzelforschung zu schöpfen sucht. Dieser Versuch ist von so grossen Schwierigkeiten umgeben, dass es vielleicht weniger erforderlich ist, seine Mängel als ihn selbst zu entschuldigen. Die Mathematik, die Naturforschung, die Geisteswissenschaften, jedes dieser Gebiete scheint reich genug, um als Grundlage einer logischen Darstellung zu dienen. Dennoch drängte sich mir bei Vollendung meiner Arbeit immer mehr die Ueberzeugung auf, dass nur eine sie alle umfassende Untersuchung von den methodischen Eigenthümlichkeiten jedes einzelnen zureichende Rechenschaft geben könne, und dass allein auf diesem Wege dem Fehler unberechtigter Verallgemeinerung gewisser Methoden wirksam zu steuern sei. Auch schien es mir fruchtbringender, der thatsächlichen Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens in seinen verschiedenartigen Gestaltungen nachzugehen, als bei abstracten logischen Betrachtungen von fragwürdiger Anwendbarkeit zu verweilen. In diesem Plan des Buches liegt, wie ich hoffe, eine zureichende Entschuldigung dafür, dass in demselben auf andere logische Darstellungen nur an wenigen Stellen Bezug genommen ist. Werke aus den einzelnen Wissenschaftsgebieten habe ich dagegen in der Regel dann citirt, wenn ein Hinweis auf specielle

Belegstellen oder auf weitere Ausführungen zu den im Text gegebenen Andeutungen erforderlich schien.

Die Entstehungsweise meiner Arbeit brachte es mit sich, dass die allgemeine Methodenlehre, obgleich der systematische Zweck ihren Vorantritt verlangte, dennoch fast zuletzt ausgeführt wurde, nachdem die speciellen Abschnitte der Hauptsache nach vollendet waren; ich habe dann aber selbstverständlich das Ganze noch einmal einer sorgfältigen Ueberarbeitung unterzogen. Auf diese Weise fügte es sich von selbst, dass der Schwerpunkt der Darstellung in die Logik der einzelnen Wissenschaften verlegt ist. Ich hoffe nicht, dass hieraus die Meinung entstehe, jeder Abschnitt könne nöthigenfalls als ein für sich bestehendes Ganzes gelesen werden. Insbesondere betrachte ich die specielle Methodenlehre durchaus als ein zusammenhängendes Werk, dessen einzelne Theile überall auf einander hinweisen. Für die Darstellung erwuchs hieraus die Pflicht, sie in einer Form zu halten, welche — höchstens von einzelnen Ausführungen abgesehen — jedem wissenschaftlich gebildeten Leser es möglich machen soll, dem Gedankengang zu folgen. Gegenüber der Zersplitterung der Einzelforschungen und der mit ihr so oft verbundenen Unterschätzung fremder Arbeitsgebiete ist es, wie ich meine, eine der schönsten philosophischen Aufgaben, das Bewusstsein der Zusammengehörigkeit der Wissenschaften wach zu erhalten und die Gleichberechtigung der wissenschaftlichen Interessen zu wahren.

Dass nicht alle Disciplinen die nämliche Berücksichtigung gefunden haben, wird wohl Niemand dem Verfasser verargen. Eine Beschränkung auf die Hauptgebiete, welche für die Ausbildung der Methoden und Principien der Forschung vorzugsweise bestimmend sind, war schon durch den allgemeinen Charakter des Werkes geboten. Ueberdies ist es unvermeidlich, dass der individuelle Standpunkt des Autors die gleichförmige Durchführung einer derartigen Aufgabe beeinträchtigt. Meine Beschäftigung mit Mathematik und Naturforschung ist durch den Gesichtskreis des Physiologen, mein Interesse an den Geisteswissenschaften vorzugsweise durch psychologische Studien bestimmt worden. Vielleicht lag in diesem doppelten

Berufsfach für mich mehr als für manchen Andern eine Aufforderung zur Beschäftigung mit allgemeinen methodologischen Problemen. Sieht sich doch der Physiologe fast überall auf die Hülfe der exacteren Theile der Naturwissenschaft angewiesen, und der Psychologe, wenn er die unerspriesslichen Pfade des herkömmlichen Subjectivismus verlassen will, ist fortwährend gezwungen, nach beiden Seiten Umschau zu halten, um bald die experimentellen Methoden des Physikers und Physiologen für die Analyse der einfachen Bewusstseinserscheinungen zu verwerthen, bald aus der Untersuchung der Geisteserzeugnisse, wie sie Sprachwissenschaft, Mythologie, Völkerkunde und Geschichte ihm darbieten, für die Analyse der höheren psychischen Functionen Anhaltspunkte zu gewinnen. Die centrale Stellung, die ich der Psychologie zwischen den Natur- und Geisteswissenschaften angewiesen, mag in Folge dieser individuellen Beziehungen vielleicht etwas mehr betont worden sein, als es sonst geschehen wäre; dennoch ist es meine Ueberzeugung, dass sie thatsächlich der Bedeutung entspricht, welche diese Wissenschaft — nicht jetzt besitzt, aber in der Zukunft besitzen wird.

Leipzig, im Juli 1883.

W. Wundt.

# Inhalt.

Erster Abschnitt.

## Allgemeine Methodenlehre.

Erstes Capitel. Die Methoden der Untersuchung.


Seite

1. Analyse und Synthese . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
   a. Allgemeine Bedeutung der analytischen und synthetischen Methode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
   b. Die Analyse . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
   c. Die Synthese . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2. Abstraction und Determination . . . . . . . . . . . . . 10
   a. Die Abstraction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
   b. Die Determination . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
3. Induction und Deduction . . . . . . . . . . . . . . . . 17
   a. Die logischen Elemente der Induction . . . . . . . . . 17
   b. Die Induction als Methode . . . . . . . . . . . . . . 22
   c. Die Deduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

Zweites Capitel. Die Formen der systematischen Darstellung.

1. Die Definition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2. Die Classification . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
   a. Allgemeine Eigenschaften der Eintheilung und Classification 40
   b. Die descriptive Classification . . . . . . . . . . . . 43
   c. Die genetische Classification . . . . . . . . . . . . 45
   d. Die analytische Classification . . . . . . . . . . . . 51
   e. Die Zwei-, Drei- und Viertheilung . . . . . . . . . . 53
3. Der Beweis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
   a. Allgemeine Aufgaben des Beweisverfahrens . . . . . . . 56
   b. Die directen Beweisformen . . . . . . . . . . . . . . 60
   c. Die indirecten Beweisformen . . . . . . . . . . . . . 68

## Zweiter Abschnitt.

## Von der Logik der Mathematik.

Erstes Capitel. Die allgemeinen logischen Methoden der Mathematik.

Seite

1. Die Aufgaben der mathematischen Untersuchung . . . . . 74
2. Die mathematische Analyse und Synthese . . . . . . . . . 80
3. Die mathematische Induction und Abstraction . . . . . . 85
   a. Der mathematische Realismus und Nominalismus . . . . 85
   b. Die historische Bedeutung der mathematischen Induction . 96
   c. Die bleibenden Formen der mathematischen Induction . . 100
   d. Die mathematische Abstraction . . . . . . . . . . . 106
4. Die mathematische Deduction . . . . . . . . . . . . . 111

Zweites Capitel. Die arithmetischen Methoden.

1. Die Zahlen und ihre Symbole . . . . . . . . . . . . . 115
   a. Das Ziffernsystem . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
   b. Die Zahlarten und Zahlsysteme . . . . . . . . . . . 118
   c. Die Zahlgrenzen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
2. Die algebraischen Operationen . . . . . . . . . . . . . 129
   a. Die Entstehung und Bedeutung algebraischer Gleichungen . 130
   b. Die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen 135

Drittes Capitel. Die geometrischen Methoden.

1. Die geometrischen Constructionsmethoden . . . . . . . . 139
   a. Die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden 139
   b. Die Theilung der Figuren . . . . . . . . . . . . . 142
   c. Die ergänzenden Hülfsconstructionen . . . . . . . . . 145
   d. Die genetischen Constructionen . . . . . . . . . . . 149
2. Die Anwendung algebraischer Methoden auf die geometrische Untersuchung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
   a. Die algebraische und die analytische Geometrie . . . . 160
   b. Die geometrische Analysis . . . . . . . . . . . . . 163

Viertes Capitel. Der Functionsbegriff und die Infinitesimalmethode.

1. Die analytischen Functionen . . . . . . . . . . . . . 167
   a. Die Entwicklung des Begriffs der Function . . . . . . 167
   b. Die Hauptformen der analytischen Functionen . . . . . 175
2. Der Differentialbegriff . . . . . . . . . . . . . . . . 188
   a. Allgemeine Entwicklung des Differentialbegriffs . . . . . 188
   b. Der phoronomische Differentialbegriff . . . . . . . . . 192
   c. Der geometrische Differentialbegriff . . . . . . . . . . 195
   d. Der arithmetische Differentialbegriff . . . . . . . . . . 201
   e. Der Begriff der derivirten Function . . . . . . . . . . 202
3. Das Princip der Integration . . . . . . . . . . . . . . 205
4. Die Anwendungen der Infinitesimalmethode . . . . . . . 210

## Dritter Abschnitt.

## Von der Logik der Naturwissenschaften.

### Erstes Capitel. Die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung.

Seite

1. Die Entwicklung und Gliederung der Naturwissenschaften . . 220
   a. Die Entwicklung der Naturwissenschaften . . . . . . . . 220
   b. Das System der Naturwissenschaften . . . . . . . . . . 224
2. Heuristische Principien der Naturforschung . . . . . . . . 230
   a. Causale und teleologische Naturbetrachtung . . . . . . 230
   b. Das Postulat der Anschaulichkeit . . . . . . . . . . . 235
   c. Der kritische Zweifel . . . . . . . . . . . . . . . . 239
   d. Das Princip der Einfachheit . . . . . . . . . . . . . 242
3. Die Principien der Mechanik . . . . . . . . . . . . . . 245
   a. Die Entwicklung der mechanischen Grundbegriffe . . . . 245
   b. Die Formulirung der mechanischen Axiome durch Newton 252
   c. Teleologische Fundamentaltheoreme der Mechanik . . . . 255
   d. Causale Fundamentaltheoreme der Mechanik . . . . . . . 265
   e. Die phoronomischen und die dynamischen Voraussetzungen der Mechanik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 272
4. Die allgemeinen Methoden und Hülfsmittel der Naturforschung 275
   a. Allgemeiner Charakter der naturwissenschaftlichen Methoden 275
   b. Die experimentelle Methode . . . . . . . . . . . . . 277
   c. Die vergleichende Methode . . . . . . . . . . . . . 280
   d. Naturbeschreibung und Naturerklärung . . . . . . . . . 285

### Zweites Capitel. Die Logik der Physik.

1. Die physikalischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . 287
   a. Die Analyse der Naturerscheinungen . . . . . . . . . . 287
   b. Die synthetische Erzeugung der Naturerscheinungen . . . 295
   c. Die physikalische Induction . . . . . . . . . . . . . 297
   d. Die physikalische Abstraction . . . . . . . . . . . . 310
   e. Die physikalische Deduction . . . . . . . . . . . . . 315
2. Die Hülfsmittel der physikalischen Forschung . . . . . . 327
   a. Die physikalische Beobachtung . . . . . . . . . . . . 329
   b. Die Messung der Naturerscheinungen . . . . . . . . . 335
   c. Die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 343
   d. Die physikalische Constantenbestimmung . . . . . . . 348
3. Das Substrat der Naturerscheinungen . . . . . . . . . . 352
   a. Contituitätshypothese und Atomistik . . . . . . . . . 353
   b. Die Entwicklung der neueren Atomistik . . . . . . . . 356
   c. Die kinetische Atomtheorie . . . . . . . . . . . . . 359
4. Die allgemeinen Naturgesetze . . . . . . . . . . . . . 365
   a. Kraftgesetze und Kraftfunctionen . . . . . . . . . . . 365
   b. Die Energiegesetze . . . . . . . . . . . . . . . . . 370
   c. Die physikalischen Grenzbegriffe . . . . . . . . . . 372

Drittes Capitel. Die Logik der Chemie.

Seite

1. Die chemischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . . . 382
 a. Allgemeine Aufgaben der chemischen Untersuchung . . . 382
 b. Die chemische Analyse . . . . . . . . . . . . . . . . 384
 c. Die chemische Synthese . . . . . . . . . . . . . . . 391
 d. Die chemische Induction . . . . . . . . . . . . . . . 393
 e. Die chemische Abstraction und Deduction . . . . . . . . 401
2. Die chemische Statik und Dynamik . . . . . . . . . . . 404
 a. Die Principien der chemischen Statik . . . . . . . . . 404
 b. Die Principien der chemischen Dynamik . . . . . . . . 409
3. Der chemische Atombegriff . . . . . . . . . . . . . . . 412

Viertes Capitel. Die Logik der Biologie.

1. Die biologischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . . 419
 a. Allgemeine Aufgaben der biologischen Forschung . . . . 419
 b. Die morphologische Analyse . . . . . . . . . . . . . . 421
 c. Die physiologisch-chemische Untersuchung . . . . . . . 427
 d. Die physiologisch-physikalische Untersuchung . . . . . 429
 e. Die physiologische und pathologische Functionsanalyse . . 431
2. Die allgemeinen Gesetze der Lebenserscheinungen . . . . . 435
 a. Die biologischen Richtungen . . . . . . . . . . . . . 435
 b. Teleologische Principien der Biologie . . . . . . . . . 439
 c. Causale Principien der Biologie . . . . . . . . . . . 449
3. Die biologischen Grundbegriffe . . . . . . . . . . . . . 453
 a. Das organische Individuum und der Elementarorganismus 453
 b. Die systematischen Begriffe der Biologie . . . . . . . . 459
 c. Die Ursachen des Lebens . . . . . . . . . . . . . . . 462
 d. Der Begriff der Krankheit . . . . . . . . . . . . . . 472

Vierter Abschnitt.

Von der Logik der Geisteswissenschaften.

Erstes Capitel. Die allgemeinen Grundlagen der Geisteswissenschaften.

1. Die Entwicklung und Gliederung der Geisteswissenschaften . 478
2. Die Hülfsmittel und Methoden der Psychologie . . . . . . 482
 a. Die innere Wahrnehmung . . . . . . . . . . . . . . . 482
 b. Das psycho-physische Experiment . . . . . . . . . . . 483
 c. Die vergleichend-psychologische Methode . . . . . . . . 491
 d. Die historisch-psychologische Methode . . . . . . . . . 497
3. Die Principien der Psychologie . . . . . . . . . . . . . 502
 a. Die psychologischen Grundbegriffe . . . . . . . . . . 502
 b. Die psychologischen Gesetze . . . . . . . . . . . . . 508
4. Die methodischen Hülfsmittel der speciellen Geisteswissenschaften 515

Zweites Capitel. Die Logik der Geschichtswissenschaften.

1. Die philologische Methodik . . . . . . . . . . . . . . 518
 a. Philologie und Geschichte . . . . . . . . . . . . . . 518

Seite

b. Die philologische Hermeneutik . . . . . . . . . . . 522
c. Die philologische Kritik . . . . . . . . . . . . . 528
2. Die Historik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 534
a. Die historische Kritik . . . . . . . . . . . . . . 534
b. Die historische Interpretation . . . . . . . . . . . 539
c. Die philosophische Geschichtsbetrachtung . . . . . . . 545
3. Die Methodik der philologisch-historischen Wissenschaften . . 549
a. Die Linguistik . . . . . . . . . . . . . . . . . . 549
b. Die Mythologie . . . . . . . . . . . . . . . . . . 556
c. Die historische Ethik . . . . . . . . . . . . . . . 563

Drittes Capitel. Die Logik der Gesellschaftswissenschaften.

1. Die allgemeinen Gesellschaftswissenschaften . . . . . . . 566
a. Ethnologie und Bevölkerungskunde als allgemeine Gesellschaftswissenschaften . . . . . . . . . . . . . . . . 566
b. Die Methodik der theoretischen Gesellschaftswissenschaften 572
c. Die sociale Ethik . . . . . . . . . . . . . . . . . 582
2. Die Methoden der Volkswirthschaftslehre . . . . . . . . 586
a. Die allgemeinen Richtungen der Volkswirthschaftslehre . . 586
b. Die abstracte Wirthschaftstheorie . . . . . . . . . . 588
c. Die historische Nationalökonomik . . . . . . . . . . 593
3. Die Methoden der Rechtswissenschaft . . . . . . . . . . 596
a. Die Entwicklung des Rechts . . . . . . . . . . . . . 596
b. Rechtsnormen und Rechtsdefinitionen . . . . . . . . . 603
c. Die Rechtsdeduction und der juristische Thatsachenbeweis . 609

Viertes Capitel. Die Methoden der Philosophie.

1. Die empirische Methode . . . . . . . . . . . . . . . . 612
2. Die dialektischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . 613
a. Die antithetische Methode . . . . . . . . . . . . . 613
b. Die ontologische Methode . . . . . . . . . . . . . . 614
c. Die Methode der immanenten Begriffsentwicklung . . . . 616
3. Die Philosophie als Wissenschaftslehre . . . . . . . . . 619

# Erster Abschnitt.

# Allgemeine Methodenlehre.

---

## Erstes Capitel.

## Die Methoden der Untersuchung.

### 1. Analyse und Synthese.

#### a. Allgemeine Bedeutung der analytischen und synthetischen Methode.

Jede einzelne wissenschaftliche Untersuchung besteht entweder in der Zergliederung eines zusammengesetzten Gegenstandes in seine Bestandtheile, oder in der Verbindung irgend welcher relativ einfacher Thatsachen zum Behuf der Erzeugung zusammengesetzter Resultate. Analyse und Synthese sind daher die allgemeinsten Formen der Untersuchung, die in alle anderen als unerlässliche Bestandtheile eingehen. So erheben sich auf beiden zunächst zwei Paare zusammengesetzter Methoden: erstens die Abstraction mit ihrer Umkehrung, der Determination, und zweitens die Induction mit ihrer Umkehrung, der Deduction. Die Abstraction gründet sich auf analytische Untersuchungen; die Determination ist ein synthetisches Verfahren. Die Induction stützt sich vorzugsweise auf eine Analyse der Thatsachen; die Deduction verbindet wiederum die durch die Analyse gewonnenen Elemente. Doch ist damit nur die vorwiegende Richtung der Denkoperationen bezeichnet; denn es verräth sich gerade in der combinirten Anwendung der Analyse und Synthese die zusammengesetztere Beschaffenheit der Methoden.

Von den Methoden der Untersuchung sind die Formen der systematischen Darstellung abhängig. Auch in Bezug auf diese bewähren daher die Analyse und Synthese ihre grundlegende Bedeutung. Den einfachen Methoden derselben entsprechen die Formen der Definition,

welche entweder in der Zerlegung eines Begriffs in seine Elemente oder in dem Aufbau desselben aus diesen Elementen bestehen kann. Der Methode der Abstraction und Determination schliesst sodann das Verfahren der Classification sich an. Die Gewinnung der Allgemeinbegriffe eines Systems beruht auf Abstraction, während bei der Bildung der Eintheilungsglieder das umgekehrte Verfahren der Determination Platz greift. Endlich auf die Induction und Deduction stützen sich die Formen der Demonstration. Denn der Beweis eines Satzes besteht entweder in einer abgekürzten Reproduction des Weges, auf welchem derselbe gewonnen wurde, oder auf einer umgekehrten Zurücklegung dieses Weges. Da nun alle wissenschaftlichen Sätze durch Induction oder Deduction gefunden sind, so folgt hieraus, dass auch das Beweisverfahren bald den inductiven, bald den deductiven Weg einschlagen wird, wobei jedoch wegen der angedeuteten Umkehrungen ein Uebergewicht des deductiven Verfahrens bestehen bleibt.

Die allgemeine Methodenlehre muss sich darauf beschränken, in Bezug auf jede der angegebenen Methoden die allgemeingültigen logischen Gesichtspunkte zu entwickeln, während die Untersuchung der besonderen Bedingungen und einzelnen Formen ihrer Anwendung den folgenden Abschnitten, welche die Logik der einzelnen Wissenschaftsgebiete behandeln, überlassen bleibt.

### b. Die Analyse.

Die Gegenstände unserer äusseren sowohl wie unserer inneren Erfahrung sind von zusammengesetzter Beschaffenheit. Jedes einzelne Object und Ereigniss bietet uns bald mehrere bleibend coexistirende Bestandtheile, bald verschiedene in der Zeit auf einander folgende Zustände dar, und nicht selten verbinden sich diese beiden Merkmale mit einander. Die Analyse ist daher diejenige methodische Denkoperation, welche durch die natürliche Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte in der Regel zuerst angeregt wird. Eine klare und deutliche Auffassung der Gegenstände ist die Grundbedingung der wissenschaftlichen Untersuchung und zugleich das nächste Merkmal, welches dieselbe von der gewöhnlichen praktischen Betrachtung der Dinge unterscheidet. Die bestimmte Vergegenwärtigung der einzelnen simultan oder successiv wahrzunehmenden Elemente, aus denen eine Thatsache besteht, muss daher der erste Schritt bei der Untersuchung derselben sein. Diese Analyse der Thatsachen vollzieht sich nun aber wieder in einer bestimmten Entwicklungsfolge, innerhalb deren sich im allgemeinen drei Stufen unterscheiden lassen. Naturgemäss ist es nur die erste derselben, welche in der angedeuteten Weise die Vorbereitung zu jeder weiteren Untersuchung bildet, während sich die übrigen mit synthetischen Verfahrungsweisen combiniren können und in dieser Verbindung namentlich Bestandtheile der Induction und Deduction zu bilden pflegen.

Jene erste Stufe ist die der elementaren Analyse. Sie besteht

lediglich in der Zerlegung einer Erscheinung in ihre Theilerscheinungen, ohne dass man sich noch darum kümmert, in welchen gegenseitigen Beziehungen die Theile des Ganzen zu einander stehen mögen. Eine solche Zerlegung erfüllt zunächst einen rein descriptiven Zweck. Denn darin gerade besteht das Wesen der Beschreibung, dass man ausschliesslich über das Neben- und Nacheinander der Bestandtheile einer Erscheinung Rechenschaft giebt. Ausserdem kann aber die Beschreibung die eingehendere causale Untersuchung vorbereiten, und es ist dies regelmässig der Fall, wenn nicht gerade die Schwierigkeit des Gegenstandes eine einstweilige Beschränkung auf die blosse Beschreibung gebietet. Im übrigen können die Hülfsmittel, deren sich die elementare Analyse bedient, der verschiedensten Art sein. In den einfachsten Fällen stützt sie sich auf die natürlichen Sinneswerkzeuge oder, bei der psychologischen Analyse, auf die unmittelbare innere Wahrnehmung. Der logische Charakter des Verfahrens bleibt aber der nämliche, wenn künstliche Werkzeuge den Sinnesorganen zu Hülfe kommen, wie bei den vollkommeneren Formen der naturwissenschaftlichen Beobachtung, oder wenn aus den Berichten verschiedener Augenzeugen, historischen Documenten, statistischen Erhebungen u. dergl. eine Anzahl von Thatsachen in Bezug auf ihre räumliche und zeitliche Verbindung festgestellt wird, wie solches bei der Untersuchung socialer und historischer Fragen stattzufinden pflegt. Selbst dann verliert die Methode noch nicht den Charakter elementarer Analyse, wenn gewisse Versuchsverfahren zu Rathe gezogen werden, deren Anwendung an sich schon auf die Kenntniss gewisser causaler Beziehungen gegründet ist, so lange nur der Zweck des Verfahrens sich auf die thatsächliche Feststellung der Elemente einer Erscheinung beschränkt und bloss die äussere räumliche und zeitliche Verbindung derselben berücksichtigt. So ist die chemische Elementaranalyse auch im logischen Sinne eine solche, so weit sich auch hier der Vorgang von der einfachen Zerlegung einer sinnlichen Wahrnehmung in ihre Theile entfernen mag. Denn das Resultat der chemischen Elementaranalyse ist lediglich die Kenntniss der einfachen Bestandtheile des untersuchten Körpers ohne Rücksicht auf die näheren Bedingungen ihrer Verbindung. Aber gerade in diesen verwickelteren Fällen, in denen schon für den descriptiven Zweck experimentelle Hülfsmittel herbeigezogen werden müssen, pflegt die erste unaufhaltsam zu den weiteren Stufen der analytischen Methode überzuführen.

Als zweite Stufe ergiebt sich so die der causalen Analyse. Sie besteht in der Zerlegung einer Erscheinung in ihre Bestandtheile mit Rücksicht auf die ursächlichen Beziehungen der letzteren. Eine derartige vom Zweck der Erklärung geleitete Zergliederung setzt die elementare descriptive Analyse der Thatsachen bereits voraus. Doch kann die letztere unter Umständen sehr schnell erledigt sein oder auch sofort in die causale Zergliederung verwoben werden, so dass die Untersuchung unmittelbar mit dieser zu beginnen scheint. Beispiele solcher Art bieten

unter den Naturwissenschaften die Physik, unter den Geisteswissenschaften die Psychologie und Geschichte, während anderseits Chemie und Physiologie, Staats- und Gesellschaftslehre leicht als Gebiete zu erkennen sind, in denen das descriptive Stadium eine selbständigere Bedeutung besitzt. Der Grund dieses Unterschieds liegt in den verschiedenen Bedingungen dieser Wissenschaften. Physik und Psychologie beschäftigen sich beide mit der Erklärung der allgemeinen Erscheinungen, jene der äusseren, diese der inneren Erfahrung. Zu diesem Behuf beginnen beide ihre Analyse mit den einfachsten Thatsachen, bei denen ohne beschreibende Vorbereitung eine causale Erwägung unmittelbar nahe gelegt wird. Die Untersuchung der verwickelteren Erscheinungen stützt sich dann aber bereits auf jene einfachsten Causalanalysen, und es verbindet sich daher sofort mit ihnen der Versuch, durch ein synthetisches Verfahren die Anwendbarkeit der analytisch gewonnenen causalen Principien zu prüfen. Der historischen Untersuchung mangeln zwar derartige einfache Ausgangspunkte; dafür aber bedient sie sich eines weitgehenden Abstractionsverfahrens, das es ihr gestattet, zunächst gewisse Hauptmomente des historischen Geschehens herauszugreifen, für welche die Zurückführung auf bestimmte psychologische Motive nahe liegt. In völlig entgegengesetzter Lage befinden sich die an zweiter Stelle angeführten Disciplinen. Bei ihnen ist meistens schon in den einfachsten Fällen das rein thatsächliche Verhalten, wie es z. B. in der qualitativen und quantitativen Zusammensetzung einer chemischen Verbindung, in den morphologischen und chemischen Eigenschaften eines Organs, in den Berufs- und Sittenzuständen einer Bevölkerung gegeben ist, so wenig der unmittelbaren Beobachtung zugänglich, dass die descriptive Analyse der Thatsachen einen selbständigen Werth für sich in Anspruch nimmt.

In der Ausführung zeichnet sich die causale Analyse vor allem durch ein willkürliches Isoliren einzelner Elemente aus den zu untersuchenden complexen Thatsachen aus, welches Verfahren in der Absicht geübt wird, die causalen Beziehungen der isolirt betrachteten Elemente kennen zu lernen. Während demnach die elementare Analyse den Gegenstand höchstens insofern verändert, als sie zum Behuf der Nachweisung seiner Bestandtheile diese successiv von einander trennt, vernachlässigt die causale von vornherein die Existenz gewisser Bestandtheile; sie beschränkt sich dann aber nicht auf die Nachweisung der übrigen in Rücksicht gezogenen Elemente, sondern sie sucht so viel als möglich die Bedingungen ihrer Coexistenz oder Aufeinanderfolge zu verändern. Zu der Isolation gesellt sich auf diese Weise die Variation der Elemente als das wesentlichste Hülfsmittel. Am vollendetsten gestaltet sich die letztere dann, wenn die Natur des Gegenstandes es gestattet, willkürlich einzelne Elemente der Erscheinung entweder ganz zu beseitigen oder in ihrer Grösse zu verändern. In einer solchen willkürlichen Variation besteht die analytische Form des experimentellen Verfahrens. Wo das Experiment angewandt werden kann, verdient es vor jeder anderen Art causaler Analyse den Vorzug, weil

es auf dem directesten Wege das causale Verhältniss der Elemente einer Erscheinung ermitteln lässt. Ist es wegen der Natur des Gegenstandes nicht anwendbar, wie bei gewissen den Menschen betreffenden physiologischen Fragen, bei den allgemeinsten kosmologischen und biologischen, bei historischen und socialen Problemen, so muss der Variation der Elemente der untersuchten Erscheinung die *Variation der Elemente verschiedener einander ähnlicher Erscheinungen* substituirt werden. Es greift daher nun allgemein ein *Vergleichungsverfahren* Platz, bei welchem man die zu untersuchende Thatsache in Parallele bringt mit anderen bekannten Thatsachen, die ihr in irgend welchen Beziehungen ähnlich sind. Je mehr solche Variationen denjenigen Veränderungen gleichen, welche man bei der experimentellen Methode willkürlich hervorbringen würde, um so mehr gewinnen natürlich auch die Resultate einen experimentellen Werth. Da jedoch die Auffindung geeigneter Thatsachen von glücklichen Zufällen abhängt, so beansprucht hier die Untersuchung auch unter den günstigsten Verhältnissen eine längere Zeit, und sie setzt die Ansammlung eines umfangreicheren Erfahrungsmaterials voraus. In nicht seltenen Fällen aber bleibt jede Annäherung an die experimentelle Methode dadurch ausgeschlossen, dass die untersuchten Thatsachen einen ~~solitären~~ singulären Charakter besitzen, insofern selbst die einigermassen verwandten Erscheinungen immer noch zu verschieden sind, um eine unmittelbare Vergleichung zu gestatten. Dies findet namentlich bei denjenigen Vorgängen der *Entwicklung* statt, bei denen, wenigstens in einer unserer Beobachtung zugänglichen Zeit, periodische Wiederholungen ausgeschlossen sind, wie bei der ersten Entstehung kosmischer und organischer Gebilde oder bei historischen Ereignissen. Hier muss sich dann die vergleichende Causalanalyse theils mit entfernteren Analogien begnügen, theils wird sie von Voraussetzungen geleitet, welche einem allgemeineren Gebiet von Thatsachen angehören, die eine Anwendung auf den untersuchten Gegenstand zulassen. So stützt sich die Analyse der Artentwicklung theils auf die individuelle Entwicklungsgeschichte, theils auf die nachweisbare Bildung von Spielarten; oder die Analyse historischer Facta folgt allgemein anerkannten psychologischen Gesichtspunkten.

Die *dritte Stufe* der analytischen Untersuchung ist die *logische Analyse*. Sie besteht in der *Zerlegung einer complexen Thatsache in ihre Bestandtheile mit Rücksicht auf die logischen Beziehungen der letzteren.* Hierzu ist erforderlich, dass eine allgemeine Feststellung der begrifflichen Beziehungen der Elemente des Ganzen bereits erfolgt sei. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so übernimmt dann die logische Analyse die Entwicklung der einzelnen Folgerungen, welche sich aus den genannten Beziehungen ergeben. In doppelter Weise kann aber jene allgemeine Feststellung geschehen, welche die Vorbedingung der logischen Analyse ist: erstens durch ein synthetisches Verfahren, welches nach in der Anschauung gegebenen oder willkürlichen Motiven die Beziehungen der

Elemente eines Begriffs zugleich mit diesem selbst bestimmt, und zweitens durch die vorangegangenen Stufen der elementaren und causalen Analyse. Nur im zweiten dieser Fälle bildet demnach die logische Analyse das Endglied des analytischen Verfahrens überhaupt, während im ersten die nachher zu schildernde synthetische Methode in sie einmündet. Es ist bemerkenswerth, dass diese auf synthetischer Grundlage erwachsene logische Analyse die häufigste und zugleich die vollendetste Form darstellt. Insbesondere gehören hierher alle Anwendungen des analytischen Verfahrens im Gebiet der reinen Mathematik. So besitzt man in der Gleichung einer Curve einen auf synthetischem Wege gewonnenen Ausdruck, welcher den Begriff der Curve sammt den Beziehungen seiner wesentlichen Elemente in sich schliesst. Die analytische Behandlung dieses Ausdrucks entwickelt dann durch Zerlegung des Begriffs die verschiedenen Eigenschaften der Curve. Stellt dagegen der einer solchen Analyse unterworfene mathematische Ausdruck ein allgemeines Naturgesetz dar, so pflegt letzteres durch eine vorangegangene causale Analyse der Erscheinungen gewonnen zu sein, worauf nun die nachfolgende logische Analyse Folgerungen entwickelt, die wiederum durch Beobachtung oder Experiment geprüft werden können. Auf diese Weise fordern gerade hier, wo die logische Analyse das analytische Untersuchungsverfahren abschliesst, nicht selten die Resultate derselben eine theilweise Rückkehr zu den vorangegangenen Stufen. Uebrigens pflegt auch in diesen Fällen an der Feststellung der Begriffe, welche der logischen Analyse zu unterwerfen sind, immerhin in gewissem Grade die synthetische Methode betheiligt zu sein, da die Formulirung allgemeiner Naturgesetze niemals das Resultat einer reinen Analyse ist, sondern aus dem zusammengesetzten Verfahren der Induction entspringt.

Wegen der exacten Form, in welcher die mathematische Symbolik die Beziehungen der mit einander verbundenen Grössenbegriffe anzugeben vermag, erweist sich der mathematische Ausdruck eines Begriffs als vorzugsweise geeigneter Ausgangspunkt für die logische Analyse. Doch kann die letztere auch in solchen Begriffssystemen, deren Natur die mathematische Formulirung ausschliesst, zu verhältnissmässig grosser Vollendung gelangen. Das hervorragendste Beispiel dieser Art bilden die Rechtsbegriffe, die, nachdem sie durch Definitionen von normativer Bedeutung festgestellt sind, bald mit Rücksicht auf allgemeine Rechtsfragen, bald aus Anlass individueller Rechtsanwendungen der logischen Analyse unterworfen werden. Immerhin verräth sich die minder exacte Natur solcher Definitionen noch häufig genug in den widerstreitenden Resultaten, zu denen die Analyse gelangen kann, und deren Ausgleichung eine der erheblichsten Aufgaben juristischen Scharfsinns zu sein pflegt.

An den hier geschilderten drei Stufen der analytischen Methode können sich die verschiedenen logischen Functionen in ziemlich wechselnder Weise betheiligen. Eine logische Zergliederung dieser wie jeder anderen Methode lässt sich daher nur insofern vornehmen, als man die logischen Grund-

formen bezeichnet, auf welche die betreffenden Methoden vermöge der in ihnen herrschenden Gedankenthätigkeit vorzugsweise zurückgehen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich als die Grundform der elementaren Analyse das disjunctive Urtheil betrachten, insofern es eine Thatsache M in ihre Theile A, B, C ... zerlegt, ohne über die logische Beziehung dieser Theile zu einander Rechenschaft zu geben:

$$M \geqq A \,)(\, B \,)(\, C \ldots .$$

Die causale Analyse zerlegt diese Form in ebenso viele Abhängigkeitsurtheile, als zuvor einzelne Glieder unterschieden worden sind. Sie gewinnt so Beziehungen von der Form:

$$A \;{}^{\models}_{\dashv}\; B,\; B \;{}^{\models}_{\dashv}\; C,\; C \;{}^{\models}_{\dashv}\; D, \ldots .$$

wobei das obere oder untere Symbol gilt je nach der Richtung der causalen Abhängigkeit, unter Umständen aber auch beide in dem Zeichen der Wechselbestimmung $\mp$ sich vereinigen können. (Bd. I, S. 245 f.) Endlich die logische Analyse setzt an die Stelle des causalen Abhängigkeits- das allgemeinere Bedingungsurtheil, indem sie zugleich die sämmtlichen Glieder des untersuchten Begriffs mit einander zu verbinden strebt, so dass sie schliesslich ein Gesammturtheil gewinnt von der Form

$$M \models (A, B, C \ldots)$$

oder in mathematischer Symbolik ausgedrückt

$$M = f\,(A, B, C \ldots),$$

wo das Abhängigkeits- oder Functionssymbol vor der Gesammtheit der Begriffsglieder andeutet, die logische Zerlegung des Begriffs M in seine Elemente A, B, C ... solle in der Weise stattfinden, dass zugleich die logischen Beziehungen dieser Elemente zu einander angegeben werden. Mit Rücksicht hierauf kann man daher in der logischen Analyse ein Verfahren erblicken, welches die formalen Eigenschaften der beiden vorangehenden Stufen mit einander vereinigt.

### c. Die Synthese.

Das synthetische Verfahren kann in der einfachen Umkehrung einer vorausgegangenen Analyse bestehen. Dann ist die Synthese eine reproductive: sie hat einen verhältnissmässig beschränkten Werth, da sie hauptsächlich im Interesse einer nochmaligen Prüfung der analytischen Resultate unternommen wird. Es kann aber auch das synthetische Verfahren in einer solchen Weise zur Anwendung kommen, dass nur gewisse Resultate vorangegangener analytischer Untersuchungen oder sogar nur die Begriffselemente, die eine vorherige Analyse gefunden hat, benützt werden, während die Synthese selbst in neuer und unabhängiger Weise die Elemente verbindet. Hier ist die Synthese eine productive: sie führt

zu Ergebnissen, welche die analytische Untersuchung in wesentlichen Punkten ergänzen oder in dieser nicht einmal angedeutet lagen. Zwischen beiden Arten der Synthese finden sich mannigfache Zwischenstufen, für welche namentlich die synthetische Form des experimentellen Verfahrens Belege darbietet. Nachdem die Analyse eines zusammengesetzten Klangs gewisse Partialtöne in ihm nachgewiesen hat, versucht man aus einfachen Tönen den Klang zusammenzusetzen. Nachdem durch die Analyse des weissen Sonnenlichts die Spectralfarben als Bestandtheile desselben erkannt sind, erzeugt man umgekehrt das Weiss durch die Mischung der Farben. Aber hier liegt es dann zugleich nahe, das Verfahren zu modificiren, so dass der Weg einer bloss reproductiven Synthese verlassen wird. An Stelle aller Bestandtheile des Sonnenlichts begnügt man sich mit der Mischung einzelner Spectralfarben und gewinnt so durch selbständige Synthese verschiedene Combinationen derselben, welche sich zu Weiss verbinden lassen. Ebenso entfernt sich die chemische Synthese, namentlich bei den zusammengesetzteren Verbindungen, in der Regel mehr oder weniger von dem Weg der Analyse, da man, von bestimmten Voraussetzungen über die Constitution der Verbindungen ausgehend, von vornherein durch die Synthese eine Prüfung jener Voraussetzungen zu gewinnen sucht. Am eigenthümlichsten gestaltet sich immer dann die Synthese, wenn sie von vorangegangenen analytischen Untersuchungen nur die Elemente übernimmt, mit denen sie ihren Aufbau beginnt. Sie führt hier speciell den Namen der Construction, ein Ausdruck, der zunächst dem mathematischen Gebiete entnommen ist, wo eine solche productive Synthese vorzugsweise geübt wird. So benützt die synthetische Geometrie den Punkt, die Gerade und die Ebene als Elemente, mit denen sie alle ihre Constructionen ausführt. Der productive Charakter der letzteren ist aber namentlich auch desshalb ein so ausgeprägter, weil die Analysen, die zur Auffindung jener Elemente geführt haben, höchst einfacher Art waren, so dass sie den Erfolg der sich anschliessenden synthetischen Operationen nicht entfernt vorausahnen liessen.

Abgesehen von dieser in dem Verhältniss zur vorangegangenen Analyse begründeten Unterscheidung sind bei der synthetischen Untersuchung, eben weil sie eine Umkehrung der analytischen ist, die nämlichen Stufen wie bei der letzteren möglich. Doch tritt die elementare Synthese fast ganz zurück, da der rein thatsächliche Nachweis der Elemente eines Ganzen in der Regel durch die analytische Untersuchung in zureichender Weise geliefert werden kann. Dagegen ist die causale Synthese von hervorragender Bedeutung. Sie bildet einen wichtigen Bestandtheil des experimentellen Verfahrens, der nicht bloss da seine Anwendung findet, wo es sich darum handelt, ein analytisches Resultat durch die Umkehrung des Versuchswegs zu bestätigen, sondern vielfach auch selbständig durch neue Combinationen elementarer Bedingungen complexe Erscheinungen hervorbringt. Eine logische Synthese endlich ist bei allen mathematischen und sonstigen begrifflichen

Constructionen wirksam. Bald werden solche Constructionen, wie in der synthetischen Geometrie, durch die Anschauung geleitet, wobei jedoch die Verarbeitung der letzteren immer logischen Gesichtspunkten unterworfen bleibt, bald beruhen sie auf einer rein begrifflichen Zusammenfügung, wie bei dem Euklidischen Beweisverfahren in seinen mathematischen, philosophischen und sonstigen Anwendungen, oder bei gewissen dialektischen Verfahrungsweisen von synthetischem Charakter, für welche Hegel's Dialektik ein prägnantes Beispiel ist. Die verhältnissmässig einwurfsfreieste unter diesen Methoden, die Euklidische, zeigt jedoch deutlich, was bei den anderen zuweilen mehr verhüllt wird, dass es sich hier im besten Falle um reproductive Synthesen handelt, bei denen man, wie dies schon von Newton trotz seiner Hochschätzung des Euklidischen Verfahrens richtig erkannt wurde, analytische Ergebnisse in die synthetische Form umprägt. Wo dies nicht der Fall ist, wie in den synthetischen Verfahrungsweisen philosophischer Dialektik, da treten an die Stelle einer haltbaren logischen Synthese nur zu leicht willkürliche Begriffscombinationen.

Die synthetische Methode ist im allgemeinen von beschränkterer Anwendung als die analytische. Insbesondere pflegen sich die Thatsachen, sobald sie eine gewisse Verwicklung erreichen, der synthetischen Construction oder selbst Reconstruction zu entziehen. So pflegt sich schon die synthetische Geometrie auf die Untersuchung verhältnissmässig einfacher Raumgebilde, wie der Curven und Flächen zweiten Grades, zu beschränken, um die Untersuchung complicirterer Probleme der analytischen Geometrie zu überlassen. Ebenso reicht in den Gebieten der Physik und Chemie die Analyse bis zu den zusammengesetztesten Erscheinungen und Körpern, während die Synthese immer nur relativ einfachere Processe aus ihren Bedingungen oder einfachere Verbindungen aus ihren Elementen zu erzeugen im Stande ist. Aus dem nämlichen Grunde ist die Synthese im Gebiet der Geisteswissenschaften von beschränkter Anwendung. Die meisten psychologischen, socialen und historischen Thatsachen sind von allzu verwickelter Beschaffenheit, als dass sie einen anderen als den analytischen Weg der Untersuchung zuliessen. Nur die Psychologie gestattet bei den einfachsten Processen der sinnlichen Wahrnehmung ein synthetisches Experimentalverfahren. Ebenso hat auf Grund gewisser allgemeingültiger psychologischer Thatsachen die Nationalökonomik, indem sie durch eine weitgehende Abstraction die Probleme auf einfachste Bedingungen zurückführte, gewisse Folgerungen auf synthetischem Weg gewonnen. Dabei sind dann freilich diese insofern nur von hypothetischer Bedeutung, als durch die gemachten Abstractionen die Fiction eines Thatbestandes entsteht, welcher von dem wirklichen Geschehen stets mehr oder weniger weit sich entfernt.

Da das synthetische nur eine Umkehrung des analytischen Verfahrens ist, so bleiben auch die logischen Grundformen hier die nämlichen. Die elementare Synthese entspricht einfach dem copulativen Urtheil von der Form

$$A \,)(\, B \,)(\, C \ldots \leqq M.$$

Die causale Synthese führt dann aber sofort zu einem zusammengesetzten Abhängigkeitsurtheil von der Form

$$(A,\ B,\ C \ldots) \rceil M \text{ oder } f\,(A, B, C \ldots) = M,$$

da, dem Charakter der synthetischen Methode gemäss, das für die Analyse charakteristische Herausheben einzelner Causalbeziehungen hier hinwegfällt. Der nämlichen Form folgt dann schliesslich die logische Synthese, bei der nur die Abhängigkeits- und Functionssymbole eine allgemeinere Bedeutung gewinnen.

## 2. Abstraction und Determination.

### a. Die Abstraction.

Unter der *Abstraction* verstehen wir allgemein das Verfahren, durch welches aus einer zusammengesetzten Vorstellung oder aus einer Mehrzahl solcher Vorstellungen gewisse Bestandtheile eliminirt und die zurückbleibenden als Elemente eines Begriffs festgehalten werden. Die Abstraction ist daher das hauptsächlichste Hülfsmittel für die Bildung von *Allgemeinbegriffen*; ihrerseits aber stützt sich dieselbe wieder auf die *Analyse*. Denn die Thatsachen, welche als Objecte der Begriffsbildung gegeben sind, müssen zunächst in gewisse Bestandtheile zerlegt sein, ehe ein Eliminationsverfahren eintreten kann.

Die wissenschaftliche Bedeutung der Abstraction beruht theils auf dem Werthe, der ihr an und für sich zukommt, theils und besonders aber auf der Wichtigkeit, die sie als Bestandtheil und Hülfsmittel anderer logischer Verfahrungsweisen besitzt. Aus der Fülle der einzelnen Erscheinungen, die einen complexen Thatbestand ausmachen, bestimmte Elemente herausheben und isolirt der weiteren Untersuchung oder der Ordnung der Erscheinungen zu Grunde legen zu können, ist eine der werthvollsten Errungenschaften der analytischen Methode; denn sie ermöglicht ihrerseits wieder die scharfe Zergliederung des Einzelnen, die sonst nothwendig an dem verwirrenden Detail der complexen Thatsachen scheitern müsste. Dabei gewährt es noch einen besonderen Vortheil, dass diese Abstraction vollkommen nach unserer freien Wahl in der verschiedensten Weise und im verschiedensten Grade geübt werden kann. Denn es ist schliesslich derselbe Vorgang, der den Systematiker befähigt, bei der Untersuchung einer naturgeschichtlichen Species die rein individuellen Variationen zu vernachlässigen, die eine im übrigen mit zahlreichen concreten Eigenschaften ausgerüstete Artform darbietet, und der es dem Mathematiker möglich macht, Begriffe festzuhalten, welche in der von ihm definirten Weise in gar keiner concreten Erfahrung gegeben sind, sondern für welche die

einzelnen Erfahrungsobjecte nur als Hülfsmittel der Versinnlichung dienen müssen.

Die Abstraction vollzieht sich in zwei von einander abweichenden Formen, die wir als isolirende und generalisirende Abstraction unterscheiden können. Unter ihnen ist die erstere die ursprünglichere, da die analytische Methode immer zunächst zu ihr überführt, und da sie jeder generalisirenden Abstraction nothwendig vorausgeht. Im übrigen aber bilden beide nicht etwa zwei regelmässig auf einander folgende Entwicklungsstufen, sondern die isolirende Abstraction besitzt ihren selbständigen Werth, und bei vielen gerade der wichtigsten Anwendungen des Abstractionsverfahrens bleibt dieses ganz auf die isolirende Form beschränkt, und die generalisirende bildet eine verhältnissmässig unwichtigere Ergänzung.

Das Wesen der isolirenden Abstraction liegt darin, dass man aus einer in der Beobachtung gegebenen complexen Erscheinung einen bestimmten Bestandtheil oder mehrere Bestandtheile willkürlich abgetrennt denkt und für sich der Beobachtung unterzieht. So reflectirt der Physiker bei der Untersuchung der Lichtbrechung im Prisma nur auf den Gang der Lichtstrahlen und die Farbenzerstreuung, er abstrahirt aber von der gleichzeitigen Erwärmung des Prismas, seiner thermischen Ausdehnung, der Elasticitätsänderung des Glases u. s. w. So nimmt der Nationalökonom bei der Untersuchung der allgemeinen Gesetze des Güterverkehrs nur auf den Trieb der Menschen, Güter zu erwerben und zu ersparen, Rücksicht, um dagegen alle möglichen anderen Eigenschaften, moralische Triebe, Leidenschaften, mangelnde Einsicht u. dergl., die in der Wirklichkeit nicht selten die Effecte jener wirthschaftlichen Eigenschaften durchkreuzen, zu vernachlässigen. So reflectirt schliesslich der Geometer, wenn er den Begriff eines mathematischen Punktes bildet, nur auf die Anschauungsfunction, welche einen Ort im Raume fixirt, er abstrahirt aber von allen Eigenschaften der physischen Objecte, die wir zur Ortsbestimmung verwenden, also nicht bloss von ihrer Lichtbeschaffenheit, sondern insbesondere auch von ihrer räumlichen Ausdehnung.

Die generalisirende Abstraction besteht darin, dass man innerhalb einer der vergleichenden Analyse unterworfenen Anzahl von Gegenständen oder complexen Thatsachen, die von einem individuellen Fall zum anderen wechselnden Eigenschaften vernachlässigt, um gewisse der gesammten Gruppe gemeinsam zugehörige zurückzubehalten und zu Merkmalen eines allgemeinen Begriffs zu erheben. Diese Abstraction zerfällt wieder in zwei Unterformen, je nachdem die der Analyse unterworfenen Objecte wirkliche Gegenstände der Anschauung oder des Denkens oder aber einzelne Sätze sind, die sich auf irgend welche Relationen von Gegenständen beziehen. Im ersten Fall gehen aus der Abstraction Gattungsbegriffe hervor, im zweiten Fall liefert dieselbe abstracte Regeln oder Gesetze. So sind die Begriffe der naturhistorischen Classificationen durch eine generalisirende Abstraction der ersten Art gebildet: sie sind zugleich Gegenstandsbegriffe,

wenn ihnen auch nicht unmittelbar reale Gegenstände entsprechen, da diese stets individuelle Eigenschaften besitzen, die bei der Bildung der Gattungsbegriffe eliminirt werden. Andere Gattungsbegriffe entstehen durch eine Generalisation, die nicht von empirischen Gegenständen, sondern von Begriffen ausgeht, welche bereits eine isolirende Abstraction voraussetzen. Den allgemeinen Begriff des Dreiecks z. B. bilden wir aus einer Vielheit einzelner geometrischer Dreiecke, deren jedes das Resultat einer mathematischen Abstraction ist. Ebenso finden sich innerhalb aller anderen Begriffsgebiete, bei den ethischen, psychischen, metaphysischen und Rechtsbegriffen, Verhältnisse der Ueber- und Unterordnung, die auf eine Stufenfolge generalisirender Abstraction hinweisen. Auch die *zweite* Form der letzteren, die Abstraction von Regeln oder Gesetzen, findet sich auf allen Gebieten wieder. Wie die Begriffe einer nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kraft oder einer transversalen Wellenbewegung durch Generalisation entstanden sind, so beruhen nicht minder die allgemeinen Gesetze einer solchen Kraft oder Bewegung auf generalisirender Abstraction. Ueberhaupt aber ist die letztere bei der Aufstellung aller derjenigen Gesetze betheiligt, die eine Vielheit concreter Gesetze, deren jedes durch eine besondere Induction gefunden ist, unter sich begreifen.

Auf diese Weise schliesst nicht selten die generalisirende Abstraction einen zusammengesetzten Inductionsprocess ab, während umgekehrt die isolirende denselben theils vorbereitet, theils in seinen Ablauf unterstützend eingreift. Ein charakteristischer *äusserer* Unterschied beider Formen liegt ausserdem darin, dass sich die Isolation nöthigenfalls an einem einzigen Erfahrungsgegenstande vollziehen kann, die Generalisation aber stets eine Vielheit von Objecten voraussetzt. Die Gesetze der Lichtbrechung würden sich an einem einzigen Prisma studiren, der Begriff der Geraden an einer einzigen mit dem Lineal gezogenen Linie entwickeln lassen, wenn auch in der Wirklichkeit wegen der wünschenswerthen Variation der Bedingungen selten eine solche Beschränkung stattfinden wird. Dagegen ist für die Begriffe der Naturgeschichte oder der systematischen Geisteswissenschaften die Vielheit der Abstractionsobjecte ein unbedingtes Erforderniss, da die Heraushebung der den allgemeinen Begriff constituirenden Elemente nur durch das Vorkommen derselben in einer Vielheit einzelner Gegenstände oder Specialbegriffe veranlasst wird.

Als die *logische Grundform der Abstraction* lässt sich der *Vergleichungsschluss* oder Schluss der *zweiten* Aristotelischen Figur, aber vorzugsweise in der von Aristoteles nicht berücksichtigten positiven Form, betrachten (Bd. I, S. 324), nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{l} A < M_1,\ M_2,\ M_3, \\ B < M_1,\ M_2,\ M_4, \\ C < M_1,\ M_2,\ M_5, \\ \hline A,\ B,\ C < M_1, \end{array}$$

worin $M_1$ die in Betracht gezogenen Begriffselemente repräsentirt, während $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ die zu eliminirenden Elemente bedeuten, von denen einzelne ($M_2$) ebenfalls übereinstimmen können, während andere, wie $M_3$, $M_4$..., variiren. Die beiden Arten der Abstraction unterscheiden sich nicht sowohl in der Grundform des Vorgangs als in der Auswahl und weiteren Verwerthung der Elemente. Während bei der Isolation die verglichenen Objecte A, B, C ... nur dazu dienen, die Elemente $M_1$ zu gewinnen, die dann zum Zweck der Auffindung allgemeiner Abhängigkeitsbeziehungen den zusammengesetzteren Verfahrungsweisen der Induction überliefert werden, bleibt bei der Generalisation die Ordnung der ursprünglichen Objecte A, B, C ... von entscheidender Bedeutung, und das in die symbolische Formel $A, B, C < M_1$ gefasste Resultat deutet daher zugleich den wesentlichen Zweck des Abstractionsverfahrens selbst an. Denn dieser besteht in der Erhebung der Elemente $M_1$ zu einem Gattungsbegriff, der den Objecten oder Thatsachen A, B, C ... übergeordnet ist.

Beide Formen der Abstraction werden bereits vorbereitet in jenen Begriffsentwicklungen des gewöhnlichen Bewusstseins, welche überall den von wissenschaftlichen Zwecken geleiteten Operationen vorangehen. Für die Isolation fällt dieser Umstand wenig ins Gewicht. Zwar knüpft auch hier die wissenschaftliche Untersuchung an die durch die oberflächlichen Unterschiede der Wahrnehmungen nahe gelegten Abstractionen an, nur aber um diese sofort einer Bearbeitung durch die Induction zu unterwerfen, welche etwa begangene Fehler leicht auszugleichen im Stande ist. Um so bedeutungsvoller sind die natürlichen Begriffsbildungen für die Generalisation. Ueberall trifft diese bereits Gattungsbegriffe an, über deren Bildung sich das vorwissenschaftliche Denken keine zureichende Rechenschaft giebt, und denen es gleichwohl durch feststehende sprachliche Bezeichnungen eine grosse Widerstandskraft verleiht. Dazu kommt bei den untersten Gattungsbegriffen noch der Umstand hinzu, dass sie, da in solchen Fällen die Uebereinstimmung der oberflächlichen derjenigen der tieferen Merkmale parallel zu gehen pflegt, meistens von der Wissenschaft sanctionirt werden müssen, wodurch leicht die Täuschung entsteht, als wenn ein Abstractionsverfahren hier überhaupt gar nicht vorhanden wäre. Hat diese Täuschung in der Platonischen Ideenlehre sich auch auf die oberen Gattungen übertragen, wobei dann diesen Objecten nur eine transscendente Existenz zugestanden werden konnte, so ist sie in der neueren Wissenschaft vielfach in der vielleicht gefährlicheren Form erhalten geblieben, dass man die unteren Gattungen für wirkliche Erfahrungsgegenstände hielt. In der Naturgeschichte hat dieser Irrthum zu der lange Zeit herrschenden Lehre geführt, dass jede organische Species eine primitive organische Form sei. Der Canis familiaris und die Felis domestica, meinte man, seien wirkliche Objecte oder mindestens einmal solche gewesen, während Niemand der Meinung war, dass der Wiederkäuer oder das Wirbelthier als solche existiren oder auch nur jemals existirt haben. Aehnlich verhält es sich noch mit anderen

Producten generalisirender Abstraction. Die nordische Mythologie, die deutsche Sprache gelten uns als wirkliche geistige Dinge; Niemand aber schreibt dem Polytheismus oder der Sprache überhaupt eine solche Realität zu. Immerhin ist es bemerkenswerth, dass hier in gewissem Sinne die Entwicklungslehre zu einer eigenthümlichen Erneuerung der Platonischen Ansicht von der Existenz realer Urbilder der Begriffe geführt hat, indem sie auf verschiedenen Gebieten bemüht war, nachzuweisen, dass sogar diejenigen Allgemeinbegriffe, die bis dahin als reine Producte logischer Abstraction betrachtet wurden, auf Thatsachen zurückführen, die freilich nicht in einer transscendenten Welt, wohl aber in einer entfernten Vergangenheit der wirklichen eine reale Existenz besassen. Das abstracte Wirbelthier nimmt in einem hypothetischen Acranier der Primordialzeit concrete Gestalt an, der Begriff der indogermanischen Sprachenfamilie hypostasirt sich zu einer arischen Ursprache. Aus dieser in so verschiedenen Gestalten hervorgetretenen Neigung, begrifflichen Abstractionen eine reale Unterlage zu geben, kann selbstverständlich kein Einwand gegen die genetische Auffassung überhaupt entnommen werden; wohl aber mahnt jene Thatsache zur Vorsicht gegenüber denjenigen genetischen Constructionen, die nicht von realen Thatsachen, sondern zunächst nur von Producten unserer Abstraction ausgehen. Diese für sich genommen können, auch wenn sie noch so zweckmässig gebildet sind, immer nur auf bestimmte Ursachen unserer Abstraction hinweisen; um festzustellen, dass diese Ursachen wirkliche Gegenstände sind, dazu ist aber stets ein besonderes Inductionsverfahren erforderlich.

In nahem Zusammenhange mit der Abstraction steht ferner die Benennung der Erscheinungen. Sie ist ein Erzeugniss der Isolation. Denn der Name eines Gegenstands, mag er nun auf dem natürlichen Wege der Sprachbildung entstanden oder aus bestimmten wissenschaftlichen Bedürfnissen erfunden sein, bezeichnet stets ein einzelnes Merkmal. Hieran schliesst sich aber sofort eine Generalisation an, indem der bei einem bestimmten Gegenstand geschaffene Name auf andere ähnliche Gegenstände übertragen wird, die er in eine Gattung zusammenfasst. Wie die Benennung ein Erzeugniss der isolirenden, so ist sie demnach das wesentliche Hülfsmittel der generalisirenden Abstraction, und in ihrer Entstehungs- und Anwendungsweise spiegelt sich die naturgemässe Aufeinanderfolge jener beiden logischen Operationen. Der Umstand aber, dass die Wissenschaft in der Sprache bereits ein natürlich entstandenes System von Namen für die Objecte und Erscheinungen vorfindet, bringt nicht bloss den grossen Vortheil leichter Verständigung, sondern auch mannigfache Nachtheile mit sich. Nichts begünstigt mehr jene Neigung, die nächsten Abstractionsproducte für wirkliche Dinge zu nehmen, als das Vorhandensein von Namen, denen jede Spur einer willkürlichen Entstehung verloren gegangen ist. Doch besitzt die Sprache in dem Vorgang des Bedeutungswechsels ein wirksames Mittel, diesen Nachtheil wieder aus-

zugleichen. So ist das Wort Vogel, das ursprünglich alle fliegenden Thiere bezeichnete, in der wissenschaftlichen Bedeutung auf eine bestimmte Classe derselben eingeschränkt worden; umgekehrt haben Bezeichnungen, wie Keim, Ei, Nahrung, Athmung, die Namen für die meisten Organe des Thierkörpers u. s. w., fortschreitende Verallgemeinerungen erfahren, durch die sie sich den Bedürfnissen der wissenschaftlichen Terminologie anpassten. Immerhin bietet es unverkennbare Vortheile dar, wenn die Wissenschaft, wie bei gewissen allgemeineren Gattungsbegriffen oder bei solchen, die eine eindringende wissenschaftliche Untersuchung voraussetzen, in der Lage ist, die Benennungen selbst schaffen zu können. Nur dadurch ist es z. B. der chemischen Terminologie möglich geworden, an die Namen der Verbindungen zugleich die allgemeinsten Andeutungen über deren Constitution zu knüpfen, so dass dieselben die Stelle allgemeiner Definitionen vertreten. Dennoch zeigt es sich auch in diesem Fall an den Namen der Elemente, dass die einfachsten Begriffe, selbst wenn sie künstlich gebildet sind, meistens unter dem Einfluss ähnlicher zufälliger Motive stehen wie die natürlichen Benennungen der Sprache.

### b. Die Determination.

Die Determination ist die Umkehrung der Abstraction und setzt daher stets eine vorangegangene Abstraction voraus. Ihre wissenschaftliche Bedeutung beruht aber hauptsächlich darauf, dass sie den Weg der Abstraction in der Regel nicht einfach umkehrt, sondern zugleich denselben in veränderter Weise zurücklegt. Bei der Determination fügen wir nämlich einem durch Abstraction gewonnenen Begriff besondere Merkmale bei, wodurch ein den concreten Thatsachen näher liegender Begriff aus ihm hervorgeht. Dabei brauchen nun nicht nothwendig die nämlichen Elemente wiedereingeführt zu werden, die bei der Abstraction eliminirt worden waren. So sind in der Naturgeschichte und anderen systematischen Wissenschaften die Gattungsbegriffe zunächst aus einzelnen meist zufällig vorgefundenen Exemplaren der Gattung durch Generalisation gebildet, worauf dann bei der Rückkehr vom Gattungsbegriff zu den Arten oder zu den specielleren Thatsachen ausser jenen ursprünglichen auch andere Objecte für die Bildung der Untergruppen massgebend werden. Noch selbständiger verfährt die Umkehrung der Isolation. Nachdem der Geometer die Abstractionen der Geraden, der Ebene u. s. w. vollzogen, versieht er dieselben durch die Beziehungen, in die er sie zu anderen Vorstellungen bringt, mit näheren Bestimmungen, die von völlig neuer Beschaffenheit sein können. Ebenso lässt sich der Physiker bei der Verbindung eines zuerst isolirt untersuchten Phänomens mit anderen Erscheinungen durchaus von selbständigen Gesichtspunkten leiten, ohne eine besondere Rücksicht auf diejenigen Erscheinungen zu nehmen, von denen ursprünglich abstrahirt werden musste. Diese Selbständigkeit der Determination beruht wesentlich darauf, dass sie überall

auf die Anwendung der synthetischen Methode sich stützt, die ihrerseits zwar eine Umkehrung der Analyse ist, auf welcher alle Abstraction beruht, dabei aber doch unabhängig von irgend einem speciellen analytischen Process angewandt werden kann.

Den beiden Formen der Abstraction entsprechen zwei im selben Sinne von einander abweichende Formen der Determination, die wir als Colligation und als Specification unterscheiden können. Die erstere ist die Umkehrung der isolirenden Abstraction. Sie besteht darin, dass man die Veränderungen ermittelt, welche an zuerst isolirt untersuchten Theilerscheinungen durch die Verbindung mit anderen Elementen entstehen, die mittelst einer ähnlichen Abstraction gewonnen sind*). So untersucht die Mechanik zunächst die Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers, an welchem in bestimmten Richtungen Kräfte angreifen, indem sie bloss die geometrischen Eigenschaften desselben berücksichtigt, ihn also als absolut unveränderlich in seiner Gestalt voraussetzt, um dann zu ermitteln, wie die unter dieser Annahme festgestellten Bedingungen des Gleichgewichts abgeändert werden, wenn man die in der Elasticität begründete Verschiebbarkeit der Theilchen in Rechnung zieht. So kann ferner der Nationalökonom zuerst den Einfluss der relativen Höhe des Zinsfusses auf die Bewegung des flüssigen Capitals losgelöst von allen begleitenden Umständen untersuchen, um hierauf successiv diese letzteren, wie z. B. den verschiedenen Capitalwerth der einzelnen Ländergebiete, die verschiedene Handelslage u. dergl., einer Mitberücksichtigung zu unterwerfen.

Wesentlich anders verhält sich die Specification, in welcher die generalisirende Abstraction ihre Umkehrung findet. Wie schon die letztere an die Vergleichung einer Vielheit von Objecten gebunden ist, so hat auch die Specification wiederum auf dem Wege der Vergleichung des Einzelnen diejenigen Begriffselemente zu finden, welche sich zur Bildung der beschränkteren Gattungs- und Artcharaktere geeignet erweisen. Desshalb bewegt sich diese Form der Determination minder frei in der Auswahl der zu beachtenden Erscheinungen, sondern sie ist theils an die Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte, theils an die Richtung des vorangegangenen Abstractionsprocesses gebunden. Ueberall aber, wo es sich um eine systematische Ordnung von Begriffen handelt, da findet die Specification ihre Anwendung, also nicht bloss in den verschiedenen Gebieten der Naturgeschichte, sondern auch in der erklärenden Naturwissenschaft, sobald dieselbe zum Zweck der Untersuchung oder Darstellung eine Gliederung ihres Gegenstandes auszuführen sucht, und in ähnlichem Sinne in den hauptsächlichsten Geisteswissenschaften, wo insbesondere wieder die Rechts-

---

*) Der Ausdruck Colligation ist hier in einem wesentlich anderen Sinne gebraucht als in Whewell's „Philosophy of the inductive sciences“ (Vol. II, p. 201), wo er die Sammlung einzelner Thatsachen bezeichnet, die der Verf. als vorbereitendes Stadium der Induction betrachtet.

begriffe durch die präcise Form ihrer Determination sich auszeichnen. Aehnlich wie die Colligation der Induction in die Hände arbeitet, indem sie die mittelst der isolirenden Abstraction gewonnenen Grundlagen derselben durch die Mitberücksichtigung begleitender Erscheinungen vervollständigt, so ist die Specification das hauptsächlichste Hülfsmittel der Classification. Denn diese geht von einem Allgemeinbegriff aus, den sie successiv durch eine immer vollständiger werdende Determination in die einzelnen Begriffe zerlegt, die ihm unterzuordnen sind.

Ihr Vorbild findet die Determination als logische Methode in der einfachen Determination der Begriffe (Bd. I, S. 126 u. 223). Sucht man sich aber nicht bloss über das Resultat des logischen Vorgangs, sondern über diesen selbst Rechenschaft zu geben, so lässt er sich auf eine Umkehrung des der Abstraction zu Grunde liegenden Vergleichungsschlusses zurückführen. Hierbei wird zunächst der Allgemeinbegriff $M_1$ den Objecten übergeordnet, aus denen er ursprünglich abstrahirt worden war, und es werden dann die Begriffselemente einzelner Objecte A, B, die unter den Begriff $M_1$ fallen, durchgegangen, um irgend welche ihnen gemeinsame Merkmale $M_2$ mit $M_1$ zu verbinden und so einen beschränkteren Begriff $M_1 M_2$ zu bilden, nach dem Schema:

$$\begin{array}{l} M_1 > A, B, \\ A < M_1, M_2, \\ B < M_1, M_2, \\ \hline M_1 > M_1 M_2. \end{array}$$

Dieses Schema lässt sich auf die beiden Grundformen der Determination anwenden. Während aber bei der Specification im allgemeinen die nämlichen Objecte A, B, C..., welche zur Abstraction des Gattungsbegriffes $M_1$ gedient haben, auch für die Determination des engeren Begriffes $M_1 M_2$ zur Verwendung kommen, können bei der Colligation völlig andere Objecte A', B', C'... herbeigezogen werden, sobald sie nur die Bedingung erfüllen, dass sie dem Allgemeinbegriff $M_1$ entsprechen.

## 3. Induction und Deduction.

### a. Die logischen Elemente der Induction.

Von Aristoteles wurde die Induction oder ἐπαγωγή dem Syllogismus als eine besondere Schlussweise, welche vom Einzelnen zum Allgemeinen aufsteige, gegenübergestellt. Die Aristotelische Induction besteht aber lediglich in der Zusammenfassung gewisser Specialregeln in einen allgemeineren Ausdruck*). Der die Aristotelische Logik beherrschende

*) Dies erhellt deutlich aus dem Aristotelischen Beispiel: „Mensch, Pferd, Maulesel sind langlebig; Mensch, Pferd, Maulesel sind gallenlos; also sind gallenlose Thiere langlebig.“ Analytic. poster. II, 23.

Gesichtspunkt der Subsumtion verräth sich überdies darin, dass der gewonnenen Conclusion erst dann eine allgemeine Bedeutung zugestanden wird, wenn in der einen Prämisse Prädicat und Subject vollständig sich decken, so dass das Urtheil umgekehrt und der Schluss in einen solchen der ersten Figur umgewandelt werden kann*).

Indem Baco von der Ueberzeugung ausgieng, dass alle Erkenntniss auf einzelne Erfahrungen gegründet sei, musste vor allem gegen diese Zurückführung der Induction auf den Subsumtionsschluss seine Polemik sich richten. Der letztere vermag nach ihm höchstens zu zeigen, wie gegebene Sätze zu ordnen sind, niemals aber zu neuen Erkenntnissen zu verhelfen. Solches ist vielmehr die Aufgabe einer wahren Methode der Induction, die darum der syllogistischen Logik um ebenso viel vorzuziehen ist, als die Auffindung der Wahrheiten wichtiger ist als ihre mehr oder minder zweckmässige Anordnung. Auf diese Weise gewinnt bei Baco erst der Begriff der Induction die Bedeutung, die ihm heute noch beigelegt wird**).

Dennoch ist Baco im Irrthum, wenn er meint, das Princip des Syllogismus finde auf seine inductive Methode gar keine Anwendung. Wenn er lehrt, man habe zuerst in einer Tafel der »positiven Instanzen« alle diejenigen Fälle zu registriren, in denen eine der Untersuchung unterworfene Erscheinung beobachtet wird, dann eine Tafel der »negativen Instanzen« aufzustellen, in der diejenigen den vorigen verwandten Fälle aufgezählt werden, in denen die betreffende Erscheinung fehlt, so haben wir es hier zunächst mit Vergleichungsschlüssen zu thun, denen sich leicht die Form der zweiten Aristotelischen Figur geben lässt. Freilich ist mit diesen Vergleichungen bei Baco die Induction noch nicht beendet, sondern es entsteht nun erst die Aufgabe, zu bestimmen, welche allgemeine Bedingung, oder welcher allgemeine Begriff, von Baco »Form« genannt, den übereinstimmenden Fällen zukommt und in den nicht übereinstimmenden fehlt***). Zu diesem Zweck schreibt Baco vor, den vorangegangenen Tafeln eine dritte, die der »gradweisen Abstufungen« hinzuzufügen, nämlich solche Fälle, in denen die untersuchte Erscheinung in quantitativen Unterschieden beobachtet wird. Diese Tafel der Grade bildet zugleich eine Art von Vermittelung zwischen den positiven und den negativen Instanzen, insofern ein Fall A', in welchem M nicht beobachtet wird, gradweise übergehen kann in den Fall A, welchem M zukommt. Derartige Unterschiede eignen sich aber nach Baco ganz besonders zur Erkenntniss der »Form« einer Erscheinung. Denn eine Bedingung, in welcher sich eine positive und eine negative Instanz unterscheiden, wird voraussichtlich für das Wesen

*) So entsteht die „vollständige Induction“: „Mensch, Pferd, Maulesel sind langlebig; das Gallenlose ist Mensch, Pferd, Maulesel; also ist das Gallenlose langlebig.“

**) Baco, Novum organon, lib. I.

***) Nov. organ. II, 1, 20.

der untersuchten Erscheinug bedeutsamer sein als andere Merkmale. Zum Abschluss der Untersuchung bedarf es daher nur noch der Elimination unwesentlicher Unterschiede, welche mittelst der so genannten »Lese« und der an sie sich anschliessenden Aufstellung der »prärogativen Instanzen“ geschieht, einer Sammlung von Gesichtspunkten, in der neben vielem Unwesentlichen und Irrthümlichen einzelne Lichtblicke vorkommen, in denen gewisse Grundsätze der experimentellen Methodik in bewundernswerther Weise anticipirt werden.

Es ist längst bemerkt worden, dass sich die Baconische Induction einer Weitschweifigkeit schuldig macht, wie sie bei den wirklich geübten Inductionen der Wissenschaft niemals vorkommt. In der That waltet in ihr der nämliche Irrthum ob, der die Aristotelische Induction beherrscht: dass nur die vollständige Induction wissenschaftlichen Werth besitze. Dieser Irrthum ist aber bei Baco noch augenfälliger, weil er die Existenz allgemeiner Voraussetzungen, welche die Aufzählung der Fälle von vornherein beschränken könnten, leugnet, so dass bei ihm der Induction die Unmöglichkeit zugemuthet wird, sie solle thatsächlich die Erfahrung erschöpfen. Der zweite Fehler besteht in der Vermengung der Induction mit der Abstraction. Schon der Begriff der »Form«, in deren Nachweisung Baco das Ziel des Inductionsverfahrens erblickt, besitzt die Doppelnatur eines Allgemeinbegriffs und eines allgemeinen Gesetzes. So lehren denn auch die zwei ersten Tafeln seiner Instanzen ein Vergleichungsverfahren, welches an sich nur zur Abstraction von Begriffen führen kann. Erst bei den gradweisen und prärogativen Instanzen wird die Gewinnung allgemeiner Sätze über die Erscheinungen zum vorherrschenden Gesichtspunkt.

In beiden Beziehungen hat die neuere inductive Logik, welche auf dem Baconischen Standpunkte weiterbaute, und deren Hauptrepräsentant John Stuart Mill ist, die Lehre von der Induction zu verbessern gesucht*). Die Induction wird hier als dasjenige Verfahren definirt, durch welches wir erkennen, dass was sich in einzelnen Fällen als wahr bestätigt hat, in allen unter den gleichen Bedingungen eintretenden Fällen wahr sein werde. Sie scheidet sich dadurch ebensowohl von der Begriffsabstraction wie von der so genannten vollständigen Induction, die nichts anderes als die Einführung einer Collectivbezeichnung für eine Anzahl einzelner Thatsachen ist. Die wahre Induction ist nach Mill nicht eigentlich ein Schluss vom Einzelnen auf das Allgemeine, sondern vom Einzelnen auf das Einzelne, da wir zunächst immer nur in einzelnen den vorangegangenen ähnlichen Fällen auch einen ähnlichen Erfolg erwarten. Es steht aber ein jeder solcher Schluss unter der allgemeinen Voraussetzung, dass der Gang der Natur gleichförmig sei, oder dass unter ähnlichen Umständen immer wieder das Aehnliche eintreten werde. Jede Induction lässt sich daher in

---

*) Mill, System der Logik, 3tes. Buch, besonders Cap. III—V.

die Form eines Syllogismus bringen, in welchem jene Voraussetzung die obere Prämisse bildet.

Bei dieser Annahme entsteht nun aber die Frage, wie der oberste Grundsatz aller Inductionen, das Axiom von der Gleichförmigkeit der Natur, selbst entstanden sei. Jener Grundsatz ist offenbar nichts anderes als das allgemeine Causalgesetz, und rücksichtlich seiner giebt Mill die Antwort, es sei eine Induction der rohesten Art, nämlich eine blosse »inductio per enumerationem simplicem«. Dies steht nun aber mit der Voraussetzung, dass dasselbe der gemeinsame Obersatz aller Inductionen sei, im Widerspruch. Mindestens eine Induction muss es dann geben, die auf andere Weise entstanden ist, und consequenter Weise wird man nicht leugnen wollen, dass unter diesen Umständen noch andere Inductionen von dem nämlichen unzuverlässigen Ursprung sein können. Hiernach würden also alle Inductionen in zwei Formen zerfallen:

| in die strenge Induction: | und in die bloss aufzählende Induction: |
|---|---|
| Unter gleichen Bedingungen treten gleiche Erfolge ein, | |
| unter den Bedingungen a, b, c... trat häufig der Erfolg X ein; | Unter den Bedingungen a, b, c... trat häufig der Erfolg X ein; |
| also tritt unter den Bedingungen a, b, c... immer der Erfolg X ein. | also tritt unter den Bedingungen a, b, c... immer der Erfolg X ein. |

Da jedoch der Obersatz der strengen Inductionen seinerseits auf einer blossen Aufzählung beruht, so ist der Unterschied beider Formen in Bezug auf ihre Sicherheit nur ein scheinbarer. Dass die hier zu Grunde liegende Auffassung des Causalprincips eine ungenügende ist, wurde schon früher nachgewiesen. (Bd. I, S. 544.) Ausserdem steht die darauf gebaute Theorie der Induction ebenfalls noch unter dem Bann der Aristotelischen Syllogistik. Die Baconische Forderung einer vollständigen Induction hat sie zwar aufgegeben; dafür verlangt sie, dass jede Induction ein regelrechter Subsumtionsschluss sei, um wenigstens eine formale Sicherheit für dieselbe zu retten.

In verschiedener Weise hat man nun diese formale in eine reale Gewissheit umzuwandeln gesucht. Am nächsten lag es, im Anschlusse an Kant's Kategorienlehre das Causalprincip als eine apriorische Wahrheit gelten zu lassen, wodurch der Obersatz des Mill'schen Inductionsschlusses seines zweifelhaften Charakters entkleidet wurde. Noch häufiger aber zog man es vor, zu der Aristotelischen Ansicht zurückzukehren und nur der vollständigen Induction eine vollkommen bindende Kraft zuzugestehen, eine Auffassung, welche nebenbei leicht mit der vorigen zu vereinigen war*).

*) So bei Apelt (Theorie der Induction, Leipzig 1854), der übrigens jeden disjunctiven Schluss zur Induction zählt und daher, wie schon früher (Bd. I, S. 335) erwähnt, die Inductions- und Wahrscheinlichkeitsschlüsse zusammenwirft.

Unter allen diesen Ansichten, welche die Form des Aristotelischen Syllogismus möglichst für die Induction zu bewahren suchen, wird diejenige der specifisch-logischen Form derselben am meisten gerecht, welche, wie es von *Jevons* und *Sigwart* geschieht, jede Induction als eine *Umkehrung* des gewöhnlichen subsumirenden Syllogismus der ersten Figur betrachtet. Denn diese Ansicht erfasst in der That vollkommen richtig das schematische Verhältniss der Induction zu der auf den Subsumtionsschluss zurückführenden Deduction*). Wir schliessen nämlich in einfachster Form

$$\begin{array}{ccc} \text{inductiv:} & \qquad & \text{deductiv:} \\ S \frown P & & M \frown P \\ S \frown M & & S \frown M \\ \hline M \frown P & & S \frown P \end{array}$$

Der Mittelbegriff des inductiven Schlusses wird also zum Subjectbegriff der Deduction, und der Prädicatbegriff irgend einer der Prämissen des ersteren wird zum Mittelbegriff des letzteren. Aber die Analogie mit den inversen Operationen der Mathematik ist insofern keine vollständige, als die Induction keineswegs etwa den Subsumtionsschluss *voraussetzt*. (Vgl. Bd. I, S. 353.) Weder die logische Form der Induction noch die in ihr herrschende Gedankenrichtung würde eine solche Auffassung rechtfertigen. Was die erstere betrifft, so ist nicht einzusehen, warum unter den Urtheilscombinationen die dem Subsumtionsschema entsprechende früher vorkommen sollte als eine andere. Noch weniger aber lässt sich behaupten, dass die fundamentalen logischen Acte der Vergleichung ähnlicher Objecte und der Verbindung übereinstimmender Fälle abhängig seien von der Function der Unterordnung und daher der letzteren erst nachfolgen könnten.

Die elementare logische Form der Induction ist, wie das oben gegebene Schema zeigt, der *Verbindungsschluss* oder der Schluss der *dritten* Aristotelischen Figur. Er ist am nächsten verwandt dem *Vergleichungsschluss*, dem Schluss der zweiten Figur, welcher der Methode der *Abstraction* zu Grunde liegt. Während dieser letztere durch Umkehrung in den classificirenden Subsumtionsschluss $S \frown M$, $M \frown P$, $S \frown P$ übergeht, wandelt sich der erstere durch die gleiche Operation in den exemplificirenden Subsumtionsschluss um: $M \frown P$, $S \frown M$, $S \frown P$. (Bd. I, S. 299.) Diese Umwandlungsproducte unterscheiden sich von den ursprünglichen Formen wesentlich dadurch, dass die letzteren *mehrdeutige* Schlüsse sind. (Ebend.

---

*) *Jevons*, Principles of science. 2. edit. p. 122, 218. *Sigwart*, Logik II, S. 250, 356.

S. 345 f.) Bei der Abstraction äussert sich diese Mehrdeutigkeit in der freien Auswahl der Merkmale, die zur Constitution des allgemeinen Begriffes bestimmt sind, und ihr äusseres Symptom ist die Willkürlichkeit der Benennung. Bei der Induction kommt sie in der Unbestimmtheit der Beziehung zum Vorschein, welche zwischen den im Schlussurtheil verbundenen Begriffen besteht. Diese Unbestimmtheit aufzuheben und dadurch zu allgemeinen Sätzen von apodiktischer Geltung zu gelangen, ist die Hauptaufgabe der inductiven Methode.

### b. Die Induction als Methode.

Die inductive Methode bedient sich bei der Lösung ihrer Aufgaben zweier wesentlich von einander verschiedener Verfahrungsweisen. Erstens sucht sie durch eine mannigfach wechselnde Benützung der analytischen und synthetischen Methode die Deutungen der Thatsachen zu beschränken. Zweitens nimmt sie eine einzelne Deutung, die sich ihr als möglich darbietet, hypothetisch als wirklich geltend an, um die daraus sich ergebenden Folgerungen zu entwickeln und an der Erfahrung zu prüfen. Auf diese Weise können successiv verschiedene Hypothesen untersucht werden, damit man schliesslich diejenige zurückbehalte, die sich durch ihre Uebereinstimmung mit den Thatsachen am meisten empfiehlt. Unter diesen beiden Hülfsmethoden gehört nur die erste vollständig der Induction an; die zweite besitzt in ihrem ganzen Verlauf bereits den Grundcharakter der Deduction, und nur insofern, als sie sich in eine zusammenhängende Induction einschiebt und bei der Prüfung der Thatsachen sich durchaus auf inductive Hülfsmittel stützt, kann sie noch zu den Bestandtheilen der Induction gerechnet werden. Immerhin macht dieser Umstand häufig eine scharfe Trennung der beiden Methoden unmöglich, so dass man bei ihrer Unterscheidung zunächst auf die Gesammtrichtung der Untersuchung Rücksicht zu nehmen hat.

Als das Resultat einer Induction ergiebt sich stets ein allgemeiner Satz, welcher die einzelnen Thatsachen der Erfahrung, die zu seiner Ableitung gedient haben, als specielle Fälle in sich enthält. Einen solchen Satz nennen wir ein Gesetz. Wie die Constanz der Objecte unserer Beobachtung die Bedingung ist für die Abstraction von Gattungsbegriffen, so ist die Regelmässigkeit des Geschehens die Bedingung für die Induction von Gesetzen. Aber diese Bedingung spielt weder die Rolle einer Prämisse, die sich an jeder Induction betheiligt, noch begründet sie die Annahme, dass die Absicht einer Subsumtion unter Gesetze allen Inductionen vorausgehe. Vielmehr ist jene Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte so gut wie die Existenz derselben ein thatsächliches Verhalten, welches durch das Gelingen unserer Abstractionen und Inductionen wirklich erprobt werden muss, durch welches Erproben dann erst die weiterhin alle wissenschaftliche Forschung lenkende Maxime des durchgängigen Zusammenhangs der

Erfahrungen entsteht. So kommt hier abermals das allgemeine Princip zur Geltung, dass die logischen Gesetze unseres Denkens zugleich die Gesetze der Objecte des Denkens sind. (Bd. I, S. 82, 504 f.)

Nach dem Grad der Allgemeinheit, welche die durch einzelne Verbindungsschlüsse gewonnenen Gesetze besitzen, können wir nun drei Stufen der Induction unterscheiden: 1) die Auffindung empirischer Gesetze, 2) die Verbindung einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen, und 3) die Ableitung von Causalgesetzen und die logische Begründung der Thatsachen.

Bei der Auffindung empirischer Gesetze entfernt sich der logische Vorgang noch wenig von dem einfachen Verbindungsschlusse, den wir oben als Grundform der Induction kennen lernten. Wie wir jedoch bei der Abstraction der Gattungsbegriffe uns nicht damit begnügen, die Zusammengehörigkeit gewisser Objecte zu behaupten, sondern einen Begriff bilden, in welchem diese Zusammengehörigkeit unmittelbar realisirt ist, so drücken wir bei der Induction sofort die nähere Art der Beziehung, die zwischen den Prädicaten A und B zweier auf die nämliche Erscheinung M sich beziehender Verbindungsurtheile stattfindet, in der Form eines Bedingungsurtheils aus, welches auf ein Verhältniss regelmässiger Gleichzeitigkeit oder Aufeinanderfolge hinweist: »Wenn A stattfindet, so findet auch B statt.« Zur Entscheidung der Frage, welches unter den verbundenen Elementen A und B Bedingung oder Folge sei, besitzen wir zwei Kriterien, die unmittelbar theils aus dem logischen Verhältniss von Grund und Folge, theils aus den früher erörterten anschaulichen Grundlagen des Causalbegriffs sich ergeben. (Bd. I, S. 536.) Das Glied A nämlich ist dann Bedingung und nicht Folge, wenn 1) der Eintritt von A regelmässig den von B mit sich führt, aber nicht umgekehrt, und wenn 2) im zeitlichen Verlauf der Erscheinungen A dem B vorausgeht oder, falls es sich um permanente Erscheinungen handelt, wenn der ursprüngliche Eintritt von A als ein dem B vorausgehendes Ereigniss gedacht werden kann. (Bd. I, S. 542.) Trifft das erste Kriterium und der letzte Theil des zweiten sowohl für A wie für B zu, so handelt es sich um ein Verhältniss der Wechselwirkung.

Ein auf solche Weise aufgestelltes empirisches Gesetz enthält nun noch keine Causalbeziehung, sondern nur die Aussage über einen regelmässigen räumlichen oder zeitlichen Zusammenhang von Erscheinungen. Dies schliesst nicht aus, dass wir nicht gelegentlich auch solche Gesetze bloss empirisch formuliren, welche auf einen Causalzusammenhang zurückgeführt werden können, sobald wir nur aus irgend welchen Gründen von dem letzteren abstrahiren wollen. Wir begeben uns dann aber eigentlich auf einen Standpunkt zurück, welcher der Unterordnung gewisser empirischer Verbindungen unter ein Causalverhältniss vorausgieng. So in den Beispielen: »Der Fallraum ist beim freien Fall proportional dem Quadrat der Fallzeit«, »die Schwingungen eines Pendels sind isochronisch«, »die Erde bewegt sich in einer Ellipse um die Sonne«. Bei der Aufstellung solcher Gesetze

können wir, wie diese Beispiele zeigen, leicht der Form des Bedingungsurtheils entbehren. Wo wir aber die letztere einführen, da geschieht dies regelmässig in solcher Weise, dass als Bedingung lediglich die Constellation von Umständen aufgeführt wird, unter denen eine bestimmte Thatsache zur Beobachtung kommt.

Die Verbindung einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen besteht in der Herstellung einer allgemeinen Form, welche mehrere einzelne empirische Gesetze als Specialfälle unter sich begreift. Während die erste Auffindung dieser Specialgesetze auf mannigfache Anwendungen der analytischen und synthetischen Methode sich stützt, so beruht die Gewinnung allgemeinerer Erfahrungsgesetze auf einem Abstractionsverfahren, das als eine eigenthümliche Form der Generalisation sich darstellt. Ganz in derselben Weise wie die Generalisation von Begriffen zu allgemeineren Gattungsbegriffen, so führt die Generalisation einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen. Auch die hierzu erforderlichen logischen Operationen sind von verwandter Art. Denn die Generalisation der Gesetze eliminirt die variablen und darum minder allgemeinen Bestandtheile der einzelnen Gesetzmässigkeiten, um die constanten und gemeinsamen zurückzubehalten. So sind das Mariotte'sche Gesetz der Reciprocität von Druck und Volum der Gase sowie das Gesetz, dass sich die Gase nach einfachen Volumverhältnissen chemisch verbinden, durch eine Verallgemeinerung der für die einzelnen Gase festgestellten Volumgesetze entstanden. Die beiden ersten Kepler'schen Gesetze sind Generalisationen aus den Bewegungsgesetzen der einzelnen Planeten, während das dritte Gesetz, das sich auf das Verhältniss der Umlaufszeiten zu den mittleren Entfernungen von der Sonne bezieht, aus einer Anzahl von Einzelgesetzen abstrahirt ist, die durch Vergleichung der Umlaufszeiten und Entfernungen je zweier Planeten gewonnen wurden.

Die Aufstellung empirischer Gesetze in den bisher besprochenen beiden Stadien ihrer Entwicklung vollzieht sich in genauem Anschlusse an beobachtete Thatsachen. Die Gesetze enthalten in ihrem Ausdruck nur eine Verallgemeinerung des Zusammenhangs der Thatsachen selbst, ohne dass denselben ein weiterer Begriff hinzugefügt wäre. Sie weichen nur darin von den Thatsachen ab, dass in beiden Stadien eine wesentliche Betheiligung des Abstractionsverfahrens stattfindet, da bereits bei den einfachen empirischen Gesetzen von den Schwankungen der einzelnen Beobachtungen und dann bei den durch Generalisation gewonnenen wiederum von den Besonderheiten der einzelnen empirischen Gesetze abstrahirt ist. Bloss insofern lässt ein principieller Einfluss auf dieses Abstractionsverfahren sich nachweisen, als durchweg das Bestreben sich geltend macht, die einzelnen Beobachtungen zu Gunsten möglichst regelmässiger allgemeiner Beziehungen zu verbessern. Aber so zweifellos es ist, dass der Feststellung der meisten Erfahrungsgesetze die Voraussetzung einer bestimmten Regel-

mässigkeit bereits vorangieng, so boten sich doch anderseits für diese Voraussetzung in den einfachsten Formen des Geschehens hinreichende Anhaltspunkte, um dieselbe zugleich vom empirischen Standpunkte aus als gerechtfertigt erscheinen zu lassen; und oft genug musste im Einzelnen die vorschnelle Formulirung eines Gesetzes wieder aufgegeben werden, weil die genaue Controle der Beobachtungshülfsmittel keine genügende Uebereinstimmung mit den Thatsachen erzielen liess, so dass dennoch schliesslich die Erfahrung als die allein entscheidende Instanz für die Gültigkeit eines Erfahrungsgesetzes stehen bleibt.

Dieser Standpunkt wird nun verlassen bei der Ableitung von Causalgesetzen. Denn hier wird stets dem Ausdruck der beobachteten Thatsachen, welche das Erfahrungsgesetz enthält, ein Begriff hinzugefügt, welcher selbst nicht in der thatsächlichen Beobachtung gegeben ist, aber geeignet erscheint, gewisse in regelmässiger Beziehung stehende Thatsachen zusammenzufassen. Der so ergänzte Begriff ist eine Specialisirung des allgemeinen Causalbegriffs, und er verleiht daher dem betreffenden Gesetze den Charakter eines speciellen Causalgesetzes. Insofern die Formulirung des letzteren, eben desshalb weil sie über den Thatbestand unmittelbarer Erfahrung hinausgeht, stets mit einer gewissen Willkür geschieht, welche andere Formulirungen nicht absolut ausschliesst, ist dieser Vorgang durchaus demjenigen verwandt, in welchem die Abstraction von Gattungsbegriffen in Folge der willkürlichen Bevorzugung bestimmter Gattungsmerkmale sich abschliesst. Auch bei der Induction von Causalgesetzen prägt dieser Charakter sich aus in der Willkürlichkeit der Benennung der gewonnenen Causalbegriffe, an welche sodann die Causalgesetze in Form von Definitionen solcher Begriffe sich anschliessen. So ergab sich für Newton aus den Kepler'schen Gesetzen die causale Definition der Gravitation als einer von der Sonne ausgehenden und auf alle Planeten nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen wirkenden Kraft, oder für Dalton aus dem empirischen Gesetz der Verbindung nach festen Gewichtsverhältnissen die causale Definition der chemischen Affinität als einer zwischen Atomen von constanten Eigenschaften stattfindenden und bestimmte Lagerungsverhältnisse derselben herbeiführenden Anziehungskraft. Da alle Naturcausalität zurückbezogen wird auf die materielle Substanz als ihren Träger, so ist diese Aufstellung von Causalgesetzen unmittelbar verbunden mit der Entwicklung bestimmter Kraftbegriffe. Für jeden der letzteren sucht man wo möglich ein fundamentales Kraftgesetz zu gewinnen, aus welchem die einzelnen causalen und empirischen Gesetze eines bestimmten Gebietes abgeleitet werden können. Wie aber das Streben nach Verbindung des Mannigfaltigen schon bei den empirischen Gesetzen zur Abstraction allgemeiner Erfahrungsgesetze führte, so veranlasst es hier zur Aufsuchung allgemeinerer Kraftbegriffe und ihnen entsprechender Causalgesetze.

Den physischen Causalgesetzen, auf welche die naturwissenschaftliche

Induction hinleitet, stehen im Gebiete der Geisteswissenschaften psychologische Causalgesetze gegenüber. Es ist aber charakteristisch, dass hier dieser letzte Schritt des Inductionsverfahrens nur von der Psychologie selbst geschehen kann, während die von ihr abhängigen Gebiete, wie die Gesellschaftslehre, Sprachwissenschaft, Mythologie u. s. w., bloss zur Aufstellung empirischer Gesetze gelangen, welche erst eine causale Form annehmen, wenn sie einem der reinen Psychologie angehörigen Causalgesetze subsumirt werden. So kann z. B. durch statistische Ermittelungen festgestellt sein, dass mit der Erhöhung der Getreidepreise die Zahl der Geburten und Eheschliessungen abnimmt. Die Zurückführung dieser empirischen Regel auf ein Causalgesetz ist aber nur möglich, insofern man dasselbe etwa als einen speciellen Fall des allgemeinen psychologischen Gesetzes betrachtet, dass, sobald in unserm Bewusstsein ein einzelner Trieb, wie der Selbsterhaltungstrieb, über seine normale Intensität gesteigert wird, die übrigen Triebe eine entsprechende Abnahme erfahren. Es entspricht übrigens dieses Verhältniss durchaus demjenigen der Naturwissenschaften zur Physik, wenn man die Aufgabe der letzteren in jenem allgemeinen Sinne bestimmt, in welchem Chemie und Biologie ihre Theile bilden. Auch schliesst dasselbe keineswegs aus, dass Thatsachen, die den speciellen Geisteswissenschaften angehören, die Auffindung psychologischer Causalgesetze veranlassen. Nur ist zur Aufstellung derselben immer die subjective Erfahrung ein nothwendiges Erforderniss.

Vermöge jener Willkür, welche bei der Aufstellung der Causalgesetze stattfindet, enthalten diese stets ein hypothetisches Element, das um so deutlicher hervorzutreten pflegt, von je allgemeinerem Charakter sie sind. Dass die Planeten von der geradlinigen Bewegung in der Richtung gegen die Sonne hin abweichen, ist eine Thatsache der Erfahrung; dass aber diese Abweichung durch eine von der Sonne ausgehende Anziehungskraft vermittelt wird, ist eine hypothetische Voraussetzung. Auf diese Weise ist in einem Causalgesetz immer dasjenige Thatsache der Erfahrung, was dem empirischen Gesetz angehört, aus dem es hervorgieng. Aber der logische Nutzen der causalen Formulirung ergiebt sich daraus, dass dieselbe auch dem empirischen Inhalt des Gesetzes eine einfachere und allgemeinere Gestalt giebt, wie dies die Vergleichung der Kepler'schen Gesetze mit dem Newton'schen deutlich macht. Jener hypothetische Charakter veranlasst ausserdem, nach weiteren Hypothesen zu suchen, welche entweder zur Veranschaulichung der Erscheinungen oder zur Vereinfachung der Erklärungen dienlich sind. So liegt es z. B. nahe, der Gravitationskraft ein materielles Substrat zu leihen, dessen Bewegungen die Fernewirkungen der Weltkörper veranschaulichen. Auf diese Weise sind überhaupt alle Annahmen über die Materie und ihre Bewegungsformen Hypothesen, die unmittelbar aus Anlass bestimmter Causalgesetze und zum Behuf einer tieferen Begründung und theoretischen Verwerthung derselben aufgestellt wurden.

Eine weitere wichtige Folge der theilweise hypothetischen Natur der

Causalgesetze ist, dass sie es möglich macht, Sätze aufzustellen, die auch in Bezug auf den Inhalt der unter ihnen enthaltenen Erfahrungsgesetze noch hypothetisch, aber einer Prüfung zugänglich sind, durch welche dann die Causalgesetze selbst bestätigt werden können. So hat z. B. Galilei die Fallgesetze nicht durch Induction gefunden, sondern theils bediente er sich dabei der isolirenden Abstraction, indem er alle begleitenden Nebenumstände der Versuche in seiner Anschauung des Vorgangs zu eliminiren wusste; theils aber bestand sein Verfahren in der Erfindung von Hypothesen und in der Vergleichung der Folgerungen aus diesen Hypothesen mit der Erfahrung. In allem diesem findet die innige Beziehung der Deduction zur Induction ihren Ausdruck. Fast immer sucht die erstere das Geschäft der letzteren abzukürzen, indem sie sich namentlich an der Entwicklung causaler Gesetze aus einzelnen empirischen Gesetzen betheiligt; zuweilen tritt sie aber auch, wie das letzte Beispiel zeigt, von Anfang an für dieselbe ein, indem eine auf die unmittelbare Abstraction aus der Wahrnehmung gegründete Annahme zu deductiven Entwicklungen Anlass geben kann, durch deren nachträgliche Bestätigung dann die ursprünglich fehlende Induction ersetzt wird.

### c. Die Deduction.

Die deductive Methode kann entweder an eine vorangegangene Induction anknüpfen oder unabhängig von einer solchen als selbständiges Verfahren auftreten. Weder aber pflegt sie im ersten Fall in einer blossen Umkehrung zu bestehen, da sie in der Regel zu Nebenresultaten führt, die nicht durch die vorangegangene Induction gefunden wurden; noch fehlt im zweiten Fall ganz und gar die inductive Grundlage, sondern diese gehört entweder den gewöhnlichen Thatsachen der Sinneswahrnehmung oder einem anderen Gebiet wissenschaftlicher Untersuchungen an. Nicht selten würden an sich für die Gewinnung eines gegebenen complexen Resultates beide Wege, der inductive und der deductive, möglich sein, und es hängt dann von zufälligen Ausgangspunkten und Gedankenrichtungen ab, welcher von ihnen wirklich gewählt wird. So hat Galilei die Fallgesetze durch Deduction gefunden; eine inductive Entdeckung derselben würde sich aber ebenso leicht denken lassen. Umgekehrt ist Newton zu dem Gravitationsgesetz durch Induction gelangt; es wäre aber ebenso gut möglich gewesen, dass er dasselbe zuerst als Hypothese aufgestellt und dann daraus die Keplerschen Gesetze deducirt hätte, wie solches gegenwärtig in der theoretischen Astronomie zu geschehen pflegt. In der That hat Newton selbst schon bei einer einzelnen für seine Theorie sehr wichtigen Frage den Weg der Deduction eingeschlagen, bei der Frage nämlich, ob die Kraft, welche den Mond von der geradlinigen Bahn abzieht, mit der irdischen Schwere identisch sei*). Die Deduction hat vor der Induction in allen Fällen den Vorzug,

*) Mathemat. Principien der Naturphilosophie, 3. Buch, 1. Abschnitt.

dass sie sofort alle Folgerungen aus den an die Spitze gestellten Principien ableiten kann, während bei der Induction häufig, wie das zuletzt angeführte Beispiel zeigt, sehr wichtige Resultate durch hülfsweise eintretende Deductionen nachgeholt werden müssen. Hieraus erklärt sich das durchgängig namentlich in den Naturwissenschaften hervorgetretene Streben, die Deduction zur bevorzugten Methode zu erheben. Ausserdem hat in diesem Fall das Beispiel der Mathematik und der abstracten Mechanik mitgewirkt, in denen die Induction wegen der einfachen Anschauungsgrundlagen, die hier massgebend sind, verhältnissmässig zurücktritt. Dagegen besitzt die inductive vor der deductiven Methode den nicht zu unterschätzenden Vorzug, dass sie die hypothetischen Causalgesetze, in denen schliesslich beide Methoden gipfeln, gründlicher vorbereitet, und dass sie daher den bei einseitig gepflegter Deduction namentlich gegenüber verwickelteren Problemen so oft begangenen Fehler unzureichender Voraussetzungen vermeiden hilft. Es ist charakteristisch, dass gerade aus diesem Grunde in diametralem Gegensatze zu der gegenwärtigen Tendenz der Naturforschung auf manchen Gebieten der Geisteswissenschaften der Ruf nach einer umfassenderen Anwendung der Induction laut geworden ist. Besonders innerhalb der nationalökonomischen und historischen Forschung liegt es nahe, von einzelnen beschränkten Erfahrungen aus und unter Zuhülfenahme allgemein anerkannter psychologischer Thatsachen eine Deduction zu versuchen. Es ist daher begreiflich, dass hier zunächst diese überwiegt, und dass erst allmälig das Bedürfniss nach einer gründlicheren Anwendung der inductiven Methode rege wird.

Da die Deduction, mag sie nun eine Umkehrung einer vorangegangenen Induction sein oder nicht, regelmässig mit denjenigen Gesichtspunkten anfängt, bei welchen die Induction aufzuhören pflegt, so bildet bei ihr die Aufstellung causaler oder logischer Beziehungen den Ausgangspunkt der Entwicklung. Von diesem Ausgangspunkt ist der Verlauf der Deduction abhängig, welcher demnach entweder einen causalen oder einen rein logischen Charakter besitzt. Diese Unterscheidung trifft jedoch mehr die äussere Gestalt als das Wesen der Methode selbst. Denn wie das Causalprincip überhaupt sich betrachten lässt als eine Anwendung des logischen Satzes vom Grunde auf den Inhalt der Erfahrung, so ist auch die causale Deduction lediglich eine Verbindung causaler Gesetze durch Schlussoperationen, wobei sich dann die ersteren durch die letzteren in Erkenntnissgründe für die empirischen Erscheinungen umwandeln. Am augenfälligsten wird dies, wenn die causale Deduction eine mathematische Einkleidung zulässt, wie solches z. B. im Gebiete der theoretischen Physik der Fall ist. Die abstracte Form, welche hierbei die Naturgesetze annehmen, würde ebenso gut auf einen rein logischen Zusammenhang von Grössenbegriffen bezogen werden können. So bleibt als der wesentliche Unterschied beider Fälle nur das verschiedene Anwendungsgebiet übrig, indem die causale Deduction in den Erfahrungswissenschaften, die logische dagegen in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften die herrschende ist.

Bedeutsamer sind diejenigen Unterschiede, die aus der verschiedenen Richtung der logischen Operationen entspringen. Ihnen entsprechen zwei Hauptmethoden, die wir als die synthetische und als die analytische Deduction unterscheiden können. In der ersteren herrscht die Synthese, in der zweiten die Analyse als elementarere Methode vor. Die Namen dieser Hauptformen weisen daher zugleich schon auf einen beachtenswerthen Unterschied der deductiven von der inductiven Methode hin. Während in der letzteren Analyse und Synthese in wechselnder Weise, wenn auch in der Regel mit einem gewissen Uebergewicht der ersteren, zur Anwendung kommen, pflegt die Deduction an der einen oder der anderen vom Anfang bis zu Ende festzuhalten. Hierin verräth sich der auch sonst zur Geltung kommende strengere Gang des deductiven Verfahrens. Die synthetische Deduction ist aber hier voranzustellen, weil die Synthese bei der Deduction, im Gegensatze zu ihren sonstigen Anwendungen, als das näher liegende und daher im Ganzen ursprünglichere Hülfsmittel angesehen werden muss.

Die synthetische Deduction geht von einfachen Sätzen von allgemeiner Geltung aus und leitet aus der Verbindung derselben andere Sätze von speciellerem und meist zugleich verwickelterem Charakter ab. Zu dieser Ableitung dient ihr der Subsumtionsschluss, theils in seiner einfachen kategorischen Form, theils aber und vorzugsweise häufig in der Gestalt des subsumirenden Bedingungsschlusses. Regelmässig sind es verwickelte syllogistische Formen, auf welche in dieser Weise die synthetische Deduction zurückführt: Kettenschlüsse und Schlussverzweigungen, deren Conclusionen oft zu neuen Schlüssen verbunden werden, um das gewünschte Resultat zu erzielen.

Die synthetische Deduction ist aber nicht bloss, wie es nach dieser äusseren Beschreibung derselben scheinen könnte, eine zusammengesetzte Form des subsumirenden Syllogismus, sondern ihre fruchtbare Anwendung beruht vor allem auf einigen weiteren Eigenschaften, die sich zwar nicht so leicht wie die übrigen in allgemeingültiger Weise beschreiben lassen, die aber gerade desshalb, weil sie in einer sehr wechselnden, überall den besonderen Bedingungen sich anpassenden Form zur Geltung kommen, die methodischen Vorzüge dieser Deduction ausmachen. Namentlich sind zwei Eigenschaften dieser Art hervorzuheben. Die erste besteht in dem verschiedenartigen Charakter der allgemeinen Sätze, welche als Prämissen der Deduction dienen, die andere in den Hülfsverfahren, deren jede Deduction bedarf.

Die Prämissen der synthetischen Deduction bestehen zur einen Hälfte in exacten Beschreibungen oder Erklärungen der Begriffe oder Thatsachen, auf welche sich die Deduction bezieht, zur anderen in Erklärungen über bestimmte Relationen von allgemeingültiger Art, die zwischen den in Betracht kommenden Begriffen oder Thatsachen bestehen. Die Sätze der ersten Art werden innerhalb der systematischen Darstellungs-

formen der Deduction als Definitionen, die der zweiten als Theoreme oder als Axiome bezeichnet, wobei man unter den letzteren speciell solche Theoreme versteht, die nicht aus anderen deducirt werden können, sondern als ursprünglich in der Anschauung oder in den Eigenschaften der Begriffe gegebene Relationen gelten müssen. Ist die Deduction eine principielle, d. h. setzt sie in keiner Beziehung vorangegangene Deductionen voraus, so scheiden sich demnach die Prämissen derselben regelmässig in Definitionen und Axiome. Keiner dieser Bestandtheile kann entbehrt werden. Eine Schlussfolgerung aus lauter Definitionen oder aus lauter Axiomen ist keine methodische Deduction mehr, sondern ein gewöhnlicher Syllogismus oder Kettenschluss, da in diesem Falle regelmässig auch jene Hülfsverfahren unmöglich werden, welche das zweite Kennzeichen der synthetischen Deduction ausmachen. Hierin zeigt sich zugleich, dass diese beiden Eigenschaften nothwendig zusammenhängen. Fallen sie hinweg, so bleibt bloss die formale Aussenseite des syllogistischen Verfahrens zurück, welches an sich nur eine Unterordnung gegebener Sätze unter andere gegebene Sätze oder eine Umformung vermittelst der Substitution äquivalenter Begriffe, niemals eine Deduction neuer Sätze gestattet. Wohl aber kann es vorkommen, dass Definitionen oder selbst Axiome nicht ausdrücklich formulirt, sondern stillschweigend vorausgesetzt werden. Dies geschieht namentlich bei geläufigen Anschauungen oder Begriffen, deren Definitionen man als bekannt annimmt, oder in Bezug auf die Axiome bei solchen Sätzen, die sich durch eine nahe liegende Umformung aus den vorhandenen Definitionen ergeben. Ein nicht seltener Fall endlich ist es, dass einzelne der als Grundlagen der Deduction dienenden Definitionen oder Axiome einen hypothetischen Charakter besitzen, sei es nun, dass sie auf willkürlicher Begriffsbildung beruhen, wie in manchen Gebieten der speculativen Mathematik, sei es, dass sie aus dem Bedürfniss hervorgegangen sind, für gewisse empirische Thatsachen eine verknüpfende Voraussetzung zu finden, wie solches in den Theorien der Erfahrungswissenschaften gewöhnlich stattfindet. Es versteht sich von selbst, dass dann auch die Resultate der Deduction hypothetisch werden; doch kann im zweiten der angeführten Fälle die Vergleichung mit der Erfahrung oder mit parallel laufenden Inductionen die Folgerungen und dadurch auch indirect die ursprünglichen Voraussetzungen bestätigen.

Als Hülfsverfahren der synthetischen Deduction können Begriffsanalysen, Constructionen und experimentelle Verfahrungsweisen in Anwendung kommen. Unter ihnen schliesst sich die Begriffsanalyse am nächsten an den unmittelbaren Gang der Deduction selbst an, indem sie lediglich durch Zerlegung eines in dem Schlussverfahren verwendeten Begriffs die Gewinnung bestimmter Resultate vermittelt. Ihrer Hülfe bedienen sich naturgemäss vorzugsweise Wissenschaften von streng begrifflichem und logischem Charakter, wie Philosophie und Rechtswissenschaft, wogegen die Construction eine anschauliche Darstellung der Begriffe und das Experi-

ment sogar empirisch gegebene Objecte voraussetzt, deren gegenseitige Beziehungen wir aber willkürlich verändern können. Die Construction ist daher das hauptsächlichste Werkzeug der mathematischen Deduction. Sie besteht hier nicht nur in den mannigfaltigen Formen der geometrischen Construction, sondern in einem weiteren Sinne sind ihr auch alle diejenigen Verfahrungsweisen der Analysis unterzuordnen, bei denen man Hülfsgrössen und Hülfsfunctionen zur Lösung bestimmter Probleme anwendet. Denn da sich alle diese Operationen mit Hülfe geometrischer Constructionen veranschaulichen lassen, so können sie selbst offenbar als logische Formen der Construction betrachtet werden, indem man den Begriff der letzteren so erweitert, dass er nicht nur die willkürliche Erzeugung und Combination von Gebilden der reinen Anschauung, sondern auch von Begriffen, die solchen Gebilden entsprechen, enthält. Der Construction nahe verwandt ist endlich das experimentelle Verfahren. Insbesondere theilen beide mit einander das Merkmal der Willkür, welcher letzteren freilich durch die objectiven Bedingungen dort der Gesetze der Anschauung, hier der Erfahrung bestimmte Schranken gesetzt sind. Der Unterschied des experimentellen Verfahrens von der eigentlichen Construction liegt aber wesentlich darin, dass diese Schranken bei jenem engere sind als bei dieser. Denn die Erfahrung ist nicht nur auf das strengste gebunden an die unveränderlichen Gesetze der Anschauung, sondern sie wird auch ausserdem von dem nach Ort und Zeit veränderlichen Inhalt dieser Anschauung bestimmt. Das Experiment vermag daher nur theils Erscheinungen herbeizuführen, deren Verlauf den objectiv gegebenen Bedingungen überlassen bleibt, theils aber auch in einen gegebenen Verlauf von Ereignissen durch die Veränderung dieser Bedingungen verändernd einzugreifen.

Die analytische Deduction besitzt entweder einen rein logischen oder einen causalen Charakter. Das erstere ist der Fall in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften, das letztere in den Erfahrungswissenschaften. Hier wie dort gehen der analytischen Deduction synthetische Operationen voraus, die, theils in genetischen Constructionen, theils in der Verbindung einzelner Wahrnehmungen bestehend, das Material für die nachfolgende Deduction herbeischaffen. Für diese selbst ist die allgemeine Bezeichnung der Begriffe, wie sie aus der algebraischen Symbolik in alle Gebiete der Mathematik und ihrer empirischen Anwendungen übergegangen ist, ein besonders wirksames Hülfsmittel. Denn indem dieselbe die Beziehungen der Einzelbegriffe und die Schlussoperationen, die sich aus denselben ergeben, deutlich übersehen lässt, legt sie von selbst eine Form der Deduction nahe, bei der alle Ergebnisse sich als Folgerungen darstellen, die in den anfänglich aufgestellten Sätzen bereits enthalten sind und daher zu ihrer Gewinnung nur einer geeigneten Analyse dieser Sätze bedürfen. Eine deductive Analyse dieser Art umfasst aber, wie namentlich das Beispiel der Mathematik zeigt, drei wesentlich verschiedene Operationen, die in der mannigfaltigsten Weise in einander eingreifen können.

Die erste dieser Operationen besteht in der Zerlegung eines allgemeinen Begriffs in seine Bestandtheile. Wenn die Begriffszerlegung schon bei der synthetischen Deduction als ein wichtiges Hülfsverfahren in Anwendung kommt, so ist sie bei der analytischen um so unentbehrlicher, als hier zum grossen Theil auf ihrer vorwaltenden Benützung der analytische Charakter der Methode beruht. In der Zerlegung eines arithmetischen Ausdrucks in seine Factoren, einer Function in eine Reihe oder in eine Anzahl elementarerer Functionen, eines complexen Bewegungsgesetzes in eine Anzahl einfacherer Gesetze, eines zusammengesetzten Rechtsbegriffs in die ihn constituirenden Elemente begegnen uns verschiedenartige Beispiele dieses Verfahrens.

Als zweite Fundamentaloperation schliesst sich hieran der Uebergang von einem allgemeinen zu einem in ihm enthaltenen engeren Begriffe oder von einem allgemeinen Gesetze zu einem speciellen Fall desselben. So entwickelt z. B. die analytische Deduction aus dem Begriff der bürgerlichen Gesellschaft den des Staates, aus der allgemeinen Form des Newton'schen Potentials den Begriff des elektrischen Potentials u. dergl. In der mathematischen Symbolik vollzieht sich ein derartiger Uebergang stets in der Form einer Substitution einzelner bestimmter Werthe für solche, die in dem allgemeinen Ausdruck der Begriffe unbestimmt gelassen sind. Den Charakter der Analyse besitzt dieses Verfahren, insofern auch hier der durch dasselbe gewonnene engere Begriff in dem ursprünglich gegebenen enthalten ist. Der Unterschied von der einfachen Begriffszerlegung liegt aber darin, dass die Analyse in diesem Fall erst durch die begleitende Substitution ermöglicht wird.

Die dritte, häufig mit der vorigen nahe verbundene Operation besteht endlich in der Transformation gegebener Begriffe mittelst einer veränderten Verbindungsweise ihrer Elemente, wobei aber die neue Verbindung in der ursprünglichen vorgebildet sein muss, so dass sie aus ihr durch eine Reihe zwingender Schlussfolgerungen abgeleitet werden kann. So gewinnt man mittelst passender Transformationen arithmetischer Gleichungen die in ihnen enthaltenen unbekannten Grössen. Eine Gleichung, die analytischer Ausdruck einer geometrischen Curve oder eines allgemeinen Naturgesetzes ist, lässt durch solche Transformationen andere Ausdrücke entstehen, aus deren Interpretation sich specielle Eigenschaften der vorgelegten Curve oder einzelne Folgesätze des betreffenden Naturgesetzes ergeben. Nicht selten tritt zu dieser Transformation noch eine Combination verschiedener Begriffe, die gewisse Elemente mit einander gemein haben, hinzu: Man combinirt z. B. die Gleichungen zweier Curven, um daraus die Bedingungen für die Schnitt- und Berührungspunkte derselben abzuleiten, oder man verbindet mehrere einfache Bewegungsgesetze, um eine zusammengesetzte Bewegungsform zu gewinnen. Handelt es sich bei diesem Combinationsverfahren um ein Hereinragen der synthetischen Methode in die analytische Deduction, so lässt dagegen das Transformationsverfahren an

und für sich, ebenso wie das Substitutionsverfahren, lediglich als eine unter speciellen Nebenbedingungen stattfindende Begriffszerlegung sich auffassen. Diese Nebenbedingungen bestehen hier darin, dass erst die Ausführung bestimmter Aenderungen in der Anordnung der Begriffselemente, welche in der Natur derselben ihre Rechtfertigung finden, die für die Deduction erforderlichen Schlussoperationen ermöglicht.

Die analytische Deduction eignet sich ihrem ganzen Charakter nach vorzugsweise für solche Gebiete, bei denen die Untersuchungsobjecte von zusammengesetzterer Beschaffenheit nicht in dem Auftreten neuer Elemente der Erkenntniss ihre Quelle haben, sondern lediglich durch eine mehrfache Anwendung gewisser gleichförmig wiederkehrender logischer Operationen aus den einfacheren hervorgehen. Auf keinem Gebiet trifft diese Bedingung vollkommener zu als auf dem der Mathematik. Von ihr aus hat sich dann die analytische Deductionsmethode auf die Behandlung physikalischer Probleme übertragen, die aber insoweit nur mathematische Probleme sind, als man sich bei ihrer Untersuchung auf die Betrachtung des formalen Verlaufs der Naturvorgänge beschränkt. Das Mittelglied zwischen der reinen Mathematik und der theoretischen Physik bildet hier die Mechanik, deren verwickeltere Aufgaben aus denselben Gründen wie diejenigen der Geometrie eine analytische Behandlung erfordern, und die in ihrer abstractesten Form lediglich als eine analytische Geometrie erscheint, welche durch die Dimension der Zeit ergänzt ist. Die analytische Mechanik zerlegt erstens jede Bewegung in die Componenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung nach bestimmten Coordinatenrichtungen, und sie zerlegt zweitens die Bewegungen eines Körpers in die Bewegungen eines Systems von Punkten, welches sie dem Körper substituirt denkt. Auf diese Weise enthalten die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Systems die sämmtlichen begrifflichen Elemente, in welche sich die Bewegung zerlegen lässt, sammt den wechselseitigen Beziehungen derselben.

In den Geisteswissenschaften herrscht vermöge der verwickelten Beschaffenheit ihrer Probleme die analytische Deduction vor. So pflegt eine Rechtsdeduction in der Zerlegung irgend eines der Beurtheilung unterbreiteten Thatbestandes zu bestehen, bei welcher Zerlegung zugleich nachgewiesen wird, dass bestimmte Rechtsdefinitionen auf die einzelnen Thatsachen Anwendung finden. Die Erscheinungen des wirthschaftlichen Verkehrs erklärt man, indem man den Conflict und die Selbstregulirung der egoistischen Interessen als deren bedingende Elemente nachweist; ein historisches Ereigniss deducirt man theils aus den Willensmotiven der massgebenden Individuen, theils aus den Förderungen und Widerständen, welche dieselben in den allgemeinen Bedingungen der Gesellschaft vorfanden. Wenn die Deduction in diesen Fällen vielfach Lücken darbietet und des zwingenden Charakters entbehrt, so beruht dies darauf, dass die Probleme der Geisteswissenschaften vermöge ihrer allzu complexen Beschaffenheit der

eindringenden Analyse unbesiegbare Schwierigkeiten entgegensetzen. Es wird daher überhaupt nur möglich, sie der Analyse zu unterwerfen, indem man sich theils hypothetische Voraussetzungen gestattet, theils aber ein weitgehendes Abstractionsverfahren ausübt, bei welchem es nicht selten dahingestellt bleiben muss, ob dabei nicht auch von solchen Bedingungen abstrahirt worden sei, die für den Zusammenhang der zu erklärenden Erscheinungen von wesentlicher Bedeutung sind.

---

## Zweites Capitel.

## Die Formen der systematischen Darstellung.

### 1. Die Definition.

Untersuchung und Darstellung greifen in ihrer wissenschaftlichen Anwendung fortwährend in einander ein. Keineswegs lassen sie daher in dem Sinne sich scheiden, dass die erstere völlig abgeschlossen sein müsste, wenn die zweite beginnen soll. Wohl aber setzt jede systematische Darstellung voraus, dass eine Reihe von Begriffen durch vorangegangene Untersuchungen zureichend festgestellt sei, um einerseits die wünschenswerthe Abgrenzung der einzelnen Gebiete zu ermöglichen, und um anderseits für die Fortführung der Untersuchung die erforderlichen Grundlagen darzubieten. Diese Aufgabe erfüllt die Definition. Sie ist die elementarste unter den systematischen Formen, weil Classification und Beweisführung auf ihr weiterbauen, und sie steht ihrer thatsächlichen Entstehung nach mitten inne in dem Verlauf der inductiven Forschung. Denn jedes Resultat der letzteren sucht in einer zureichenden Begriffsbestimmung seinen Abschluss zu finden, damit dann an diese die Deduction anknüpfen könne.

Dieser Doppelstellung entspricht die Natur der Definition. Als systematische Form sucht sie einen gegebenen Begriff auf das schärfste von den verwandten Begriffen zu trennen; als nächstes Ergebniss einer Untersuchung, welcher die Begrenzung der Begriffe erst zu einem tieferen Eindringen in den Gegenstand verhelfen soll, kann sie nicht das Wesen des letzteren erschöpfend bestimmen wollen, sondern sie muss sich mit der Hervorhebung derjenigen Elemente begnügen, welche zur sicheren Unterscheidung zureichend sind. Die Definition bildet aber in doppelter Weise die Grundlage für die Weiterführung der Untersuchung: einmal durch sich selbst, insofern die klare Feststellung der charakteristischen Elemente eines Begriffs für die Untersuchung desselben und seines Verhältnisses zu anderen Begriffen ein wesentliches Erforderniss ist, und sodann durch die nahe Beziehung, in der die Definitionen zu den Grundsätzen stehen, auf welche

die Deduction die einzelnen Theoreme zurückzuführen sucht. Diese Beziehung selbst stellt sich wieder in einer doppelten Form dar. Entweder gestatten, wie in der Mathematik und in den reinen Begriffswissenschaften, gewisse Fundamentaldefinitionen eine unmittelbare Transformation in axiomatische Sätze; oder es lassen umgekehrt Erfahrungsgesetze, die durch Induction gewonnen sind, in Definitionen allgemeiner Begriffe sich umwandeln, wie in den physikalischen Disciplinen. Der Unterschied beider Formen entspringt daraus, dass in den erstgenannten Wissenschaften die Feststellung der Begriffe auf einer willkürlichen, wenn auch durch die Natur der Anschauung nahegelegten Construction beruht, deren Sinn festgestellt sein muss, ehe man zu Gesetzesformulirungen übergehen kann, während im zweiten Fall der durch den Zwang der Wahrnehmung sich aufdrängende Zusammenhang der Erscheinungen zunächst zur Annahme gesetzmässiger Beziehungen herausfordert, die dann erst nachträglich einem allgemeinen Begriff subsumirt werden. Die systematische Darstellung verwischt schliesslich diese Unterschiede der Entstehungsgeschichte. In ihrem Streben nach zwingender Deduction sucht sie alle Theoreme als apodiktische Folgerungen aus einer begrenzten Zahl ursprünglich gegebener Begriffsbestimmungen darzustellen, wobei dann die Frage, wie man zu diesen Begriffsbestimmungen gelangt sei, nicht weiter zur Erörterung zu kommen braucht. In diesem Sinne bilden Definitionen die Grundlage einer jeden systematischen Wissenschaft. Es ist aber dazu keineswegs erforderlich, dass sie, wie in dem Euklidischen System, der Entwicklung der Deductionen und sonstigen Untersuchungen vorangestellt werden, sondern es genügt vollkommen, wenn eine jede an dem Orte vorkommt, wo sie zum ersten Male gebraucht wird. Doch hat dieser Umstand sowie der andere, dass geläufige Begriffsbestimmungen leicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden können, zuweilen die fundamentale Bedeutung der Definition übersehen lassen.

Da wir uns als Zeichen der Begriffe im allgemeinen der Worte bedienen, so ist jede Definition zunächst eine Worterklärung; und da Begriffe immer nur durch andere Begriffe, also auch Worte nur durch andere Worte erklärt werden können, so besteht die Definition regelmässig darin, dass ein Wort, dessen begrifflicher Sinn noch nicht festgestellt ist, durch Worte bestimmt wird, deren begriffliche Bedeutung als bekannt vorausgesetzt werden darf. Dieser regelmässigen Aufgabe scheint es zu widerstreiten, wenn man die Worterklärung von der eigentlichen Definition zu unterscheiden pflegt, indem man beide als Nominal- und als Realdefinition einander gegenüberstellt. In der That ist auch diese Unterscheidung desshalb bekämpft worden, weil es niemals Definitionen der Dinge selbst geben könne, sondern immer nur Definitionen der Wörter, mit denen wir die Dinge bezeichnen. Die Realdefinition ist daher, wie Mill meint, ebenfalls nur eine Worterklärung; sie unterscheide sich aber von der blossen Nominaldefinition durch den Umstand, dass sie daneben

noch die Voraussetzung einschliesse, es gebe ein Ding, welches dem Wort correspondire*). Dennoch ist es offenbar nicht der Gedanke an reale Existenz, welcher uns hier zunächst beschäftigt. Vielmehr liegt der eigentliche Unterschied darin, dass wir bei der blossen Nominaldefinition völlig absehen von dem wissenschaftlichen Zusammenhang, in welchen der betreffende Begriff durch die Definition gebracht werden soll, indem wir bei ihr den nämlichen Zweck verfolgen wie bei der Uebersetzung eines Wortes aus einer fremden Sprache: die Nominaldefinition ersetzt lediglich das Wort von unbekannter Bedeutung durch synonyme Ausdrücke und Umschreibungen ohne jede Rücksicht auf die systematische Stellung der Begriffe. Der Realdefinition ist es gerade um die letztere zu thun. An und für sich kann daher ebenso gut die Nominaldefinition eines Pferdes wie die Realdefinition eines Centauren gegeben werden, auch wenn man nicht im geringsten daran zweifelt, dass das Pferd ein wirkliches Thier und der Centaur ein blosses Geschöpf der Phantasie sei. Hiernach bedarf es übrigens kaum der Bemerkung, dass die blosse Worterklärung kein Gegenstand logischer Untersuchung ist, sondern dass es die letztere nur mit Realdefinitionen im obigen Sinne, d. h. mit solchen Definitionen zu thun hat, durch welche die Stellung eines Begriffs innerhalb eines allgemeineren Zusammenhangs von Begriffen bestimmt wird.

Diese Aufgabe wird nun in der einfachsten Weise erfüllt, wenn man erstens den zunächst übergeordneten Begriff angiebt, unter welchen der zu definirende gehört, und wenn man zweitens das Merkmal oder den Complex von Merkmalen bestimmt, wodurch sich derselbe von den ihm coordinirten Begriffen unterscheidet. Im günstigsten Fall können so zwei Namen, ein Gattungsname und eine Eigenschaftsbezeichnung, zur Definition genügen. Diese Regel des genus proximum und der differentia specifica ist in der systematischen Naturgeschichte für die hauptsächlich seit Linné üblichen, aber schon vor ihm gebrauchten Doppelbezeichnungen, wie Felis domestica, Canis familiaris u. dergl., massgebend geworden. Die Benennung soll hier eine kurze Definition ersetzen, die aber freilich in Folge der Willkürlichkeit der Genusbenennung und der oft planlosen Auswahl des specifischen Unterschieds der eigentlichen Aufgabe einer Realdefinition wenig entspricht. Darum pflegt man selbst in der systematischen Naturgeschichte diesen Namen ausführlichere Definitionen folgen zu lassen, und in anderen Gebieten, wie z. B. bei mathematischen, physikalischen, juristischen und nationalökonomischen Begriffsbestimmungen, behält die Regel des genus proximum und der differentia specifica nur noch in einem allgemeineren Sinne ihre Geltung, insofern nämlich als bei jeder systematischen Definition die zur Verwendung kommenden Begriffe in zwei Gruppen zerfallen, von denen die eine einen oder mehrere übergeordnete Begriffe enthält, die als bekannt aus vorangegangenen Definitionen vorausgesetzt werden, während

*) Mill, Logik I. Uebersetzt von Schiel, 2. Aufl., S. 172.

die andere die besonderen Bestimmungen hinzufügt, durch welche der betreffende Begriff in eindeutiger Weise von allen ihm verwandten Begriffen abgegrenzt wird. Damit eine solche eindeutige Abgrenzung zu Stande komme, darf der Definition selbstverständlich kein für den Begriff wesentliches Element fehlen; und ebenso fordert der systematische Zweck, dass sie nicht mit unwesentlichen, etwa schon in anderen Elementen vorausgesetzten Bestimmungen überlastet werde. Je einfacher und zugleich logisch durchgebildeter ein Begriffsgebiet ist, um so mehr wird aber eine Definition, die der Forderung der Eindeutigkeit genügt, doch zugleich eine vollständige Einsicht in die Constitution des Begriffs gewähren. In vollkommenster Weise besitzen diese Eigenschaft die mathematischen Begriffe. Die exacte Definition einer geometrischen Curve enthält ebenso wie die für dieselbe aufzustellende Gleichung bereits alle Eigenschaften derselben vorgebildet. Der Definition in Worten kann daher in diesem Fall der analytische Ausdruck als eine symbolische Form der Definition substituirt werden. Am weitesten dagegen entfernen sich von diesem idealen Ziel die Begriffsbestimmungen concreter Naturobjecte. Nur in geringem Umfange sind wir im Stande, die charakteristischen Eigenschaften einer Pflanze oder eines Thieres in einen solchen Zusammenhang zu bringen, dass sich uns aus bestimmten einzelnen dieser Eigenschaften die anderen mit Nothwendigkeit ergeben. Die Definition muss sich darum in diesem Falle damit begnügen, diejenigen Merkmale herauszugreifen, in deren Constanz eine Bürgschaft ihrer begrifflichen Bedeutung zu liegen scheint, ohne dass sie aber den Anspruch erheben kann, damit irgendwie das Wesen des Objectes anzugeben, wie man dies so oft als die Aufgabe aller Definition angesprochen hat, eine Aufgabe, die selbstverständlich nur erfüllt werden kann bei Begriffen, deren Bestimmung nach Inhalt wie Umfang schliesslich in unserer eigenen Macht liegt. Neben der Mathematik sind es daher die systematischen Geisteswissenschaften, wie die Rechts- und Staatslehre, sowie die verschiedenen Zweige der systematischen Philosophie, in denen jene ideale logische Aufgabe der Definition am ehesten annähernd erreichbar ist.

Da jede Definition zur Feststellung eines Begriffs anderer Begriffe bedarf, so setzt sie diese letzteren als bereits gegeben voraus, sei es dass sie durch vorangegangene Definitionen bestimmt, sei es dass sie unmittelbar aus der Anschauung bekannt und daher keiner Definition bedürftig sind. Sobald eine Definition die gewöhnliche Gliederung in das genus proximum und die differentia specifica zulässt, so ist regelmässig das erstere der Gegenstand vorangegangener Definitionen, während die letztere an die unmittelbare Erfahrung appellirt, die höchstens eine anschauliche Zerlegung, in keiner Weise aber eine Feststellung mittelst anderer Begriffe gestattet. Jene Definition der übergeordneten Begriffe zerfällt nun selbstverständlich ihrerseits wieder in ein oberes Genus und eine specifische Differenz, von denen das erstere abermals eine ähnliche Zerlegung erfährt, bis man schliesslich bei denjenigen Allgemeinbegriffen des betreffenden Gebietes angelangt ist,

welche einen weiteren Rückgang nicht mehr gestatten. Indem nun dieser Process von den zunächst untersuchten Begriffen alle anschaulichen Elemente successiv losgelöst hat, bleiben schliesslich als nicht weiter definirbare oberste Gattungen solche Begriffe übrig, die völlig abstracter Art sind, d. h. unmittelbar gar keine anschaulichen Elemente mehr enthalten, wie die Begriffe Ding, Substanz, Grösse, Zahl u. dergl. Auf diese Weise führt die Analyse der Definitionen auf zwei undefinirbare Bestandtheile von völlig verschiedenem Charakter: erstens auf die Elemente der unmittelbaren Erfahrung oder die elementaren Empfindungen, die unmittelbar angeschaut werden müssen und eben darum nicht definirt werden können, und zweitens auf die allgemeinsten Abstractionen, welche, insofern ihnen jeder anschauliche Inhalt abhanden gekommen ist, eine bloss formale Bedeutung besitzen, da in ihnen lediglich die intellectuellen Functionen zum Ausdruck kommen, deren wir uns bei der Ordnung des empirischen Stoffes bedienen. Diese Functionen sind aber wiederum einer eigentlichen Definition nicht zugänglich, sondern es können bei ihnen höchstens die Bewusstseinsacte beschrieben werden, die bei der Erzeugung der Begriffe wirksam sind. So führen wir z. B. den Begriff des Dings auf die selbständige Apperception des einzelnen Wahrnehmungscomplexes, den Begriff der Zahl auf die Verbindung einer Reihe von Apperceptionsacten zurück u. s. w. (Bd. I, Abschnitt V, Cap. II u. f.)

Indem die Definition einen gegebenen Begriff stets durch eine Mehrheit anderer Begriffe erklärt, kann sie entweder auf einer Zerlegung in diese letzteren oder aber auf einer Verbindung derselben zu einem neuen Begriffe beruhen. Die Definition stützt sich daher auf die elementareren Methoden der Analyse und Synthese, und sie lässt hiernach zwei Hauptformen zu: die analytische und die synthetische Definition.

Die analytische Definition ist die nächstliegende und darum häufigste Form. Fast unerlässlich bei der Begriffsbestimmung von Erfahrungsobjecten bietet sie sich auch auf abstracten Gebieten immer zunächst dar, weil sie von dem gegebenen Begriff, welcher definirt werden soll, ausgeht. Die einfachste Art analytischer Definition besteht aber in der Hervorhebung der unterscheidenden Merkmale, welche die Beschreibung des Gegenstandes an ihm kennen lehrt. Diese descriptive Definition ist selbst nichts anderes als eine abgekürzte, auf die charakteristischen Eigenschaften sich beschränkende Beschreibung. Wie die Beschreibung überhaupt, so hat auch sie den Nachtheil, dass sie die Begriffselemente nur äusserlich an einander reiht, ihre innere Beziehung aber nicht kennen lehrt. So in den bekannten Definitionen der Naturgeschichte, aber auch bei mathematischen Begriffsgebilden, wo jedoch die exacte Bestimmung der Begriffselemente uns leicht jene Beziehung ergänzen lässt. Wenn wir z. B. den Kreis als diejenige in einer Ebene gelegene Linie definiren, deren Punkte sämmtlich gleich weit von einem festen Punkte der nämlichen Ebene entfernt sind, so ist diese Begriffsbestimmung an sich rein descriptiv;

trotzdem schliesst sie in Folge der scharfen Fassung des Begriffs der Aequidistanz alle wesentlichen Eigenschaften des Kreises in sich. Immerhin müssen wir auch hier die descriptive Definition verlassen, wenn die wechselseitige Beziehung der Begriffselemente angegeben werden soll. Dies geschieht in der analytischen Definition im engeren Sinne, die symbolisch immer in der Form einer Functionsgleichung

$$M = F(a, b \dots u, v \dots)$$

ausgedrückt werden kann, wo M den zu definirenden Begriff, a, b ... die constanten, u, v ... die variablen Elemente, in die derselbe zerlegt wird, und endlich das Zeichen F die Functionsbeziehung bezeichnet, die zwischen allen diesen Elementen stattfindet. In diesem Sinne ist die Gleichung des Kreises zugleich die analytische Definition desselben. Sie enthält alle Elemente der descriptiven Definition und ausser ihnen mit Hülfe der Operationssymbole den exacten Ausdruck der wechselseitigen Relationen derselben. Neben der Mathematik sind es wieder die einer strengeren logischen Cultur zugänglichen Geisteswissenschaften, wie die Erkenntnisslehre, die Rechtswissenschaft und zum Theil die Nationalökonomik, in welchen analytische Definitionen erstrebt werden können. Da uns aber hier ein dem algebraischen ähnliches Zeichensystem mangelt, so müssen die Beziehungen der Begriffselemente mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln der Sprache ausgedrückt werden, ein Umstand, der in Folge der ungenügenden Präcision dieser Hülfsmittel nicht selten die Definition ganz oder theilweise auf die descriptive Stufe zurücksinken lässt.

Den entgegengesetzten Weg schlägt die synthetische Definition ein. Sie giebt an, wie sich der zu definirende Begriff aus seinen charakteristischen Elementen zusammensetzt. Hierbei erscheinen dann meistens diese Elemente zugleich als die Bedingungen seiner Entstehung, und die synthetische nimmt so die geläufige Form der genetischen Definition an. Wenn man mit geringer Abänderung der oben gegebenen Beschreibung den Kreis durch die Bewegung eines Punktes in der Ebene entstehen lässt, der von einem festen Punkt der nämlichen Ebene immer gleich weit entfernt bleibt, wenn man ferner die verschiedenen Curven zweiten Grades aus bestimmten Modificationen dieses Bewegungsgesetzes ableitet oder noch einfacher als Schnitte eines geraden Kegels durch eine senkrecht zu dessen Axe stehende Ebene von wechselnder Lage auffasst, so gewinnt man abermals genetische Definitionen, wobei zugleich, wie das letzte Beispiel zeigt, im allgemeinen für ein und dasselbe Raumgebilde verschiedene Entstehungsweisen und darum verschiedene genetische Erklärungen möglich sind. Doch ist dies nur der Fall, wo die Definition, wie in der Mathematik, Ausdruck einer willkürlichen Construction ist. Bei Erfahrungsobjecten dagegen kann die Definition immer nur in dem Versuch einer Nacherzeugung der wirklichen Entstehung des Gegenstandes bestehen, und da diese in der Regel nur eine einzige ist, so ist

hier im allgemeinen nur *eine* Form derselben möglich. Bloss wo es sich um eine genetische Definition solcher Objecte handelt, die unserer unmittelbaren Erfahrung entrückt sind, wie der Sprache, der ursprünglichen Rechts- und Staatsformen, der mythologischen Vorstellungen, da haben wohl auch verschiedene genetische Begriffsbestimmungen neben einander Raum, die nun aber freilich nicht, wie in der Mathematik, ein gleiches Recht für sich in Anspruch nehmen, sondern als Ausdrucksformen verschiedener hypothetischer Anschauungen einander bekämpfen. Nicht selten geschieht es ferner, dass nur einzelne Seiten eines Begriffs eine genetische Definition zulassen, während andere, die zur Unterscheidung von verwandten Begriffen immerhin der Hervorhebung bedürfen, bloss einer Beschreibung zugänglich sind. Es entstehen dann gemischte, genetisch-descriptive Definitionen. Die Andeutung eines derartigen Verhaltens findet sich in den Artbenennungen der Naturgeschichte, wo die eine Hälfte der Doppelbezeichnung, das genus proximum, auf die Abstammung der zu definirenden Art hinweist, während die differentia specifica, die Aufzählung der charakteristischen Artmerkmale, einer bloss descriptiven Aneinanderreihung überlassen bleibt.

Die angegebenen Unterschiede der Definition stehen in nahem Zusammenhange mit den Eigenschaften derjenigen systematischen Form, welche auf die Definition sich stützt, indem sie die fundamentalen Definitionen eines Wissensgebietes zur geordneten Gliederung desselben verwerthet. Diese Form ist die *Classification*.

## 2. Die Classification.

### a. Allgemeine Eigenschaften der Eintheilung und Classification.

Wir bezeichnen als *Eintheilung* jede Gliederung eines Begriffs, durch welche derselbe in eine Anzahl coordinirter und additiv mit einander verbundener Theile zerlegt wird. Die logische Eintheilung führt daher stets zu einem vollständigen disjunctiven Urtheil von der Form

$$S = P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n.$$

Die Eintheilung wird zur *Classification*, wenn die so gewonnenen Begriffe allgemeine Classen bezeichnen, an denen der Vorgang der Eintheilung einmal oder mehrmals wiederholt werden kann. Jede Classification besteht daher aus einer *Haupteintheilung* und aus *Untereintheilungen*.

Damit die Eintheilung eines Begriffs ausgeführt werden könne, müssen die wesentlichen Elemente desselben durch seine vorangegangene Analyse ermittelt sein, und insbesondere muss die letztere darüber Aufschluss geben, welche unter den Begriffselementen constant, und welche veränderlich sind.

Unter den veränderlichen werden dann diejenigen ausgewählt, welche sich zur Abgrenzung der Glieder des einzutheilenden Begriffs am geeignetsten erweisen. Ein variables Begriffselement, dessen Veränderungen in dieser Weise benutzt werden, heisst Eintheilungsgrund. In den einfachsten Fällen genügt ein einziger; in verwickelteren wird es aber nicht selten nöthig, mehrere Eintheilungsgründe zu combiniren, um eine hinreichend vollständige Gliederung des Begriffs zu gewinnen.

Gehen wir auf den allgemeinen analytischen Ausdruck der Definition eines Begriffs zurück:

$$M = F\,(a, b \ldots, u, v \ldots),$$

so würden demnach unter den variablen Elementen u, v ... die Eintheilungsgründe zu wählen sein*). Da die Wahl zwischen denselben im allgemeinen, abgesehen von Rücksichten der Zweckmässigkeit, freisteht, so lässt jeder zusammengesetzte Begriff verschiedene Eintheilungsweisen zu. Erfordert die Vollständigkeit der Eintheilung die Combination mehrerer Eintheilungsgründe, so bestimmt sich die Gesammtzahl der Theile nach der Anzahl der Combinationen, die zwischen den durch die einzelnen Eintheilungsgründe gewonnenen Theilen möglich sind. Wählt man also z. B. u und v, so würde, wenn M nach u eingetheilt in A, B und C, nach v eingetheilt in $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zerfällt, als Resultat der combinirten Theilung

$$M = A\alpha + A\beta + A\gamma + B\alpha + B\beta + B\gamma + C\alpha + C\beta + C\gamma$$

sich ergeben. In allen solchen Fällen bedarf es jedoch einer besonderen Untersuchung darüber, ob nicht einzelne der logisch möglichen Glieder in Folge von Bedingungen, die in der speciellen Constitution des Begriffs liegen, hinwegfallen.

Für die Wahl der Eintheilungsgründe gelten zwei Hauptregeln, die freilich bei der Classification von Erfahrungsobjecten nicht immer strenge befolgt werden können. Erstens sollen die Eintheilungsgründe allen Gliedern des einzutheilenden Begriffs zukommen, damit es nicht nöthig werde, plötzlich mit denselben zu wechseln. Zweitens sollen die Veränderungen der zu Eintheilungsgründen gewählten Merkmale den wesentlichen Veränderungen des Gesammtbegriffs, d. h. den Veränderungen der wichtigsten anderen variabeln Begriffselemente, parallel gehen. Wie auf der ersten dieser Regeln die logische Richtigkeit der Eintheilung beruht, so wird durch die zweite eine der Natur des Gegenstandes angemessene Wahl der Eintheilungsgründe gewährleistet.

Durch die Hervorhebung einzelner für die gegenseitige Abgrenzung der

*) Diese logischen Variabeln dürfen, wie schon hier bemerkt werden mag, nicht verwechselt werden mit den Variabeln algebraischer Gleichungen. Wir werden unten sehen, dass vielmehr die logischen Variabeln bei der analytischen Classification mathematischer Begriffe regelmässig unter den algebraischen Constanten zu wählen sind.

Theile eines allgemeinen Begriffs geeigneter Elemente steht die Classification in unmittelbarem Zusammenhang mit der Definition. Einerseits setzt sie zureichende Definitionen der einzutheilenden Begriffe voraus, anderseits werden durch sie selbst, namentlich durch die Fortschritte, die sie im Verlauf der systematischen Entwicklung einer Wissenschaft macht, die Definitionen vervollkommnet und immer mehr in eine sich wechselseitig stützende Verbindung gebracht. Hierbei verwerthet die Classification die verschiedenen Untersuchungsmethoden, die sich an der Entwicklung des Wissens betheiligen. Vor allem ist es die Abstraction, die sich zunächst in der Form der isolirenden bei der Wahl der Eintheilungsgründe bethätigt, um sodann als generalisirende die Feststellung der allgemeinen Gattungsbegriffe zu vermitteln. Die Art aber, wie diese Formen der Abstraction geübt werden, ist wiederum abhängig von der jeweils erreichten Stufe der Induction und Deduction. Auf diese Weise ist es die Classification nebst dem von ihr getragenen System von Definitionen, an der am unmittelbarsten der Grad der Entwicklung, der in der Untersuchung eines bestimmten Gebietes erreicht ist, erkennbar wird; ja der Verlauf der Entwicklung selbst spiegelt sich regelmässig in der Aufeinanderfolge der Classificationssysteme einer Wissenschaft. In dem Wechsel der Formen der Classification ist daher meistens eine bestimmte Regelmässigkeit zu erkennen, die von den allgemeinen Gesetzen wissenschaftlicher Entwicklung beherrscht wird.

Entsprechend den Formen der Definition können wir nämlich als Hauptformen analytische und synthetische Classificationen unterscheiden. Wie mit der Analyse jede wissenschaftliche Untersuchung beginnt, so äussern sich auch die ersten Versuche einer systematischen Ordnung der Begriffe regelmässig in analytischen Eintheilungen. Die beginnende Analyse vermag nun zwar über die Coexistenz der Merkmale eines Begriffs, nicht aber über die innere Beziehung derselben Aufschluss zu geben. Die analytischen Classificationen der beginnenden Wissenschaft sind daher stets descriptiver Art. Erst indem sich mit der Analyse synthetische Constructionen oder Beobachtungen nach synthetischer Methode verbinden, gewinnt diese Methode auch auf die Eintheilungen ihren Einfluss, und es geht so die descriptive in eine genetische Classification über. Aber nicht unter allen Umständen kann die letztere auf die Dauer befriedigen. Namentlich in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften macht sich mehr und mehr das Streben nach systematischen Eintheilungen geltend, welche nicht bloss über die Entstehung der Begriffsgegenstände Rechenschaft ablegen, sondern einen möglichst vollständigen Ausdruck der bleibenden inneren Beziehungen ihrer Elemente enthalten. Dies ist nur durch ein Zurückkehren zur Analyse möglich, wobei aber die letztere nicht auf eine descriptive Aneinanderreihung der Merkmale sich beschränken darf, sondern im Sinne der mathematischen Analyse über die gesetzmässigen Beziehungen derselben Rechenschaft geben muss. So entsteht die vollendetste Form

der Classification, die analytische Classification im engeren Sinne, welche der analytischen Definition parallel geht, aber, gleich dieser, in Folge unserer unvollkommenen Einsicht in das Wesen der Erfahrungsobjecte hauptsächlich nur in den Gebieten der auf Construction beruhenden Begriffssysteme Anwendung finden kann. In dieser Reihenfolge ihrer gewöhnlichen Entwicklung wollen wir nunmehr die drei Formen der descriptiven, genetischen und analytischen Classification untersuchen, und daran schliesslich die Betrachtung einiger aus logischen Gründen besonders bevorzugter äusserer Eintheilungen, nämlich der Zwei-, Drei- und Viertheilung, anschliessen.

### b. Die descriptive Classification.

Die descriptive Classification benützt als Eintheilungsgründe solche Merkmale, die bei der Beschreibung einer zusammengehörigen Reihe von Gegenständen gewonnen worden sind. Da die Beschreibung an sich in Folge ihrer Beschränkung auf die blosse Betrachtung der thatsächlichen Coexistenz der Eigenschaften eines Objectes kein Merkmal vor dem anderen bevorzugt, so ist jene Wahl der Eintheilungsgründe vollkommen freigegeben, und es wird desshalb der descriptiven Classification verhältnissmässig leicht, den beiden oben namhaft gemachten logischen Forderungen der Constanz der Eintheilungsgründe und der angemessenen Variabilität der charakteristischen Merkmale zu genügen. Je mehr aber dies der Fall ist, in um so höherem Grade muss hinwiederum die Classification mit den von anderen Gesichtspunkten aus unternommenen Gliederungen des Gegenstandes übereinstimmen, um so mehr also müssen auch ihre Resultate mit denjenigen der vollkommeneren genetischen oder analytischen Classification zusammentreffen. In der That besteht zum grossen Theil gerade hierin der Dienst, den eine logisch angemessene Classification, mag sie auch noch so sehr nach äusserlichen Merkmalen ausgeführt sein, der weiteren Untersuchung des Gegenstandes zu leisten pflegt. Man hat wegen der freien Wahl der Eintheilungsgründe, über welche diese erste Eintheilungsform mehr als jede andere verfügt, vorzugsweise der descriptiven Classification in der Naturgeschichte den Namen der künstlichen beigelegt. Aber es ist eine längst gemachte und in Folge der angedeuteten Beziehung der Merkmale leicht verständliche Bemerkung, dass die Unterordnungen der besseren künstlichen Systeme mit denjenigen der so genannten natürlichen vielfach übereinstimmen. Ein weiterer Vorzug der descriptiven Classification, der mit der freien Wahl der Eintheilungsgründe zusammenhängt, besteht in der willkürlichen Beschränkung der Zahl der letzteren, eine Eigenschaft, welche der klaren Uebersicht der Gliederungen des Systems wesentlich zu statten kommt. In allen diesen Beziehungen ist besonders Linné's künstliches Pflanzensystem, mehr als seine Classificationen auf anderen Gebieten der

Naturgeschichte, ein mustergültiges Beispiel. Indem dieses System die Beschaffenheit der Fructificationsorgane zum Eintheilungsgrunde wählt, geht es zunächst von den allgemeinsten Unterschieden in der Lage derselben aus, worauf die weitere Unterscheidung der Classen nach der Zahl und Befestigungsweise der Staubfäden geschieht.

Diesen Vorzügen des descriptiven Systems stehen jedoch einige Nachtheile gegenüber, die allmälig zur Ersetzung desselben durch vollkommenere Classificationsformen antreiben. Solche Nachtheile entspringen hauptsächlich daraus, dass die descriptive Eintheilung vermöge der Beschränkung der Eintheilungsgründe, die sie erstrebt, in höherem Grade als jede andere auf die durchgängige Correlation der Merkmale der Objecte sich stützen muss, während sie doch weniger als jede andere über die Ursachen dieser Correlation Rechenschaft zu geben vermag. Wenn z. B. das descriptive System als Classenmerkmal der Säugethiere den Besitz der Milchdrüsen aufstellt, so macht es nicht im geringsten begreiflich, warum mit diesem Merkmal gewisse andere Eigenschaften, wie der Besitz von Haaren, zweier Hinterhauptscondylen, eines einzigen auf der linken Seite gelegenen Aortenbogens, eines die Brust- und Bauchhöhle vollständig trennenden Zwerchfells, regelmässig verbunden sind. Und doch sind die Milchdrüsen nur desshalb ein zweckmässig gewählter Eintheilungsgrund, weil zwischen ihnen und jenen anderen Merkmalen ein constantes Verhältniss der Coexistenz besteht.

Namentlich in zwei Erscheinungen kommt hier die mangelhafte Einsicht in die wechselseitige Beziehung der Begriffselemente in störender Weise zur Geltung. Erstens geschieht es, und zwar gerade bei den in logischer Beziehung vollkommensten descriptiven Eintheilungen, nicht selten, dass einzelne Glieder, die durch das Eintheilungsprincip logisch gefordert werden, hinwegfallen, weil sie dem Wesen des eingetheilten Begriffs widerstreiten. Ueber die Gründe solcher Lücken des Systems vermag aber die descriptive Classification keine Rechenschaft zu geben, so dass deren Existenz lediglich als eine zufällige erscheint. Dem lässt sich nun freilich nicht abhelfen, wo überhaupt unsere Kenntniss der Dinge eine zu unvollkommene ist. Wenn z. B. das Linné'sche Pflanzensystem alsbald von der Decandria, der Classe mit 10 Staubgefässen, zu der Dodecandria überspringt, in der es Blüthen mit 12—20 Staubgefässen vereinigt, so entzieht sich der hier zu Grunde liegende Mangel einer Elfzahl männlicher Fructificationsorgane vorläufig unserer Erklärung. Wenn man dagegen die Curven dritten Grades erstens nach der Zahl ihrer unendlichen Zweige und zweitens nach der parabolischen oder hyperbolischen Gestalt dieser Zweige eintheilt, so lässt auch hier diese descriptive Eintheilung dahingestellt, warum gewisse logisch denkbare Combinationen der stets paarig in den Zahlen 2, 4, 6 und 8 vorkommenden Zweige hinwegfallen, warum also z. B. unter den Curven mit sechs Zweigen nur solche mit zwei parabolischen und vier hyperbolischen vorkommen und vollends die Curven mit acht Zweigen stets hyper-

bolisch sind*). Da es sich aber in diesem Fall um Begriffe handelt, bei denen die Erkenntniss des Zusammenhangs ihrer Eigenschaften vollkommen in unserer Macht steht, so liegt hierin zugleich ein Motiv, an die Stelle der descriptiven eine genetische oder analytische Classification zu setzen, bei denen die logisch möglichen Glieder der Eintheilung immer auch mit den thatsächlich existirenden oder dem Begriff nach nothwendigen zusammenfallen müssen.

Ein zweiter Mangel der descriptiven Eintheilung besteht darin, dass sie nicht selten genöthigt wird, entweder Zusammengehöriges zu trennen oder, wenn dieser Uebelstand vermieden werden soll, dem gewählten Eintheilungsgrund untreu zu werden. Es ereignet sich dies namentlich bei Naturobjecten, deren abweichende Gestaltungen oft durch mannigfache Uebergänge verbunden sind, so dass sie den von uns willkürlich gezogenen Grenzen nur widerstrebend sich fügen. So ordnet das Linné'sche System sämmtliche Liliaceen in die sechste Classe, obgleich einige Arten nicht sechs, sondern nur drei entwickelte Staubgefässe besitzen. Die Gesammtheit der sonstigen Eigenschaften gewinnt hier das Uebergewicht über das einzelne willkürlich bevorzugte Merkmal. Indem die descriptive Classification auf diese Weise sich genöthigt sieht, die allgemeinen Verwandtschaftsbeziehungen der Objecte auf Kosten der logischen Folgerichtigkeit zu bevorzugen, legt sie aber selbst schon den Gedanken einer genetischen Eintheilung nahe.

### c. Die genetische Classification.

Der Versuch, zusammengehörige Objecte unserer Beobachtung in irgend eine Entwicklungsreihe zu ordnen, ist wohl so alt wie die wissenschaftliche Beobachtung selber. Auch liegen gerade den frühesten descriptiven Eintheilungen meistens zugleich unvollkommene genetische Anschauungen zu Grunde. So sind die von Aristoteles unterschiedenen Classen des Thierreichs sichtlich nach descriptiven Merkmalen gebildet, aber für die Anordnung derselben ist nebenbei die Annahme einer continuirlichen Entwicklungsfolge der Organismen von den Pflanzen aufwärts bis zu den Säugethieren massgebend. Gerade im Gebiet der Naturgeschichte musste jedoch bald der principielle Unterschied descriptiver und genetischer Eintheilung sich geltend machen. Denn während hier das Bedürfniss, in der Fülle der Formen eine logische Ordnung zu schaffen, zu der ersteren drängte, konnte der vergleichenden Beobachtung die Mannigfaltigkeit genetischer Beziehungen nicht verborgen bleiben. Mit klarem Bewusstsein freilich hat wohl erst der grosse Reformator der systematischen Naturgeschichte, Linné, diesen Unterschied erfasst, indem er seinem künstlichen ein natürliches System an die Seite setzte, dessen Vollendung er übrigens

*) Klügel's mathemat. Wörterbuch, Bd. 3, S. 248.

der Zukunft überlassen musste. Aber auch die später zur Ausführung gelangten natürlichen Systeme, wie sie für das Pflanzenreich Jussieu und Decandolle aufstellten, bilden immer erst eine Uebergangsform zwischen descriptiver und genetischer Classification, indem namentlich die Unterabtheilungen nach rein äusserlichen Merkmalen geschieden sind. Dies ist zum Theil wohl die Folge davon, dass der genetische Grundgedanke hier unter dem vielleicht noch aus der Aristotelischen Philosophie herübergenommenen Vorurtheil stand, die Entwicklung erfolge in einer einzigen Richtung, daher man auch dem natürlichen System eine lineare Anordnung zu geben suchte. Hierzu kam, dass die ersten erfolgreicheren Versuche genetischer Classification nicht einer wirklichen Beobachtung der Entwicklung, sondern einer blossen Vergleichung der fertigen Objecte ihren Ursprung verdankten, ein Standpunkt, welcher in den namentlich in den ersten Jahrzehenden unseres Jahrhunderts zur Ausbildung gelangten vergleichenden Wissenschaften seinen Ausdruck fand. War in der Linné'schen Schule die Untersuchung der Eigenschaften der Pflanzen und Thiere fast nur als ein Hülfsmittel betrachtet worden zur Gewinnung einer Classification, und diese wieder als ein Hülfsmittel zur Auffindung und Benennung der Objecte, so wurde nun in der vergleichenden Anatomie der Pflanzen und Thiere die Untersuchung sich selbst Zweck, und sie führte dadurch nothwendig zu einer Bevorzugung der inneren vor den bisher hauptsächlich beachteten äusseren Merkmalen. Hatte die Mineralogie ohne Rücksicht auf Vorkommen und Bildung die Mineralien nach gewissen äusseren Unterschieden geordnet, so traten ihr nun in der Geognosie und Geologie Wissenschaften zur Seite, deren Aufgabe von selbst auf eine vergleichende Untersuchung und damit zugleich auf die Erforschung der Entstehungsbedingungen der Gesteine hinwies. Von der Naturgeschichte ausgehend ergriff dieses Streben nach vergleichender Methode bald noch weitere Kreise der wissenschaftlichen Forschung. Eine »vergleichende Erdkunde« nannte Carl Ritter sein bahnbrechendes geographisches Werk. Auf dem Gebiete der Geisteswissenschaften schlossen sich daran die vergleichende Sprachwissenschaft, die Anfänge einer vergleichenden Mythologie und schliesslich der Versuch einer aus Bevölkerungs- und Wirthschaftsstatistik allmälig hervorwachsenden vergleichenden Gesellschaftslehre. Manche dieser Disciplinen, wie Geographie, Sprachwissenschaft und sociale Statistik, waren durch die Natur ihres Gegenstandes ganz oder grossentheils auf die Vergleichung fertiger Objecte oder Zustände angewiesen. Von der Naturgeschichte kann dies zwar keineswegs behauptet werden, sondern es schien hier im Gegentheil die Erfahrung selbst die Forderung zu stellen, dass ein genetisches System auf die wirkliche Genese der Gegenstände zu gründen sei. Immerhin war es begreiflich, dass trotzdem der schwierigeren und zeitraubenderen entwicklungsgeschichtlichen Untersuchung die Vergleichung vorausging.

Nun kann aber ganz allgemein der Zweck einer genetischen Classification ein doppelter sein. Entweder kann dieselbe, ohne Rücksicht auf

die wirkliche Entstehung, lediglich darüber Rechenschaft geben, wie die Objecte von uns anschaulich oder begrifflich construirt werden können. In diesem Fall werden möglicherweise mehrere genetische Eintheilungen der nämlichen Gegenstände gleichberechtigt neben einander bestehen, je nach den wechselnden Gesichtspunkten, von denen unsere genetische Construction ausgeht. Oder die Classification kann ein Ausdruck der wirklichen Entwicklung sein. Nur in diesem Falle haben wir eigentlich das Recht, von einem natürlichen System zu sprechen, und es ist zugleich klar, dass hier gleichberechtigte Systeme nicht neben einander möglich sind, oder dass, wo sie vorkommen, dies lediglich eine noch bestehende Unsicherheit über die empirischen Grundlagen eines solchen natürlichen Verwandtschaftssystems andeutet. Der wesentliche Unterschied beider Formen genetischer Classification ist unschwer an Beispielen zu erkennen. Mathematische Begriffsgebilde gehören regelmässig der ersten Form an. Ob ich die Curven zweiten Grades durch die Bewegungen eines nach bestimmten Gesetzen fortschreitenden Punktes oder durch die Schattenprojectionen eines Kreises bei wechselnder Lage desselben zur Projectionsebene oder endlich mittelst der Durchschneidung eines Kegels entstehen lasse, ist für die Sache selbst gleichgültig, und jede der auf einer dieser fingirten Entstehungsweisen beruhenden Eintheilungen ist darum an sich gleichberechtigt. Wenn ich dagegen über den genetischen Zusammenhang einer Reihe chemischer Verbindungen Rechenschaft geben will, so ist nicht jede beliebige Art, wie eine Atomgruppirung entstanden gedacht werden kann, der anderen gleichwerthig, sondern nur diejenige ist streng genommen berechtigt, die mit der wirklichen Entstehung zusammentrifft. Die Genese ist also willkürlich, so lange es sich um eine Construction des Begriffs handelt, sie ist dagegen an die Erfahrung gebunden, sobald nur eine Reconstruction in Frage steht.

In den genetischen Systemen, namentlich der Naturgeschichte, wurden nun diese beiden wesentlich verschiedenen Fälle nicht immer genügend auseinandergehalten, und es ist begreiflich, dass gerade die Beschränkung auf die Vergleichung der gewordenen Objecte zu einer solchen Vermengung von Construction und Reconstruction Anlass geben konnte. Eine mehr oder minder willkürliche Betrachtung der Gegenstände wurde in diese selbst verlegt oder als das ideale Gesetz angesehen, welches durch eine Art mystischer Causalität die Wirklichkeit bestimme. Ihren Ausdruck fand diese Betrachtungsweise in einem Begriff, der, wenn man sich nur seines Ursprungs aus der logischen Abstraction bewusst blieb, zweifellos seine Berechtigung hatte, da sein Fehler nur in der Hypostasirung bestand, die er erfuhr. Dies war der Begriff des Typus. Es gehört zu den bedeutsamsten Erscheinungen in der neueren Entwicklung der Wissenschaften, dass in den verschiedensten Gebieten, Zoologie, Botanik, Krystallographie, Chemie, Sprachwissenschaft, der nämliche Begriff beinahe gleichzeitig auftaucht. Geht man auf die empirischen Grundlagen zurück, von welchen seine Abstraction ausgegangen ist, so kann eine dreifache Bedeutung desselben unterschieden

werden. Erstens bezeichnet der Typus die einfachste Form, in welcher ein gewisses Gesetz der Structur oder der Zusammensetzung repräsentirt sein kann. Hier wird daher auch der Ausdruck Grundform in synonymer Bedeutung gebraucht. In diesem Sinne betrachtet die Krystallographie Würfel und Oktaëder als die Grundformen des regulären, die Doppelpyramide mit quadratischer Basis als die Grundform des tetragonalen Systems, oder sucht die Chemie nach der von Dumas eingeführten typischen Anschauung auf die Typen des Chlorwasserstoffs ($HCl$), Wassers ($H_2O$), Ammoniaks ($H_3N$) und Sumpfgases ($H_4C$) die zusammengesetzteren Verbindungen zurückzuführen. Zweitens versteht man unter dem Typus diejenige Form, in welcher die Eigenschaften einer Reihe verwandter Formen am vollkommensten repräsentirt sind. Diese Bedeutung des Begriffs fand besonders in der Naturgeschichte des Pflanzen- und Thierreichs ihre Verwerthung. So vereinigt z. B. der Typus eines Säugethiers nach Cuvier alle Merkmale in sich, die einer grösseren Zahl von Ordnungen zukommen. Zu diesem Typus gehören also fünf Zehen an den Vorder- und Hintergliedmassen, ein vollständiges Gebiss aus drei Zahnformen, obgleich bei der Mehrzahl der Säugethiere keines dieser Merkmale zutrifft. Zu dem typischen Charakter der Rosaceen gehört es, dass sie abwechselnde, von Nebenblättern begleitete Blätter haben, obgleich bei einzelnen, nämlich den Amygdaleen, die Nebenblätter ganz fehlen. Drittens endlich nimmt der Typus zuweilen noch die Bedeutung an, dass er lediglich eine formale Eigenschaft bezeichnet, die den Gliedern einer Gattung oder mehreren Gattungen gemeinsam zukommt. So z. B. wenn von Endlicher die Cormo- und Thallophyten als die Haupttypen des Pflanzenreichs angesehen wurden, oder wenn viele Linguisten die isolirende, agglutinative und flectirende Form als die hauptsächlichsten Sprachtypen unterschieden. Wie schon diese Beispiele zeigen, handelt es sich hier um umfassendere Eigenschaftsbegriffe, bei denen die Gefahr einer Umwandlung zu Objecten weniger nahe lag als in den zwei ersten Fällen, wo der Typus zwar auch ein Abstractionsproduct ist, aber doch zugleich sein reales Abbild in bestimmten Objecten der Erfahrung findet. Dennoch ist auch hier diese Gefahr nicht ganz vermieden worden, indem man solche Abstractionen zwar als ideale Formen auffasste, ihnen aber doch zugleich eine Art unmittelbarer Realität beimass. So wird in der so genannten Spiraltheorie von Schimper und Braun die Blattstellung auf ein abstractes geometrisches Gesetz zurückgeführt, der sich die Wirklichkeit natürlich immer nur mehr oder weniger annähern kann. Dieses Gesetz wird aber nicht bloss als eine mathematische Abstraction betrachtet, wogegen nichts einzuwenden wäre, sondern zugleich als eine reale Kraft, welche in dem Wachsthum der Pflanzen sich äussern soll*). In ähnlichem Sinne suchte noch H. G. Bronn die Thierformen

*) Vgl. A. Braun, Betrachtungen über die Erscheinung der Verjüngung in der Natur. Freiburg i. Br. 1849. S. 124.

auf einfache geometrische Formen, Kegel, Keil u. dergl., zurückzuführen, welchen Abstractionen er bezeichnender Weise den Namen »Gestaltungsgesetze« gab*). In der That bestand die Meinung, morphologische Betrachtungen solcher Art seien der Aufstellung causaler Naturgesetze äquivalent. Jener von den Begründern der natürlichen Systeme des Pflanzen- und Thierreichs gebildete Begriff des Typus, welcher mit dem Begriff der repräsentativen, die Merkmale der Familie, Ordnung oder Classe am vollkommensten ausprägenden Art sich deckte, stand zwar an und für sich in näherer Beziehung zur unmittelbaren Erfahrung. Aber auch er besass doch insofern den Charakter einer bloss idealen Form, als man sich dabei der unendlichen individuellen Variabilität innerhalb der Art bewusst war und sich dennoch den Typus individuell dachte, als ein ideales Individuum, in welchem alle schwankenden Eigenschaften der realen Individuen aufgehoben seien. Ebenso fand man keine Schwierigkeit, die Möglichkeit eines Gattungstypus zuzugestehen, welcher in keiner einzigen der in der Gattung enthaltenen Arten, sondern nur in ihnen allen zusammengenommen vollständig realisirt sei, und dennoch diesen nirgends existirenden Gattungstypus als eine reale Kraft zu betrachten, die in den einzelnen Formen zur Wirkung komme. Die unbewusste Mystik dieser Anschauung trat höchst augenfällig in der von Decandolle zunächst in Bezug auf die Pflanzen ausgebildeten, dann aber auch für das Thierreich adoptirten Lehre vom »Abortus« zu Tage. Die Abweichungen einzelner Arten von dem gemeinsamen Typus wurden hier dadurch erklärt, dass gewisse Theile verkümmert oder völlig verloren gegangen seien. Dieser Verlust wurde aber nicht als ein wirklicher, sondern als ein idealer Vorgang gedacht, gleichsam als ein Erlebniss in einer vorbildlichen Welt, nach dessen Resultaten erst die Dinge der wirklichen Welt sich gestaltet hätten**). Lagen solche Vorstellungen den älteren Formen der Typenlehre mehr unbewusst zu Grunde, so hat Agassiz das Verdienst, dass er sie mit vollem Bewusstsein zum Ausdruck brachte. Schon Cuvier hatte den Typus als die »Idee der Gattung« bezeichnet; bei Agassiz wird diese Idee zum Schöpfungsgedanken, aus dessen Verwirklichung die Wesen selber entspringen. Die Idee wird also objectivirt, zugleich aber als Bestandtheil einer transscendenten vorbildlichen Welt gedacht***). Die bis dahin noch einigermassen latent gebliebene Uebereinstimmung mit der Platonischen Ideenlehre tritt hier offen zu Tage. Um so merkwürdiger ist aber jene Uebereinstimmung, weil wir schwerlich bei diesen Morphologen an eine absichtliche Wiedererneuerung Platonischer Philosophie denken dürfen.

---

*) H. G. Bronn, Morphologische Studien über die Gestaltungsgesetze der Naturkörper. Leipzig und Heidelberg 1858.

**) Sachs, Geschichte der Botanik, S. 142.

***) L. Agassiz, Essay on Classification. Boston 1857. (Contributions to the natural history of the Unit. States of America. Vol. I.)

In der organischen Naturgeschichte hat nun die Typentheorie durch ihren Zusammenhang mit der Lehre von der Constanz der Arten ihr besonderes Gepräge empfangen, und namentlich ist dadurch die zuletzt erwähnte mystische Wendung derselben begünstigt worden. Dennoch fasst man diese Theorie einseitig auf, wenn man sie bloss von dem letzteren Gesichtspunkte aus betrachtet. Der Chemie und der Sprachwissenschaft liegen solche Nebengedanken ferne, und trotzdem hat hier der Begriff des Typus eine ähnliche Rolle gespielt. Die wesentlichere Bedeutung des letzteren liegt überall darin, dass er eine genetische Ordnung gewisser Naturobjecte zu vermitteln sucht, dass aber diese Ordnung nicht auf eine Beobachtung der wirklichen Entwicklungen, sondern auf die Vergleichung der fertigen Objecte gegründet wird. Darum eben tritt an die Stelle der reconstructiven Genese, die bei Erfahrungsobjecten immer gefordert wird, eine constructive Genese, die der Erzeugung mathematischer Objecte nachgebildet ist, und die so auch im Einzelnen in den Irrthum verfallen kann, durch eine mathematische Abstraction die causale Erklärung realer Objecte ersetzen zu wollen. Das Streben, eine genetische Ordnung zu gewinnen, ist vorhanden, aber noch fehlt es an den vollständigen Vorbedingungen. Desshalb sind die auf der Grundlage des Typenbegriffs entstandenen Eintheilungen offenbare Uebergangsformen: sie sind in Wahrheit descriptive Classificationen in einer genetischen Form. Diese Form ist aber von aussen hinzugebracht, sie stützt sich entweder, wie in der Chemie oder Sprachwissenschaft, auf hypothetische Annahmen, oder, wie in der organischen Naturgeschichte, auf eine postulirte »ideale Entwicklung«, d. h. auf die Umwandlung von Abstractionsgebilden in wirkliche einer transscendenten oder vorbildlichen Welt angehörige Dinge. Das Merkmal einer wahren genetischen Classification ist es jedoch, dass sie aus einer genetischen Erklärung der betreffenden Objecte hervorgeht. So setzt die genetische Eintheilung der Kegelschnitte vollständige Definitionen ihrer Entstehung voraus. Dagegen erklärt der chemische Typus ebenso wenig die Entstehung einer Verbindung wie die Abstraction der Spirallinie die Blattstellung oder der Arttypus das Werden der organischen Arten begreiflich macht.

Wohl aber enthält in allen diesen Fällen die äusserlich und zum Theil künstlich angewandte genetische Form einen Hinweis auf die wirkliche Entwicklung der Objecte, und eben darum bahnen die auf solche Weise entstandenen Eintheilungen den wahren genetischen Systemen den Weg. Doch wird dem genetischen Princip keineswegs dadurch schon Genüge geleistet, dass man einfach jene ideale Bedeutung des Typus, wie sie in der vorangegangenen Periode der Naturgeschichte gültig gewesen, in eine reale umzuwandeln sucht, indem man einen hypothetischen Stammvater postulirt, aus dessen im Verlauf der Vererbung entstandenen Abänderungen allmählich die Variationen des Typus hervorgegangen seien. Wo dieser Annahme nicht der irgendwie durch die Beobachtung mindestens indirect zu führende thatsächliche Nachweis zu folgen vermag, da

bleibt der Fehler bestehen, dass an die Stelle der Reconstruction eine Construction tritt. Der Typus behält in Wahrheit seine ideale Bedeutung, mit dem einzigen Unterschied, dass ihm nicht in einer vorbildlichen Welt, sondern in irgend einem unzugänglichen Zeitraum der wirklichen Welt objective Realität beigemessen wird. Immerhin ist auf diesem zuerst von der Darwin'schen Theorie mit Erfolg eingeschlagenen Wege der Vortheil erreicht, dass die unhaltbare und mit der genetischen Auffassung im Widerspruch stehende Annahme einer durch leere Zwischenräume getrennten Entwicklungsreihe beseitigt wird. Namentlich aber macht die Uebertragung der Idee des Typus auf ein empirisch erreichbares Gebiet eine Prüfung möglich, durch welche die von Hypothesen überbrückten Lücken des genetischen Systems allmälig ausgefüllt werden.

Auf diese Weise vollzieht sich in den systematischen Erfahrungswissenschaften der Uebergang von der descriptiven zur genetischen Classification in der Regel durch ein Zwischenstadium, in welchem an Stelle der allein zulässigen reconstructiven eine constructive Genese benützt wird, deren Anwendung in Wirklichkeit nur ein descriptives System in genetischer Form zu Stande bringt. Dem gegenüber bewahrt sich die Mathematik fortan die constructive Methode und mit ihr den Vortheil, dass sie die nämlichen Objecte nach verschiedenen Principien genetisch zu ordnen vermag. Dieser Vorzug ist aber nur die Folge eines Uebelstandes, welchen auf diesem Gebiete das genetische Verfahren mit sich führt. Jede genetische Erklärung und Eintheilung beleuchtet nämlich die zu untersuchenden Objecte nur von einer Seite und lässt zahlreiche andere, oft nicht minder wichtige Eigenschaften unbeachtet. Dies ist der Grund, wesshalb hier, ebenso wie bei der Definition, eine auf die analytische Begriffsentwicklung gestützte Classification als die vorzüglichere anerkannt werden muss.

### d. Die analytische Classification.

Die analytische Classification, als die vollendetste Form der Gliederung eines Begriffs, gewährt zugleich den vollkommensten Einblick in die logischen Principien der Classification überhaupt. Bezeichnen wir, zurückgehend auf die früher (S. 39) gegebene symbolische Form der analytischen Definition, mit

$$M = F(a, b, c, u, v, w)$$

irgend einen Allgemeinbegriff, als dessen logische Variabeln u, v und w zu betrachten sind, so geht die Classe M in eine unter ihr enthaltene Gattung $M_1$, diese in eine unter ihr enthaltene Art $M_2$ über, wenn wir successiv die geeigneten Variabeln durch constante Elemente ersetzen. Wir erhalten so die im Verhältniss successiver Unterordnung stehende Reihe:

| | | |
|---|---|---|
| Classe | $M$ | $= F(a, b, c, u, v, w),$ |
| Gattung | $M_1$ | $= F(a, b, c, \alpha, v, w),$ |
| Art | $M_2$ | $= F(a, b, c, \alpha, \beta, w),$ |
| Individuum | $M_3$ | $= F(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma),$ |

welche Reihe selbstverständlich, je nach dem Bedürfniss der Eintheilung, auch durch eine grössere Zahl von Stufen verlaufen kann, ehe der Individualbegriff erreicht wird. Immer aber ist der letztere dann gegeben, wenn die sämmtlichen logischen Variabeln durch Constanten ersetzt sind.

Jede Stufe dieser Reihe enthält nun mit Ausnahme der letzten eine Anzahl coordinirter Glieder, welche gewonnen werden, indem man die zum Eintheilungsgrund der betreffenden Stufe genommene logische Variable allmälig alle Werthe annehmen lässt, deren sie überhaupt fähig ist. Die äussersten Grenzwerthe bezeichnen dann den Umfang der Classe, Gattung oder Art, und die coordinirten Glieder werden erhalten, indem man die den Eintheilungsgrund abgebende Variable successiv zwischen engeren Grenzen veränderlich annimmt oder ihr auch gewisse ausgezeichnete constante Werthe anweist, so aber, dass diese Einzelwerthe sämmtlich zusammen wieder den Umfang der Variabeln vollständig erschöpfen. Angenommen also, in der oben symbolisch ausgedrückten Gattung $M_1$ erweise sich der Eintheilungsgrund u als veränderlich zwischen den Grenzen $\alpha_1$ und $\alpha_n$; ausserdem mögen $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$ Grenzen bezeichnen, die sich als angemessen für die Trennung der coordinirten Glieder aus der Constitution des Begriffes ergeben, so wird das ganze Verfahren der analytischen Eintheilung symbolisch ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$M_1 = F_{u=\alpha_1}^{u=\alpha_n}(A, U) = F_{u=\alpha_1}^{u=\alpha_2}(A, U) + F_{u=\alpha_2}^{u=\alpha_3}(A, U) \ldots\ldots$$

$$+ F_{u=\alpha_{n-1}}^{u=\alpha_n}(A, U),$$

worin der Kürze halber die constanten Elemente a, b, c durch A und die Variabeln u, v, w durch U bezeichnet sind.

Das Hauptgebiet der Anwendungen der analytischen Classification ist dasjenige der mathematischen Analysis. Die Definition eines Begriffs wird hier in der Form einer Gleichung gegeben, welche den Vortheil bietet, den Begriff nicht nur zureichend abzugrenzen, sondern auch erschöpfend zu bestimmen, so dass aus ihr alle seine Eigenschaften entwickelt werden können. Zu diesen Eigenschaften gehört auch die Gliederung in Unterbegriffe. Sie verwirklicht sich in einer Reihe specieller Gleichungen, die aus der zuvor aufgestellten allgemeinen als deren einzelne Fälle hervorgehen. Zu ihrer Ableitung bedarf es zunächst der Auffindung der logischen Variabeln, welche ihrer Natur nach stets unter den algebraischen Constanten der Gleichung zu wählen sind, da die algebraischen Constanten allgemein nur solche Werthe bezeichnen, die in dem Begriff auch dann constant bleiben, wenn er sich auf ein individuelles Object bezieht. Die algebraischen Variabeln haben daher die Eigenschaft, noch für die Individualbegriffe variabel zu bleiben, in welchen letzteren logische Variabeln

gar nicht mehr vorkommen können. Nachdem nun zum Zweck der analytischen Classification die logischen Variabeln einer allgemeinen Gleichung bestimmt und die einzelnen Specialwerthe der ersteren in die letztere eingeführt sind, können sich Transformationen und Vereinfachungen jener allgemeinen Gleichung ergeben, durch welche die Specialgleichungen von einander abweichende Formen annehmen. Geben wir, um ein einfaches Beispiel zu wählen, der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts die Form

$$y^2 = 2a\,x + v\,x^2,$$

so lassen sich, wenn wir v als logische Variable wählen, die drei Hauptfälle $v = -b$, $v = 0$ und $v = +b$ unterscheiden, entsprechend den drei Hauptformen

| Ellipse (mit Einschluss des Kreises) | Parabel | Hyperbel |
|---|---|---|
| $y^2 = 2a\,x - b\,x^2$ | $y^2 = 2a\,x$ | $y^2 = 2a\,x + b\,x^2$. |

Ein Beispiel mit zwei Eintheilungsgründen sei hier nur andeutend ausgeführt. Der analytische Begriff der homogenen ganzen Function lässt sich durch das logische Symbol ausdrücken

$$F\,(p, m, n),$$

worin p die Zahl der Constanten, m den Grad der Functionsgleichung und n die Zahl der Variabeln derselben bezeichnen. Wählt man nun m und n, die nur ganze Zahlen sein können, als Eintheilungsgründe, so gewinnt man für $m = 1, = 2, \ldots$ die Functionen 1ten, 2ten .... Grades, und innerhalb jeder dieser Classen wieder durch Variirung von n die Functionen mit 1, 2, 3 .... Variabeln. Die Grössen m und n besitzen den Charakter erschöpfender Eintheilungsgründe, da durch sie auch p bestimmt wird. Denn zwischen der Zahl p der Constanten und jenen logischen Variabeln m und n besteht die Beziehung:

$$p = \frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(n+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}.$$

Ausserhalb der Mathematik kann zwar ebenfalls eine analytische Classification erstrebt werden. Sie ist aber hier in Folge der mangelhafteren Form der analytischen Definitionen, an die sie in der wissenschaftlichen Anwendung sich anschliesst, von geringerer Sicherheit, so dass ihr selbst auf den für sie geeigneten Begriffsgebieten (siehe S. 39) nicht selten eine genetische Gliederung vorgezogen wird.

### e. Die Zwei-, Drei- und Viertheilung.

Die Zwei-, Drei- und Viertheilung haben sich, als die einfachsten Formen, in denen überhaupt ein Begriff eingetheilt werden kann, stets einer besonderen Bevorzugung zu erfreuen gehabt. Sie können in jeder

der oben unterschiedenen Classificationsformen vorkommen, sind aber doch weitaus am häufigsten bei der descriptiven Classification in Folge der grösseren Freiheit, mit welcher sich dieselbe in der Wahl der Eintheilungsgründe bewegt.

Die Zweitheilung gründet sich auf den contradictorischen Gegensatz, insofern dieser als das logische Princip betrachtet werden kann, welches jeder Unterscheidung eines Begriffs von einem anderen Begriff zu Grunde liegt. (Bd. I, S. 509.) Es gliedert sich aber die Zweitheilung wieder in zwei Formen, je nachdem der einem ersten Begriff A gegenübergestellte andere Begriff non-A bloss negativ bestimmt bleibt, der ursprünglichen Bedeutung des contradictorischen Gegensatzes entsprechend, oder ebenfalls positiv als ein gewisser Begriff B unterschieden wird, wo dann der contradictorische Gegensatz nur insofern noch Anwendung findet, als die Vollständigkeit der Eintheilung verlangt, dass gleichzeitig B = non-A und A = non-B sei. Ein ausgezeichneter Fall dieser positiven Dichotomie ist es, wenn A und B im Verhältniss des conträren Gegensatzes zu einander stehen. Hiernach unterscheiden wir drei Formen der Zweitheilung: 1) Die Dichotomie nach dem contradictorischen Gegensatze, 2) die Dichotomie der einfachen Unterscheidung und 3) die Dichotomie nach dem conträren Gegensatze. Unter ihnen ist die erste die unvollkommenste, obgleich sie sich grosser Beliebtheit erfreut, letzteres desshalb, weil sie den Vortheil hat immer vollständig zu sein. Dieser Vortheil wird aber durch den Nachtheil erkauft, dass das eine Glied der Eintheilung nur negativ bestimmt ist. Denkt man sich daher eine ganze Classification nach diesem Princip durchgeführt, so gewinnt man schliesslich für die Hälfte der Glieder des Systems bloss negative Definitionen. Auch leistet diese Form insofern der Willkür Vorschub, als es für die logische Vollständigkeit der Gliederung ganz gleichgültig ist, welcher Art das Merkmal A ist, nach welchem man irgend ein Gebiet in A und non-A trennt. Ein Beispiel dieser Classificationsform bietet Ehrenberg's zoologisches System. Es scheidet in Wirbelthiere und Wirbellose, die ersteren in Jungen nährende und nicht nährende, die letzteren in Thiere mit Herz und ohne Herz, die Wirbellosen mit Herz wieder in gegliederte und nicht gegliederte, die Thiere ohne Herz in solche mit getheiltem Darm und nicht getheiltem Darm*). Ferner eine Classification der Sprachen von Steinthal. Sie unterscheidet Formsprachen und formlose Sprachen; die ersteren zerfallen in solche mit und ohne Scheidung von Nomen und Verbum, die formlosen Sprachen in solche mit und ohne Kategorien**). Häufiger noch sind die Dichotomien der einfachen Unterscheidung. Sie pflegen namentlich Hauptgliederungen von Systemen zu bilden, weil man bei diesen sich vorzugsweise der Einfachheit befleissigt. Hierher gehören z. B. die Eintheilungen der Organismen in

*) Carus, Geschichte der Zoologie, S. 671.

**) Steinthal, Die Classification der Sprachen. Berlin 1850.

Pflanzen und Thiere, der Pflanzen in Thallophyten und Cormophyten, der Urtheile in kategorische und hypothetische, der Seelenvermögen in Vorstellen und Begehren, des Seienden in Stoff und Form u. s. w. Ihnen nahe stehen die Dichotomien nach dem conträren Gegensatz, wie Kälte und Wärme, Tag und Nacht, männliches und weibliches Geschlecht. Zur Classification sind dieselben minder brauchbar, weil gerade der conträre Gegensatz zuweilen Zwischenformen gestattet, so dass hier von vornherein die Eintheilung an dem Fehler der Unvollständigkeit leidet.

Aus diesem Grunde geht denn auch die Dreitheilung nicht selten aus der Dichotomie des conträren Gegensatzes hervor, indem man die zwischen den Endgliedern einer Begriffsreihe gelegenen Uebergänge unter einem gemeinsamen Begriff zusammenfasst. So liegt zwischen dem Guten und Bösen das Indifferente, zwischen dem Erhabenen und Niedrigen das einfach Schöne, oder man verlegt zwischen den Apriorismus und Empirismus den Kriticismus, zwischen den Materialismus und Spiritualismus einen unbestimmten Monismus. Auch aus der Dichotomie nach einfacher Unterscheidung kann auf ähnliche Weise eine Trichotomie werden. So hat man neben den Pflanzen und Thieren die Protisten als Zwischenwesen unterschieden, zwischen die Gesetzesübertretung und das Verbrechen das Vergehen als eine weitere Gradabstufung eingeschaltet. Hegel's dialektische Methode endlich besteht in Trichotomien, die auf Zweitheilungen nach contradictorischem Gegensatze gegründet sind. Dabei kann aber selbstverständlich der dritte Begriff nicht ein Mittelbegriff sein, sondern nur auf dem Weg der Synthese erzeugt werden, wie z. B. bei der Vereinigung des Seins und des Nichtseins zum Werden. Uebrigens treten in der weiteren Ausführung nicht selten an die Stelle der contradictorischen auch conträre Gegensätze und sogar einfache Unterscheidungen.

Die Viertheilung pflegt aus der Combination von zwei Dichotomien zu entstehen. So gewann die scholastische Logik eine Viertheilung der Urtheilsformen, indem sie einerseits bejahende und verneinende, anderseits allgemeine und besondere Urtheile unterschied. Ein weiteres Beispiel einer Tetratomie nach conträren Gegensätzen bietet die Aristotelische Ableitung der vier Elemente, nach welcher Wasser das feuchte und kalte, Erde das trockene und kalte, Luft das feuchte und warme, Feuer das trockene und warme Element ist. So unanfechtbar auch in logischer Beziehung derartige Eintheilungen sind, so gründen sie sich doch, wie diese Beispiele zeigen, auf oberflächliche und ungenügende Unterscheidungen; daher die künstlichen Trichotomien und Tetratomien in dem Masse zu verschwinden pflegen, als sich die Untersuchung der Begriffe vertieft und das Streben nach sachgemässer Ordnung über das Wohlgefallen an äusserer Symmetrie den Sieg davonträgt.

## 3. Der Beweis.

### a. Allgemeine Aufgaben des Beweisverfahrens.

Als Beweisführung oder Demonstration bezeichnen wir die Darlegung der Gründe, durch welche die Wahrheit oder Wahrscheinlichkeit eines gegebenen, einen realen Erkenntnissinhalt aussprechenden Urtheils festgestellt wird. Die Aufgaben eines jeden Beweisverfahrens bestehen daher erstens in der Aufsuchung der Prämissen zu dem zu beweisenden Satze und zweitens in der Herstellung einer Schlussfolge aus jenen Prämissen. Der ersten dieser Aufgaben wird durch die Herbeischaffung des Beweismaterials entsprochen, der zweiten durch die Ordnung der Beweisgründe und den Vollzug der Schlussfolgerung.

Hiernach ist der Beweis diejenige systematische Form, welche unmittelbar den Forschungsmethoden der Induction und Deduction entspricht. Er hat wie diese den Schluss zu seiner Grundform; er unterscheidet sich aber von ihnen dadurch, dass es sich bei ihm nicht erst um die Auffindung, sondern um die Nachweisung der Richtigkeit eines bereits gefundenen Satzes handelt. Es kann sich daher ein Beweis bald auf das engste an eine ihm zu Grunde liegende Induction oder Deduction anschliessen, bald mehr oder weniger weit von ihr sich entfernen, bald auch eine vorangegangene Induction in eine Deduction, oder sogar umgekehrt eine deductive in eine inductive Form umwandeln. Mit Rücksicht auf seine systematische Bedeutung hat zugleich der Beweis im allgemeinen im Vergleich mit jenen Forschungsmethoden einen enger begrenzten Zweck. Er bezieht sich auf die Wahrheit eines einzelnen Urtheils, während sich Induction und Deduction über eine grosse Zahl von Urtheilen erstrecken können, die aus gewissen mit einander im Zusammenhang stehenden Prämissen abgeleitet werden.

Jede Beweisführung stützt sich schliesslich auf irgend welche Thatsachen der Erfahrung. Diese Thatsachen können entweder durch die Abstraction zu Sätzen verarbeitet sein, die sich auf die allgemeinen Formen der Anschauung beziehen und, weil sie sich fortwährend in der Anschauung bestätigt finden, den Charakter unmittelbarer anschaulicher Gewissheit besitzen; oder sie können den concreten Inhalt der Erfahrung zu ihrem Gegenstande haben. Demnach können wir überhaupt die thatsächlichen Grundlagen des Beweises in Thatsachen der reinen Anschauung und in empirische Thatsachen scheiden. Auf jenen beruht das Beweissystem der Mathematik, auf diesen das Beweisverfahren in den empirischen Wissenschaften und im praktischen Leben. Die beiden letzteren trennen sich aber wieder dadurch von einander, dass die Erfahrungswissenschaft die einzelnen Erfahrungen, ehe sie dieselben zur Demonstration verwerthet, durch Abstraction und Induction zu allgemeingültigen Erfahrungssätzen zu erheben sucht, während das praktische Beweisver-

fahren, wie es z. B. zum Behuf der Rechtsprechung geübt wird, unmittelbar die einzelnen Thatsachen selbst als Prämissen benützt. Im letzteren Fall hat der Beweis stets die Form eines Inductionsbeweises, und es fehlt ihm, dem logischen Charakter der Inductionsschlüsse entsprechend, im allgemeinen die unbedingt zwingende Kraft, so dass dem Endurtheil immer nur eine mehr oder minder grosse Wahrscheinlichkeit zugestanden werden kann, die aber freilich unter Umständen für die Zwecke des praktischen Lebens der Gewissheit gleichzuachten ist. Uebrigens pflegen in derartigen Fällen auch solche Formen der Begründung eines Urtheils als Beweise bezeichnet zu werden, die diesen Namen streng genommen nicht verdienen. So ist in dem richterlichen Verfahren zwar der Indicienbeweis ein echter Inductionsbeweis, dagegen kann der so genannte Zeugenbeweis, sofern es sich bei demselben um die unmittelbare Bezeugung der in Frage stehenden Thatsachen handelt, nicht zu den logischen Beweisverfahren gerechnet werden, da bei ihm das Urtheil nicht aus anderen Beobachtungen erschlossen, sondern ein unmittelbarer Ausdruck der Beobachtung selbst ist.

In den theoretischen Erfahrungswissenschaften gehen ausser den Thatsachen der Erfahrung und den durch Abstraction und Induction aus denselben gewonnenen Sätzen nicht selten noch hypothetische Voraussetzungen in die Prämissen der Beweise ein. Dies ereignet sich in der Physik z. B. bei jenen Beweisführungen, die auf bestimmte Anschauungen über die Constitution der Materie oder auf die Annahme gewisser elementarer Gesetze derselben gegründet sind. Von hier aus hat die Aufstellung hypothetischer, absichtlich den Thatsachen der Anschauung irgendwie widerstreitender Definitionen auch in die Mathematik Aufnahme gefunden. Selbstverständlich haben dann aber die Beweisresultate ebenfalls so lange nur einen hypothetischen Werth, als sich nicht etwa aus den Folgerungen die Zulässigkeit der Hypothesen ergiebt.

Die Prämissen des Beweisverfahrens in den theoretischen Wissenschaften, die Definitionen, Axiome und Theoreme, sind bei der Deduction bereits besprochen worden (S. 29 f.). Sie werden bei der Verbindung der Beweise zu einem deductiven System in der durch ihre logische Abhängigkeit bestimmten Ordnung an einander gereiht. Namentlich in der Mathematik ist diese Ordnung strenge ausgebildet. Fundamentale Lehrsätze sind hier solche, die direct aus evidenten Axiomen bewiesen werden. Abgeleitete Lehrsätze bedürfen anderer bereits erwiesener Theoreme zu ihrer Begründung. Ein Corollarsatz endlich ist ein solcher, der aus einem bestimmten schon bewiesenen Lehrsatz durch unmittelbare Schlussfolgerung gewonnen werden kann. So gehören in dem Beweissystem Euklid's die Sätze über die Congruenz der Dreiecke zu den Fundamentalsätzen; dagegen sind die Sätze über den Flächeninhalt der Parallelogramme und die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel in denselben abgeleitete Lehrsätze. Endlich der Satz, dass Parallelen zwischen Parallelen

gleich lang sind, ist ein Corollar zu dem Lehrsatze, dass in jedem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten von gleicher Grösse sind. In den theoretischen Erfahrungswissenschaften behält das Beweisverfahren im allgemeinen diesen Charakter. Es gestaltet sich aber mannigfaltiger in Folge des verschiedenartigeren Ursprungs seiner Prämissen. Einerseits können, namentlich in der theoretischen Physik, rein mathematische Axiome und Theoreme herbeigezogen werden, da ja die allgemeinen Gesetze der Anschauung auch für jede einzelne Erfahrung gültig sind; anderseits treten dazu, dem specifischen Erfahrungsinhalte entsprechend, Verallgemeinerungen aus der Erfahrung und hypothetische Voraussetzungen, die beide völlig gleichwerthig den Axiomen und Definitionen im mathematischen Beweisverfahren behandelt werden. Weil übrigens die an die Stelle der Axiome getretenen allgemeinen Erfahrungssätze häufig nicht ohne weiteres durch einen blossen Hinweis auf die Wahrnehmung als gewiss gelten können, so tritt zugleich der Inductionsbeweis als ein wichtiges Ergänzungsglied ein. Je mehr in einer Disciplin die concrete Erfahrung über die allgemeinen Voraussetzungen und in Folge dessen die empirische über die mathematische oder speculative Betrachtung überwiegt, einen um so breiteren Raum nimmt der Inductionsbeweis ein, bis derselbe endlich in allen den Fällen der concreten wissenschaftlichen Untersuchung oder des praktischen Lebens, wo es sich nicht um die Gewinnung allgemeiner Sätze, sondern um den Nachweis von Thatsachen handelt, die nicht direct beobachtet sondern bloss erschlossen worden sind, als der allein mögliche zurückbleibt.

Obgleich der Beweis die Induction und Deduction zu seinen Zwecken verwerthet und ausser ihnen keine anderen Hülfsmittel zur Verfügung hat, so unterscheidet er sich doch von diesen Untersuchungsmethoden, wie schon oben bemerkt, durch den Umstand, dass der zu beweisende Satz oder die zu beweisende Thatsache bereits vor dem Antritt des Beweises gegeben ist. Nicht selten befolgt darum auch noch heute diejenige Wissenschaft, in der die Kunst des Beweises zur höchsten Ausbildung gelangt ist, die Mathematik, die Euklidische Regel, den zu demonstrirenden Lehrsatz dem Beweise voranzustellen, damit der Zweck des letzteren von Anfang an im Auge behalten werde. Die Art und der Grad der Kenntniss eines Demonstrandum können übrigens wieder auf das mannigfachste variiren, von der blossen Vermuthung an bis zur sicheren, durch unmittelbare Erfahrung oder die vorangegangene Untersuchung festgestellten Ueberzeugung. Darum kann nun auch der Zweck des Beweises entweder darin bestehen, eine noch unsichere Annahme zur Gewissheit zu erheben, manchmal auch einem erst in beschränkterem Umfange nachgewiesenen Satz die Allgemeingültigkeit zu sichern, oder derselbe kann sich darauf beschränken, die Resultate einer zuvor abgeschlossenen Untersuchung in die Beweisform zu ordnen, und im letzteren Fall wird sich dann selbstverständlich der Beweis mehr oder weniger innig an die Untersuchung anschliessen. Selten aber wird er sich auf eine blosse Reproduction der Untersuchung beschränken

dürfen. Denn für allgemeine Wahrheiten wie für einzelne nicht direct beobachtete Thatsachen pflegen sich nur durch einen besonders günstigen Zufall die Beweisgründe schon der Untersuchung in der zweckmässigsten Reihenfolge und Verbindung darzubieten. Erst die Ordnung des Beweismaterials hat ihnen diese für die Schlussfolge angemessenste Verbindung zu geben. Ein augenfälliges Zeugniss für diese selbständige Aufgabe des Beweisverfahrens liegt darin, dass es Beweisformen giebt, welchen keine bestimmten Untersuchungsmethoden entsprechen, ebenso wie anderseits nicht alle Bestandtheile einer Untersuchung in die Beweisform sich umprägen lassen. Die Mathematik kennt zahlreiche Sätze von axiomatischem Charakter, die ohne eine eigentliche Untersuchung feststehen, weil sie unmittelbar in der Anschauung gegeben sind. Gleichwohl kann man in solchen Fällen den Versuch machen, durch einen Beweis den nothwendigen logischen Zusammenhang derartiger Sätze mit den allgemeinen Gesetzen unserer Anschauung darzuthun. Die Beweise pflegen dann die apagogische Form anzunehmen, eine Form, welcher keine specifische Untersuchungsmethode correspondirt. Auf der anderen Seite bleiben alle wissenschaftlichen Aufgaben, die entweder der Gewinnung zu beweisender Lehrsätze vorangehen oder an bewiesene Sätze als deren Anwendungen sich anschliessen, der eigentlichen Untersuchung vorbehalten. Indem solche Aufgaben die Anwendung constructiver und experimenteller Verfahrungsweisen nothwendig machen, setzen sie ein Mass erfinderischer Thätigkeit voraus, welches über die blosse Herbeischaffung von Beweismaterial hinausgeht, da es dieses letztere vielmehr erst hervorbringt. Charakteristisch ist darum die Stellung, welche schon in Euklid's Beweissystem das Problem gegenüber dem Theorem einnimmt. Theils gehen hier Probleme und ihre Lösungen den Lehrsätzen eines bestimmten Gebietes voran, theils folgen sie ihnen nach. In den Aufgaben der ersteren Art sind die Resultate der Untersuchungen fixirt, welche die Gewinnung der zu beweisenden Theoreme vorbereiten; die Aufgaben der letzteren Art zeigen die Anwendungen, welche die Lehrsätze auf die einzelne Untersuchung zulassen. Nun kann zwar, wie es bei Euklid in der That geschieht, der Nachweis, dass die in der Aufgabe liegende Construction richtig ausgeführt wurde, wieder durch eine Demonstration geführt werden. Doch die Lösung des Problems muss vor dieser Demonstration geschehen, und sie ist der eigentliche Gegenstand der Untersuchung. Sie aber liefert für die Beweise der nachfolgenden Lehrsätze das Material, weil bei ihnen die zur Lösung der Aufgaben angewandten Constructionsmethoden wieder zur Anwendung kommen.

Aus diesem Verhältniss zur vorangegangenen Untersuchung ergeben sich zugleich die Gesichtspunkte für die Unterscheidung der Beweisformen. Ist nämlich durch die Untersuchung ein Beweismaterial geschaffen worden, aus welchem der zu beweisende Satz unmittelbar abgeleitet werden kann, so wird das directe Beweisverfahren gewählt, welches in der einfachen Anwendung der Schlussnormen auf die durch die Untersuchung gewonnenen

Erkenntnissgründe besteht. Vermag dagegen die Untersuchung ein solches Beweismaterial nicht zu schaffen, sondern nur die Ueberzeugung zu erwecken, dass andere Sätze, die an Stelle des zu beweisenden postulirt werden könnten, aus bestimmten Gründen nicht zulässig sind, so wird ein indirectes Beweisverfahren erforderlich, dessen bindende Kraft lediglich auf der Beseitigung der etwa möglichen anderen Annahmen beruht.

### b. Die directen Beweisformen.

Da das directe Beweisverfahren unmittelbar an eine vorangegangene Untersuchung sich anschliesst, deren Resultate es als Beweisgründe verwerthet, so richten sich nach den Hauptformen der Untersuchung auch die Hauptformen des directen Beweises. Dieser wird entweder deductiv oder inductiv geführt, wobei hier die deductive Beweisform als die strengere und desshalb in der Regel bevorzugte voranzustellen ist. Sie zerfällt in mehrere Unterformen, welche charakteristische logische Unterschiede darbieten.

Unter ihnen schliesst sich der synthetische Deductionsbeweis am nächsten an die Form des Subsumtionsschlusses an. Er ist es daher, der überall da, wo aus gegebenen allgemeinen Sätzen ein einzelnes Urtheil oder ein allgemeiner Satz von beschränkterer Bedeutung als specielle Folge abgeleitet werden soll, als die geeignetste Form sich darbietet. Der überwiegende Werth, welchen die antike Logik auf den Subsumtionsschluss legte, hat dieser Beweisform lange Zeit ein Uebergewicht über alle anderen gesichert. Das Euklidische Beweissystem stützt sich darum vorzugsweise auf dieselbe. Ihre Anwendung führt hier zu jener regelmässigen Anordnung der einzelnen Sätze, wie sie sich zu erkennen giebt in der vorläufigen Aufzählung der Definitionen und Axiome, in der Voranstellung der fundamentalen vor den abgeleiteten Lehrsätzen, der Constructionsaufgaben vor den sie verwerthenden Theoremen. In der strengen logischen Ordnung der Beweisgründe und der abgeleiteten Sätze besteht der Vorzug dieses Verfahrens, sein Nachtheil in dem Umstande, dass namentlich in verwickelteren Fällen der Zusammenhang eines Theorems mit seinen Beweisgründen zwar nach der Führung des Beweises vollkommen deutlich ist, dass aber der Weg, auf welchem man zur Auffindung der Beweisgründe gelangte, durchaus dunkel bleibt, so dass diese Auffindung wie eine zufällige Entdeckung erscheinen kann. Wenn z. B. Euklid durch die Ziehung von Hülfslinien den Pythagoreischen Lehrsatz auf den einfacheren Satz zurückführt, dass ein Parallelogramm, welches mit einem Dreieck die nämliche Grundlinie hat und zwischen denselben Parallellinien liegt, den doppelten Flächeninhalt besitzt, so wird dadurch der zu beweisende Satz vollkommen evident; es ist aber nicht im geringsten deutlich, warum man zu den schliesslich durch den Erfolg gerechtfertigten Hülfsconstructionen gelangen musste. Darum contrastirt bei diesem Beweisverfahren mit der

strengen logischen Anwendung der Beweisgründe die scheinbare Zufälligkeit ihrer Gewinnung.

Ohne Zweifel liegt in diesem Nachtheil der Grund, wesshalb schon die Alten für gewisse Fälle an die Stelle des synthetischen ein analytisches Beweisverfahren treten liessen, und dieses hat, ursprünglich nur ausnahmsweise zugelassen, allmälig auf den meisten Gebieten sich den Vorrang vor dem synthetischen zu erringen vermocht. Das überall zutreffende Kennzeichen des analytischen Beweises besteht aber darin, dass derselbe den zu beweisenden Satz als feststehend annimmt, um aus ihm Folgerungen zu ziehen, durch deren Richtigkeit dann nachträglich seine Wahrheit verbürgt wird. Dieses Verfahren kann nun wieder in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung kommen, die durch die Beschaffenheit der analytisch gewonnenen Folgerungen wesentlich sich unterscheiden. In dem einen Falle nämlich sind diese Folgerungen allgemeinere Sätze, entweder fundamentalere Theoreme oder Grundsätze, in dem anderen sind sie speciellere Sätze oder einzelne Thatsachen der Erfahrung. Wir wollen die erste als die kategorische, die zweite als die hypothetische Form des analytischen Beweises bezeichnen, mit Rücksicht darauf, dass nur bei der ersten Form der Schlussfolgerung eine bindende Nothwendigkeit zukommt, während dieselbe bei der zweiten bloss als eine mehr oder minder wahrscheinliche betrachtet werden kann.

Die alten Mathematiker haben allein die erste dieser analytischen Beweismethoden, die kategorische, gekannt. So beweist z. B. Euklid folgenden Satz sowohl auf analytischem wie auf synthetischem Wege: »Wenn eine Linie A B nach dem goldenen Schnitt getheilt ist (A B : A C = A C : C B), und wenn dem grösseren Theil A C eine Strecke A D = A C angesetzt wird, so ist die zusammengesetzte Linie B D ebenfalls nach dem goldenen Schnitt getheilt (B D : B A = B A : A D).« Der analytische Beweis nimmt die letztere Proportion als zugestanden an. Es ist dann, da A D = A C ist, auch B D : B A = B A : A C. Wenn aber die kleineren Stücke zweier Linien den ganzen proportionirt sind, so müssen es auch die grösseren Stücke sein, also B D : A D = B A : B C; und da ferner, wenn verbundene Grössen proportional sind, auch die getrennten proportional sein müssen und umgekehrt, so folgt weiter B A : A D = A C : B C, und daraus, da A D = A C, B A : A C = A C : B C, was vorausgesetzt war. Der synthetische Beweis dagegen geht von dieser Voraussetzung aus, folgert zunächst B A : A D = A C : B C, hieraus, unter Zuhülfenahme des oben angeführten Satzes von der Proportionalität verbundener und getrennter Grössen, B D : A D = B A : B C, hieraus ferner mittelst des Satzes von der Proportionalität der kleineren und grösseren Stücke zu den ganzen Linien, B D : B A = B A : A C, und daraus endlich B D : B A = B A : A D, was zu beweisen war*). Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass hier der

*) Euklid's Elemente XIII, 5.

analytische die reine Umkehrung des synthetischen Beweisganges ist. Die nämlichen Sätze wie bei dem letzteren kommen auch bei dem ersteren zur Anwendung, nur in umgekehrter Reihenfolge. Demgemäss ist auch der Schluss in beiden Fällen in gleicher Weise bindend. Indem der analytische Beweis zeigt, dass der angenommene Satz auf gewisse andere bereits feststehende Sätze als seine Erkenntnissgründe zurückführt, kommt für ihn ebenso wie für den synthetischen das allgemeingültige logische Gesetz zur Anwendung: »Mit dem Grund ist die Folge gegeben.« (Bd. I, S. 281.)

Dies verhält sich anders bei der zweiten, der hypothetischen Form des analytischen Beweises. Hier wird der zu erweisende Satz zunächst hypothetisch angenommen, um aus ihm nicht die ihn bedingenden Erkenntnissgründe, sondern die einzelnen Folgen abzuleiten, die unter Voraussetzung seiner Gültigkeit eintreten müssen. Die Bestätigung dieser Folgen durch die Erfahrung oder auf dem Wege eines anderweitigen Beweisverfahrens liefert dann die Bestätigung der Hypothese. Hier ist nicht der Satz massgebend: »mit dem Grund ist die Folge gegeben«, sondern dessen Ergänzung: »mit der Folge ist der Grund aufgehoben.« Nach diesem Satze kann aber, wie schon bei Erörterung des allgemeinen logischen Verhältnisses von Grund und Folge erwähnt wurde, aus dem Eintreffen gewisser Folgen zu einem hypothetisch vorausgesetzten Grunde immer nur geschlossen werden, dass die betreffenden Folgen aus diesem Grunde erklärt werden können, nicht aber, dass sie nothwendig aus demselben erklärt werden müssen. (Bd. I, S. 317, 516.) Es kann daher die Wahrscheinlichkeit eines auf diesem Wege erwiesenen Satzes nur dadurch allmählich der Gewissheit genähert werden, dass man erstens möglichst viele thatsächlich zu bestätigende Folgen abzuleiten sucht, die auf einen und denselben Grund hinweisen, und dass man zweitens zeigt, dass andere Gründe, die denkbarer Weise die nämlichen Folgen hervorbringen könnten, nicht statthaft sind. Der erste dieser Wege ist im allgemeinen in den empirischen Wissenschaften, der zweite in den mathematischen Disciplinen der gebotene. In allen diesen Beziehungen steht aber der hypothetische Deductionsbeweis mit dem nachher zu besprechenden Inductionsbeweis auf gleichem Boden. In der That pflegt er auch am häufigsten durch die einfache Umkehrung des letzteren zu entstehen.

Es ist ganz besonders das Gebiet der physikalischen Erfahrung, welches zur Anwendung des hypothetischen Beweisverfahrens Veranlassung bietet. Nachdem durch Induction ein bestimmtes Gesetz gefunden ist, wird der Beweis für dasselbe analytisch geführt, indem man es als gültig voraussetzt und zeigt, dass die aus ihm abgeleiteten Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen. Nicht selten aber zeigt bereits die Untersuchung dem Beweis diesen analytisch-hypothetischen Weg, indem sie von irgend einer vermutheten gesetzmässigen Beziehung ausgeht, welche durch bestimmte Beobachtungen oder experimentelle Erfahrungen bestätigt werden.

Gerade in solchen Fällen pflegen wir darum auf die Untersuchung selbst schon den Namen eines Beweisverfahrens anzuwenden. So bewies Newton, dass die Erscheinungen der Ebbe und Fluth von der Schweranziehung des Mondes und der Sonne bedingt sind, indem er zeigte, dass die Beobachtungen dieser Erscheinungen mit der gemachten Voraussetzung übereinstimmen. So bewies Cavendish, dass schwere Körper einander anziehen, indem er die Ablenkung kleiner an einer Drehwaage befestigter Bleikugeln durch eine in die Nähe gebrachte grössere Bleimasse feststellte. In allen diesen Fällen, wo der Gang des Beweises mit dem der Untersuchung zusammenfällt, handelt es sich um Beispiele des analytisch-hypothetischen Beweisgangs.

Im Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen hat die analytische Beweismethode in ihren beiden Formen ein mächtiges Hülfsmittel an der algebraischen Symbolik gefunden. Dem analytischen Verfahren kommt diese Symbolik desshalb mehr als dem synthetischen zu statten, weil sie es möglich macht, nicht nur irgend ein Gesetz, das entweder hypothetisch angenommen wird oder aus anderweitigen Betrachtungen gewonnen ist, symbolisch auszudrücken, sondern auch durch bestimmte allgemein zulässige Operationen aus demselben andere Sätze abzuleiten, die nun entweder allgemeine Erkenntnissgründe oder specielle Folgerungen zu dem zuerst aufgestellten Gesetze sein können. Aus der Fülle der Beispiele, welche reine Mathematik und mathematische Physik hier darbieten, mag ein dem letzteren Gebiet angehöriges genügen, welches der zuletzt erörterten Form der hypothetischen Beweisführung sich anschliesst. Die mechanische Wärmetheorie nimmt an, dass in den gasförmigen Körpern die Molecüle in fortwährenden geradlinigen Bewegungen begriffen sind, und dass jedes Molecül seine Bewegung in gleicher Richtung so lange fortsetzt, bis ein Stoss gegen die Gefässwand oder gegen ein anderes Molecül die Richtung der Bewegung ändert. Diese Annahme wird bewiesen, indem man die aus ihr sich ergebenden Folgerungen ableitet. Zu diesem Zweck muss zunächst der vorausgesetzte Bewegungszustand präciser formulirt werden. Man denkt sich demgemäss ein Gas, von dessen Theilchen jedes eine Masse m und eine mittlere Geschwindigkeit u besitzt, in ein würfelförmiges Gefäss von der Seitenlänge a eingeschlossen. Wir denken uns ferner die Bewegungsrichtungen der Molecüle nach drei zu einander rechtwinkligen Componenten zerlegt und gestatten uns die vereinfachende Hypothese, dass die Bewegungen gleichförmig nach diesen Richtungen vertheilt seien, dass also, wenn n die Gesammtzahl der Molecüle, je $\frac{n}{3}$ parallel der x-, y- und z-Axe bewegt seien. Offenbar muss dann jedes Theilchen $\frac{u}{2a}$ mal in der Secunde gegen eine Wand des Würfels stossen, und bei jedem Stoss wird die Masse m eine Geschwindigkeit u verlieren und wiedergewinnen, so dass die der Masse m durch die Wand ertheilte Geschwindigkeit dem Betrag 2 u gleich-

kommt. Da aber dies $\frac{u}{2a}$ mal in der Zeiteinheit (der Secunde) geschieht, so ist $\frac{m u^2}{a}$ die Kraft, mit welcher die Gefässwand auf das stössende Molecül reagirt. Demnach kommt auf jede einzelne Würfelfläche ein Druck von der Grösse $\frac{n}{3} . \frac{m u^2}{a}$, welche Grösse durch $a^2$ dividirt den auf der Flächeneinheit ruhenden Gasdruck $p = \frac{n}{3} . \frac{m u^2}{a^3}$ oder

$$\frac{3}{2} p v = \frac{n m u^2}{2}$$

ergiebt, worin beiderseits mit 2 dividirt und $a^3 = v$ gesetzt ist, indem unter v der Voluminhalt des Würfels verstanden wird. Will man nun dieses Gesetz, welches die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung $\frac{n m u^2}{2}$ aller in einem geschlossenen Raum enthaltenen Gasmolecüle ausdrückt, mit der Erfahrung vergleichen, so bieten sich hierzu die von Mariotte und von Gay Lussac gefundenen empirischen Gesetze dar. Nach dem ersteren verhält sich bei gleich bleibender Temperatur das Volum eines Gases umgekehrt wie der Druck, unter dem es steht, nach dem zweiten wächst der Druck bei gleich bleibendem Volum proportional der absoluten Temperatur*). Beide Gesetze lassen sich daher zusammen durch die Gleichung ausdrücken

$$p v = T . \text{Const.},$$

wenn man mit T die absolute Temperatur bezeichnet. Hieraus folgt durch Vergleichung mit der vorhin theoretisch abgeleiteten Gleichung

$$\frac{n m u^2}{2} = T . \text{Const.}$$

D. h. die Summe der lebendigen Kräfte der Gasmolecüle ist proportional der absoluten Temperatur, eine Folgerung, die durchaus mit der über den Bewegungszustand der Gasmolecüle gemachten Voraussetzung im Einklang steht. Denn da ein Gas, das auf den Nullpunkt der absoluten Temperatur abgekühlt werden könnte, bei diesem keinen Druck auf die umschliessenden Wände mehr ausüben würde, so würde bei dem nämlichen Punkte auch

*) Nach Gay Lussac's Versuchen wächst nämlich der Druck eines Gases bei dessen Erwärmung für jeden Grad der 100-theiligen Thermometerscala um $\frac{1}{273}$ des Werthes, welchen er bei 0° beträgt. Ebenso sinkt er selbstverständlich bei der Abkühlung für jeden Grad um $\frac{1}{273}$. Bei $-273°$ C. würde demnach der Druck gleich null geworden sein; die Entfernung von diesem Nullpunkte gilt daher als die absolute Temperatur.

die lebendige Kraft der Gasmolecüle null sein, und dieselbe wird darum von hier an proportional der Grösse der absoluten Temperatur zunehmen*).

Im Unterschiede von den bisher besprochenen deductiven Beweisformen sucht der Inductionsbeweis die Wahrheit einer Behauptung durch den Hinweis auf die einzelnen Thatsachen darzuthun, welche dieselbe als ihren Erkenntnissgrund fordern. Hierbei kann das Urtheil, dessen Wahrheit bewiesen werden soll, entweder die Bedeutung eines allgemeinen Theorems besitzen, oder es kann selbst nur eine einzelne Thatsache enthalten. Beide Fälle können als der theoretische und als der praktische Inductionsbeweis unterschieden werden.

Der erstere findet überall da seine Anwendung, wo ein Lehrsatz, der zur Ableitung einer Reihe einzelner Thatsachen dient, selbst nicht direct aus anderen Lehrsätzen oder aus axiomatischen Wahrheiten abgeleitet werden kann. Schon die Mathematik bedient sich daher des Inductionsbeweises vorzugsweise, um die Wahrheit der Axiome selbst oder solcher Sätze, die ihnen sehr nahe stehen, darzuthun. Der Satz z. B., dass die Multiplication zweier Zahlen a und b dasselbe Product ergiebt, in welcher Richtung man sie auch vornimmt, dass also $a \cdot b = b \cdot a$ ist, kann nur bewiesen werden, indem man seine Richtigkeit an einzelnen Zahlenbeispielen nachweist. Von hier aus kann der nämliche Satz dann auf eine beliebige Menge von Zahlen ausgedehnt werden, indem man an einzeln herausgegriffenen Beispielen zeigt, dass er für die Producte von je zwei, drei oder mehr Zahlen gültig ist**). Wie hier, so beruht überhaupt in solchen Fällen, in denen der Inductionsbeweis nicht bloss auf die Anschauung sich beruft, sondern auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze zurückgreift, die Führung desselben auf der Hervorhebung eines oder mehrerer charakteristischer Beispiele, an denen die Triftigkeit des betreffenden Satzes nachgewiesen wird. Es kann dann unter Umständen das Inductionsverfahren nur in der Sammlung dieser Beispiele bestehen, während bei jedem der letzteren ein deductiver Beweis zur Anwendung kommt. So beweist z. B. Euklid den Satz, dass der Mittelpunktswinkel im Kreis doppelt so gross ist als der Peripheriewinkel, indem er zwei extreme Fälle herausgreift und nachweist, dass er für dieselben richtig ist***).

Weit ausgedehnter noch ist die Anwendung des Inductionsbeweises auf empirischem Gebiet, entsprechend der starken Betheiligung des Inductionsverfahrens an den Untersuchungsmethoden der Erfahrungswissenschaften. So kann das Gesetz, dass die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Erde

*) Die genauere mathematische Ausführung des obigen Beweises vgl. bei Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, Bd. II. Braunschweig 1867. S. 247 f.

**) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2te Aufl., S. 2 f.

***) Euklid III, 20.

in jedem Theil ihrer Bahn um die Sonne bewegt, umgekehrt sich verhält wie das Quadrat der Entfernung beider Weltkörper, inductiv bewiesen werden aus parallel gehenden Vergleichungen einerseits der Entfernungen und anderseits der täglichen Winkelgeschwindigkeiten zu verschiedenen Jahreszeiten. Die Entfernungen am 1. Januar und 1. Juli verhalten sich z. B. wie 18910 zu 19556, die täglichen Winkelgeschwindigkeiten an den nämlichen Tagen wie 1,0695 zu 1. Dies ist aber zugleich das umgekehrte Verhältniss der Quadrate der erstgenannten Zahlen. Den Satz, dass der Kohlenstoff ein vierwerthiges Element sei, sucht man zu beweisen, indem man an einer Anzahl einzelner Kohlenstoffverbindungen zeigt, dass seine Affinität dann durch freie Affinitäten anderer Elemente oder ungesättigter Verbindungen gesättigt wird, wenn dieselbe den freien Affinitäten von vier Atomen Wasserstoffs, des zum gemeinsamen Mass der Affinitätsgrösse genommenen Elementes, äquivalent ist. Auch in diesen Fällen wird demnach der Inductionsbeweis durch Beispiele geführt. In der Zahl der herausgegriffenen Beispiele kann man sich aber um so mehr beschränken, von je strengerer Gesetzmässigkeit die Erscheinungen sind, auf welche sich dieselben beziehen. So genügen nöthigenfalls zwei correspondirende Entfernungen und Geschwindigkeiten, um das Newton'sche Gesetz zu beweisen, während für die Vierwerthigkeit des Kohlenstoffs eine sehr grosse Zahl von Beispielen angeführt werden muss, wenn dieselbe auch nur annähernd als festgestellt gelten soll.

Häufiger noch als der reine Inductionsbeweis kommt auf einer etwas fortgeschrittenen Stufe der Naturerklärung ein gemischtes Verfahren zur Anwendung, indem entweder in den Gang des Inductionsbeweises einzelne deductive Beweismomente eingreifen oder an ihn sich anschliessen. Zahlreiche Beispiele dieser Art enthält das Fundamentalwerk der neueren Physik, Newton's Principien der Naturphilosophie, welches, so strenge es in den geometrischen und abstract mechanischen Abschnitten die deductive, und zwar vorzugsweise die synthetische Beweismethode einhält, dennoch in den eigentlich physikalischen Theilen durchweg ein gemischtes Verfahren anwendet. So beweist Newton den Satz, dass die Kräfte, durch welche die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden, nach der Sonne gerichtet und den Quadraten ihrer Abstände von derselben umgekehrt proportional sind, einerseits aus dem ersten und dritten der Kepler'schen Gesetze, und anderseits aus den allgemeinen mechanischen Sätzen über die Centripetalkräfte*). Nun sind aber die Kepler'schen Gesetze Inductionen, während die Gesetze der Centripetalkräfte in streng synthetischer Form aus der Definition derselben und den allgemeinen Grundsätzen der Mechanik abgeleitet sind; das ganze Beweisverfahren ist also ein gemischtes. Ebenso beweist Newton den Satz, dass der Mond durch die irdische Schwere von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in seiner Bahn erhalten

*) Principien der mathemat. Naturphilos., Buch III, Abschn. I, Lehrsatz 2.

wird, einerseits aus den empirischen Ermittlungen über die Entfernung des Mondes von der Erde und über die siderische Umlaufszeit desselben, sowie aus der bekannten Fallgeschwindigkeit der irdischen Körper, anderseits aber aus der Voraussetzung der Gültigkeit des allgemeinen Satzes, dass die Intensität der Schwere mit dem Quadrat der Entfernungen abnimmt*). Der ganze Beweisgang besitzt in diesen Fällen den Charakter einer synthetischen Deduction. In dieser dienen aber einzelne Inductionen theils zur Feststellung des numerischen Werthes der in die Voraussetzungen eingehenden Grössen, theils zur Bestätigung der Schlussfolgerungen.

Der praktische Inductionsbeweis, welcher nicht der Feststellung allgemeiner Gesetze, sondern der Ableitung einzelner Thatsachen aus anderen Thatsachen dient, kann ebenfalls auf theoretischem Gebiete vorkommen. Es findet dies jedesmal im Verlauf einer concreten Untersuchung statt, sobald es sich darum handelt, die Wahrheit eines einzelnen Resultates der Beobachtung oder des Versuchs sicherzustellen. Auf diese Weise dienen praktische Inductionsbeweise überall als Hülfsmittel der theoretischen Induction. Wenn z. B. der Akustiker auf objectivem Wege nachweisen will, dass eine gegebene Stimmgabel die bestimmte der geforderten Tonhöhe entsprechende Schwingungsdauer besitzt, so lässt er sie etwa ihre Schwingungen auf eine mit bekannter und gleichförmiger Geschwindigkeit rotirende Scheibe aufzeichnen. Oder wenn der Chemiker das Vorhandensein eines Eisensalzes in einer Flüssigkeit feststellen will, so zeigt er, dass diese die sämmtlichen einzelnen Reactionen des Eisens darbietet.

Durchaus den nämlichen Charakter besitzt der Inductionsbeweis auf praktischem Gebiete. Der Untersuchungsrichter, der den Thatbestand eines nicht direct beobachteten Verbrechens feststellen will, sucht zunächst die Beschaffenheit der That selbst zu ermitteln, sammelt dann die Indicien und Zeugenaussagen, die auf bestimmte Personen als die muthmasslichen Thäter oder Veranlasser der Handlung hinweisen, sucht den Aufenthalt der Verdächtigen vor, während und nach der That zu erkunden, prüft das sonstige Verhalten derselben, die Wahrscheinlichkeit ihrer Aussagen, die Widersprüche, in die sie sich verwickeln, u. s. w. Das Verfahren ist hier mit Rücksicht auf den logischen Charakter der Methode kein anderes, als es der Naturforscher oder der Historiker einschlägt, wenn beide eine nicht direct beobachtete Thatsache durch die Benützung anderer der Beobachtung zugänglicher Thatsachen beweisen wollen. Die verschiedene Vollständigkeit der zu Grunde liegenden Inductionen und die mehr oder weniger verwickelte Verkettung der Ursachen, auf die sie hinweisen, begründen zwar grosse Unterschiede in der Sicherheit, aber keine in der Art des Beweisverfahrens.

---

*) Ebend. Lehrsatz 4.

c. Die indirecten Beweisformen.

Der indirecte oder apagogische Beweis sucht die Wahrheit eines Satzes festzustellen, indem er die Unwahrheit aller derjenigen Annahmen darthut, die an Stelle der zu beweisenden gemacht werden könnten. Der indirecte Beweis folgert also durch Ausschliessung; seine syllogistische Grundform ist der modus tollendo ponens des disjunctiven Schlusses, und er stützt sich mit diesem auf das Axiom des ausgeschlossenen Dritten: A ist entweder B oder non-B. (Bd. I, S. 320 und 508.) Da nun das in diesem Axiom nur negativ bezeichnete Glied in dem disjunctiven Urtheil in verschiedener Weise positiv bestimmt sein kann, wobei nur jedesmal die Forderung gestellt ist, dass die Vollständigkeit der Disjunction der in jenem contradictorischen Gegensatze enthaltenen gleichkomme, so sind auch für den indirecten Beweis drei Hauptformen möglich, die den Hauptformen des disjunctiven Urtheils entsprechen, und die wir als die disjunctive, die conträre und die contradictorische Form bezeichnen wollen.

Gegenüber dem directen Beweise und namentlich den deductiven Arten desselben, mit denen er zunächst vergleichbar ist, leidet der indirecte in allen seinen Formen an dem Nachtheil, dass er die Wahrheit eines Urtheils nicht aus den eigenen Erkenntnissgründen desselben deutlich macht, da er auf den Inhalt des Begriffs selbst nicht eingeht. Dagegen hat er den Vorzug, dass er den Umfang desselben, den der directe Beweis seinerseits unberücksichtigt lässt, untersucht, indem er alle die Wahrheit des zu beweisenden Satzes aufhebenden oder beschränkenden Gegenaufstellungen beseitigt. Im allgemeinen wird daher zwar, wo ein directer Beweis möglich ist, dieser vor dem indirecten den Vorzug verdienen; unter Umständen aber kann es doch wünschenswerth sein, den directen durch einen indirecten Beweis zu ergänzen, um die Wahrheit des Urtheils auf dem Wege der Ausschliessung zu vollerer Evidenz zu bringen. Namentlich dann pflegt man diese Ergänzung oder selbst den Ersatz des directen durch den indirecten Beweis zu wählen, wenn der erstere ein blosser Inductionsbeweis ist und daher an sich der wünschenswerthen Bündigkeit ermangelt. Derartige Fälle, in denen zugleich der indirecte zweifellos dem directen Beweis überlegen ist, kommen theils auf mathematischem Gebiete, theils aber und hauptsächlich bei praktischen Inductionsbeweisen vor. So ist z. B. im strafrechtlichen Verfahren der Alibi-Beweis ein indirecter Beweis. Der Umstand, dass der Angeschuldigte im Augenblick der That an einem entfernten Orte gewesen ist, beweist sicherer als alle directen Vertheidigungsgründe, dass er nicht gleichzeitig am Ort des Verbrechens selbst gewesen sein kann. Ein anderes Gebiet, für welches die indirecte Beweismethode bevorzugt zu werden pflegt, ist das der principiellen, den axiomatischen Wahrheiten nahestehenden oder unmittelbar aus bestimmten Definitionen abzuleitenden Lehrsätze. In diesen Fällen ist häufig ein directer Beweis

überhaupt nicht möglich, und auch der indirecte hat mehr den Werth einer Verdeutlichung des in der unmittelbaren Anschauung oder in den Voraussetzungen bereits Gegebenen als den einer eigentlichen Argumentation. Endlich hat man noch die hauptsächlichste, manchmal sogar die allein berechtigte Function des indirecten Beweises darin gesehen, dass er die Wahrheit negativer Sätze feststelle*). Hieran ist aber nur dies richtig, dass negative Urtheile auf anderem als auf indirectem Wege nicht bewiesen werden können, da ihre Beweisführung allein darin bestehen kann, dass das entgegenstehende positive Urtheil als unzulässig dargethan wird. Es ist aber nur die dritte, eben wegen dieser Eigenschaft verhältnissmässig werthloseste Form des indirecten Beweises, die contradictorische, für welche jene Behauptung zutrifft, wogegen die beiden ersten Formen sogar ausschliesslich zum Zweck positiver Beweisführungen Anwendung finden.

Die disjunctive Form des indirecten Beweises unterscheidet zunächst die verschiedenen Annahmen A, B, C ... N, die in Bezug auf eine gegebene Frage gemacht werden können; sie zeigt dann, dass unter diesen Annahmen B, C, D ... N nicht statthaft sind, und schliesst hieraus zurück, dass die allein übrig bleibende A die richtige sei. Die wesentliche Bedingung der Gültigkeit eines solchen Beweises ist hiernach die Vollständigkeit der aufgestellten Disjunction. Da aber in dieser Beziehung, namentlich auf empirischem Gebiete, leicht ein unbeabsichtigtes Uebersehen stattfinden kann, so ist man bestrebt, wo immer möglich den indirecten durch einen directen Beweis zu ergänzen. Am ehesten kommen noch in der Mathematik disjunctive Beweise für sich allein vor wegen der grösseren Sicherheit, mit der hier vollständige Disjunctionen gebildet werden können. So in vielen Fällen bei Euklid. Den Satz z. B., dass, wenn zwei gerade Linien einander parallel sind, eine dritte, die sie schneidet, mit ihnen gleiche Wechselwinkel bildet, beweist Euklid, indem er von der Disjunction ausgeht: entweder sind die Wechselwinkel $\alpha$ und $\beta$ gleich, oder $\alpha$ ist grösser als $\beta$, oder $\beta$ grösser als $\alpha$. Er weist dann die Unmöglichkeit der zwei letzteren Annahmen nach, wobei er sich hier wegen der genauen Analogie der beiden Fälle auf den Nachweis der Unmöglichkeit des einen, z. B. von $\alpha > \beta$, beschränken kann**). Astronomisch suchte man die Eigenbewegung unseres Sonnensystems im Weltraum zu beweisen, indem man schloss: Es giebt scheinbare Bewegungen der Fixsterne, welche nicht herrühren können 1) von der Bewegung der Erde (der s. g. Parallaxe), weil sie keine jährliche Periode zeigen, 2) von der Bewegung des Lichtes (der Aberration), aus demselben Grunde, 3) von der secularen Bewegung der Erdaxe, weil sie mit der entsprechenden secularen Periode nicht übereinstimmen, 4) von der eigenen

*) Trendelenburg, Logische Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 396.

**) Euklid I, 29. Als weitere Beispiele der disjunctiven Beweisform vgl. Euklid I, 6 und 19.

Bewegung der Fixsterne, weil von dieser wegen der sehr grossen Zahl der Fixsterne vorausgesetzt werden kann, dass sie nach den verschiedenen Richtungen des Raumes annähernd gleichförmig vertheilt ist. Es bleibt daher nur übrig, die eigene Bewegung unseres Sonnensystems als die Ursache eines Theils der scheinbaren Bewegungen anzunehmen.

Die conträre Form des indirecten Beweises stützt sich auf ein alternatives Urtheil von der Form: A ist entweder B oder C. (Bd. I, S. 178.) Da nun überall wo ein Begriff in bloss zwei Theile zerlegt wird, diese zugleich in das Verhältniss des conträren Gegensatzes zu einander treten, so besteht das Wesen eines aus einem alternativen Urtheil mit positiv bestimmten Begriffen hervorgehenden Beweises immer darin, dass die Wahrheit einer Behauptung erwiesen wird, indem man die Unmöglichkeit ihres conträren Gegensatzes nachweist. Während die disjunctive Form des indirecten Beweises bereits mehrfach als eine selbständige gegenüber der contradictorischen anerkannt wurde*), pflegt man die conträre mit dieser zusammenzuwerfen, eine Verwechslung, die wohl darin ihren Grund hat, dass auch im sprachlichen Ausdruck der conträre mit dem contradictorischen Gegensatz häufig vermengt wird. In der That aber werden wir überall, wo für das negativ bestimmte Glied einer Alternative eine zutreffende positive Definition möglich ist, das Vorhandensein eines conträren, nicht eines contradictorischen Gegensatzes anerkennen müssen. So sind z. B. Endlichkeit und Unendlichkeit des Raumes dem ersteren zuzurechnen; denn die Unendlichkeit lässt sich als diejenige Eigenschaft definiren, vermöge deren in jeder Richtung über jeden noch so entfernten Punkt hinaus ein weiterer Fortschritt möglich ist, und ebenso die Endlichkeit als diejenige Eigenschaft, vermöge deren es in jeder Richtung zwei Punkte giebt, die weiter als alle anderen Punkte der nämlichen Richtung und doch zugleich um eine messbare Grösse von einander entfernt sind. Aehnlich verhalten sich Primzahlen und Nicht-Primzahlen, denn die letzteren lassen sich positiv definiren als diejenigen Zahlen, die ausser durch die Einheit und durch sich selbst noch durch eine andere ganze Zahl theilbar sind, u. s. w. Dagegen sind Substanzen, welche nicht existiren, Kreise, welche keinen gemeinsamen Mittelpunkt haben, Functionen, die sich in keine Potenzreihe entwickeln lassen, und andere ähnliche Begriffe nur negativ definirbar, so dass, wo sie zu Gegenständen indirecter Beweise werden, diese die contradictorische Form annehmen. Da nun solche nur negativ bestimmte Begriffe regelmässig dann auftreten, wenn der zu beweisende Satz selbst verneinender

---

*) Trendelenburg, Logische Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 431. Vgl. a. Sigwart, Logik, II, S. 247. Völlig unbrauchbar ist die von Lotze gegebene Eintheilung der indirecten Beweise (Logik, S. 222 ff.), welche, lediglich nach Analogie der directen Beweise ausgeführt, die wichtigsten Unterschiede ignorirt und dagegen Formen unterscheidet, die nirgends vorkommen und zum Theil sogar dem Wesen des indirecten Beweisverfahrens widerstreiten.

Art ist, so scheidet sich demnach der contradictorische von dem disjunctiven sowie dem conträren Beweis durch das Kennzeichen, dass jener nur für Sätze von negativem Inhalt gebraucht wird, während die letzteren stets für positive Sätze eintreten oder doch für solche, die trotz der etwa gebrauchten Form der Verneinung eine positive Bedeutung haben und daher leicht in die positive Form sich umwandeln lassen.

Folgt man dem zuletzt erwähnten Kriterium, so zeigt sich sofort, dass die wichtigsten unter den so genannten apagogischen Beweisen der conträren Form angehören. Während aber die disjunctive Form auch auf empirischem Gebiete sehr verbreitet vorkommt, ist die conträre vorzugsweise auf speculativem, in der Mathematik und Philosophie, zu Hause. Hierher gehören die zahlreichen apagogischen Beweise, deren sich Spinoza bedient*), die Beweise der Kantischen Antinomien, ferner die Begründungen der Thesen und Antithesen, die in Bezug auf die allgemeinsten mechanischen und physikalischen Grundsätze im Verlaufe der Entwicklung der Physik aufgetreten sind**). Es ist ein für die Anwendung dieser Demonstrationsart bedenkliches Symptom, dass sie sich, wie die letzterwähnten Beispiele zeigen, als Werkzeug zur Unterstützung entgegengesetzter Behauptungen gebrauchen lässt. Immerhin kann hierfür nicht der Beweisform als solcher die Schuld aufgebürdet werden, sondern entweder beruhen die Widersprüche, in die sie verwickelt, auf der Zweideutigkeit der sprachlichen Bezeichnungen, wie grossentheils bei den Dilemmen der Alten, oder auf widerstreitenden Motiven des speculativen Denkens, wie bei den ontologischen Antinomien der Kosmologie und Physik, und im letzteren Fall sind die antithetischen Beweisführungen zwar nicht für den Zweck, für den sie angeblich eintreten, wohl aber für die Untersuchung jener Motive und ihrer etwaigen Berechtigung von grossem Werthe.

Völlig anders verhält es sich mit den mathematischen Beweisen dieser Art. Bei ihnen handelt es sich wirklich um die indirecte Begründung eines positiven Satzes durch den Nachweis der Unrichtigkeit seines conträren Gegentheils. Dabei pflegt aber dieses letztere nicht strenge begrenzt zu sein, sondern aus einer unbestimmten Anzahl von Fällen zu bestehen, von denen immer nur einzelne herausgegriffen werden können, um an ihnen die Annahme des Gegentheils ad absurdum zu führen. Dadurch tritt diese Art mathematischer Beweisführungen in Analogie einerseits mit dem directen Beweis durch Beispiele, anderseits mit der disjunctiven Form des indirecten Beweises. Von der letzteren scheidet sie sich aber wesentlich durch die unbestimmte Zahl der Fälle, ein Umstand, der zugleich sehr geeignet ist, die Verwechslung mit der contradictorischen Form des apagogischen Beweises zu begünstigen. Immerhin bleibt der Gesammtbegriff, welchem das herausgegriffene Beispiel angehört, positiv

*) Vgl. z. B. Ethik, I, prop. 5, 8, 11, 12, 13.

**) Vgl. meine Schrift: Die physikalischen Axiome. Erlangen 1866. S. 79 f.

definirbar, und es kann daher auch sein Gegensatz zu dem Demonstrandum stets positiv bestimmt werden, eine Eigenschaft, deren Mangel gerade das Wesen des contradictorischen Gegensatzes ausmacht. Schon bei Euklid findet sich die conträre Beweisform mehrfach angewandt*). Es mag hier an einigen Beispielen aus neuerer Zeit genügen. Dirichlet beweist den Satz »wenn die Summe 1. 2. 3 ... (p — 1) + 1 durch p theilbar ist, so muss p eine Primzahl sein« auf folgende Weise: Wäre p keine Primzahl, so müsste es ausser durch 1 und durch sich selbst noch durch eine andere Zahl a, die der Reihe der Zahlen 2, 3, 4 ... (p — 1) angehörte, theilbar sein. Dann würde aber einerseits die Summe 1. 2. 3 ... (p — 1) + 1, anderseits der erste Summand 1. 2. 3 ... (p — 1) durch a theilbar sein, was nur stattfinden könnte, wenn auch 1 durch a theilbar wäre**). Der Satz »eine eindeutige Function f (x) kann nur auf eine einzige Art durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe dargestellt werden« wird folgendermassen indirect bewiesen: Angenommen es gebe mehrere Arten der Entwicklung, z. B.

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n,$$
$$f(x) = b + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_n x^n;$$

so würde durch Subtraction folgen:

$$0 = (a - b) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \dots (a_n - b_n) x^n.$$

Daraus ergiebt sich aber, da sämmtliche durch successives Differenziren erhaltene Ableitungen ebenfalls null sind,

$$a - b = 0, a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots a_n - b_n = 0.$$

D. h. die hypothetisch angenommene zweite Entwicklung ist mit der ersten identisch***). Beweise der letzteren Form sind in der neueren Analysis sehr beliebt, und sie sind auch desshalb von Interesse, weil hier einerseits durch die positive Schlusswendung, die er nimmt, der indirecte dem directen Beweis an bindender Kraft vollkommen gleichkommt, und weil anderseits zugleich wegen der Allgemeinheit der algebraischen Zeichen der Beweis durch ein Beispiel eine allgemeingültige Bedeutung gewinnt.

Der contradictorischen Form des indirecten Beweises liegt der Satz des ausgeschlossenen Dritten »A ist entweder B oder non-B« in seiner ursprünglichen Unbestimmtheit zu Grunde. Zweck desselben ist regelmässig der Nachweis der Richtigkeit eines negativen Satzes. Dass A nicht B sei, wird bewiesen, indem man zeigt, dass die entgegengesetzte Annahme, A ist B, auf Widersprüche führt. Sollte diese Beweisart für die

---

*) Vgl. Euklid III, 7 (2. Theil), 8 (3. Theil), 9 (2. Beweis), 19; X, 80 bis 85.

**) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 61.

***) Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881. S. 157.

Demonstration positiver Sätze Verwendung finden, so müssten umgekehrt aus der Annahme »A ist non-B« ihre Folgen entwickelt und die Unstatthaftigkeit derselben aufgezeigt werden. Da sich aber aus einem negativen Satze nichts folgern lässt, so erhellt ohne weiteres die Unmöglichkeit einer solchen Beweisart. Wo sie scheinbar stattfindet, da handelt es sich eben in Wirklichkeit um einen Beweis mittelst eines conträren Gegensatzes.

Auch der contradictorische Beweis ist ausschliesslich in den speculativen Wissenschaften, in Metaphysik und Mathematik, im Gebrauch; immerhin ist er auch hier vermöge des geringen Werthes rein negirender Urtheile von weit beschränkterem Vorkommen, als man angenommen hat. Er dient hauptsächlich zum Beweis von Sätzen, die Corollarsätze anderer positiver und bereits bewiesener Sätze sind, und wo darum statt des indirecten Beweises manchmal auch der unmittelbare Hinweis auf jene begründenden Sätze genügen kann. Letzteres ist der Grund der auffallenden Erscheinung, dass Spinoza, der sonst so sehr den apagogischen Beweis, namentlich in seiner conträren Form liebt, bemerkenswerther Weise gerade für negative Sätze directe Beweise bevorzugt. Bei näherer Prüfung zeigt sich freilich, dass solche negative Lehrsätze nichts enthalten, was nicht in vorangegangenen positiven bereits in anderer Form gesagt wäre. Am correctesten hat Euklid die contradictorische Beweismethode angewandt, obgleich auch bei ihm viele der so bewiesenen Sätze entweder bereits in bestimmten Definitionen stillschweigend enthalten sind oder ebenso gut als Corollarsätze anderer direct bewiesener Theoreme auftreten könnten. Den Satz z. B. »Wenn in einem Kreise zwei gerade Linien, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden, so halbiren sie einander nicht« beweist Euklid, indem er darauf hinweist, dass die Annahme, es halbirten sich zwei solche Linien, zu der Folgerung führen würde, dass auch eine vom Kreismittelpunkt nach ihrem Durchschnittspunkt gezogene Gerade sie beide halbire. Nun lehrt aber ein unmittelbar vorhergehender Satz: »Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende halbirt, so schneidet sie dieselbe senkrecht.« Es würde also die Gerade mit beiden Linien einen rechten Winkel bilden, was damit unvereinbar ist, dass der Annahme nach die Linien selbst mit einander einen Winkel bilden*). Es ist klar, dass dieser apagogische Beweis ohne Nachtheil durch den unmittelbaren Hinweis auf den Satz, auf welchen er sich stützt, und auf den Beweis desselben ersetzt werden könnte. Diese auch bei den anderen Beweisen ähnlicher Art wiederkehrende Eigenschaft hat wohl neben dem relativ geringen Werth negativer Sätze dazu beigetragen, dass in neuerer Zeit die contradictorische Beweisform immer mehr aus dem wissenschaftlichen Gebrauch verschwunden ist.

---

*) Euklid III, 7. Weitere Beispiele sind: III, 5 und 23; VIII, 17; XI, 1.

## Zweiter Abschnitt.
## Von der Logik der Mathematik.

---

### Erstes Capitel.
### Die allgemeinen logischen Methoden der Mathematik.

#### 1. Die Aufgaben der mathematischen Untersuchung.

Wie die meisten andern Wissenschaften, so hat auch die Mathematik aus praktischen Bedürfnissen ihren Ursprung genommen. Die Zählung von Werthobjecten, die Messung von Flächen und Körpern bildeten ihre ersten und lange Zeit ihre einzigen Aufgaben. Zählung und Messung fallen jedoch immer erst dann in den Bereich mathematischer Erwägungen, wenn sie nicht direct sich erledigen lassen, sondern wenn zwischen die Aufgabe und ihre Lösung logische Hülfsoperationen eintreten müssen; und letzteres geschieht, sobald nicht die in Frage stehenden Werthe und Grössen selbst, sondern statt ihrer irgend welche andere, die zu den gesuchten in bekannten Beziehungen stehen, gezählt und gemessen werden. Zu einer solchen indirecten, erst mit Hülfe der Rechnung zu vollziehenden Grössenmessung greifen wir entweder, weil die directe Messung zu weitläufig, oder weil sie überhaupt unmöglich ist. Während wir bei der directen Grössenmessung auf die Anwendung des ursprünglichsten arithmetischen Verfahrens, der Addition, uns beschränken, ist schon die Entwicklung der übrigen einfachen arithmetischen Operationen durchaus an die Aufgaben der indirecten Grössenmessung gebunden. So sucht man z. B. bei der Subtraction zum Mass einer Grösse dadurch zu gelangen, dass man sie als die Differenz zweier anderer direct gemessener Grössen bestimmt. In diesem Sinne kann man sagen: Die Mathematik hat begonnen, sobald der menschliche Geist über die Stufe der Addition sich erhoben hatte. Die drei einfachen Operationen, welche sich zunächst an sie anschliessen, bilden, als

die einfachsten Fälle indirecter Grössenmessung, zugleich die Quellen, aus denen alle anderen mathematischen Methoden hervorgegangen sind.

Aber wenn sich auch ohne das Problem der indirecten Grössenmessung niemals das mathematische Denken entwickelt hätte, so wird doch keineswegs durch jenes Problem die wissenschaftliche Aufgabe der Mathematik erschöpfend bezeichnet. Schon Plato hat der Arithmetik und Geometrie andere Ziele gesteckt, als sie von der praktischen Rechen- und Messkunst verfolgt werden, und lange vor ihm spricht sich in dem Cultus der Zahlgesetze, wie ihn die Pythagoreische Schule geübt, ein dunkles Bewusstsein der Wahrheit aus, dass die Objecte der Mathematik um ihrer selbst willen ein wissenschaftliches Interesse besitzen. Die Geschichte hat diese Voraussicht bestätigt; denn heute beschäftigen sich ganze Zweige der mathematischen Untersuchung mit Fragen, bei denen es auf eine Grössenmessung keineswegs abgesehen wird. Bei den Betrachtungen der Zahlentheorie, des Functionencalcüls, der projectivischen Geometrie u. s. w. handelt es sich überall um die Feststellung der Eigenschaften der Begriffe und ihrer Beziehungen, während eine wirkliche Messung von Grössen höchstens in nebensächlicher Weise beabsichtigt wird. Nicht sie ist demnach der eigentliche Zweck der Mathematik, sondern diese stellt sich die weit allgemeinere Aufgabe, die denkbaren Gebilde der reinen Anschauung sowie die auf Grund der reinen Anschauung vollziehbaren formalen Begriffsconstructionen in Bezug auf alle ihre Eigenschaften und wechselseitigen Relationen einer erschöpfenden Untersuchung zu unterwerfen*).

Auf die Gliederung der Mathematik ist die allmählich eintretende bewusstere Erkenntniss dieser Aufgabe nicht ohne Einfluss gewesen. So lange der Ursprung aus der praktischen Rechen- und Messkunst noch nachwirkte, blieben Arithmetik und Geometrie ihre Hauptzweige. Die vielfachen Beziehungen zwischen beiden, die bald in der geometrischen Darstellung arithmetischer Sätze, bald in der arithmetischen Verwerthung geometrischer Resultate ihren Ausdruck fanden, führten endlich zu dem Gedanken der Grössenlehre als einer allgemeineren Disciplin, deren Voraussetzungen ebensowohl Zahlen- wie Raumgrössen umfassen sollten. Sie hat in der algebraischen Behandlung der Gleichungen eine zunächst noch vorwiegend durch arithmetische Gesichtspunkte bestimmte Form gewonnen, bis ihr durch Descartes' Erfindung der analytischen Geometrie ihre allgemeinere Bedeutung gesichert wurde. Diese Erfindung hat aber zugleich, in Folge der mit verstärkter Gewalt hervortretenden Nothwendigkeit der numerischen Ausmessung stetiger Raumgrössen, zu Erweiterungen des Zahlbegriffs geführt, durch welche derselbe allmählich vollständig mit dem Grössenbegriff selber sich deckte, so dass Newton bereits das Gebiet der seitherigen Algebra mit dem Namen der »Arithmetica universalis«

*) Ueber den Begriff der reinen Anschauung vgl. Bd. I, Abschn. V, Cap. 3.

belegen konnte. Der moderne Ausdruck Analysis (bei dem man zunächst an die analytische Methode der Logik nicht denken darf) umfasst diese aus der Algebra der arabischen Mathematiker allmählich emporgewachsene allgemeinste Disciplin der Mathematik in ihrem ganzen Umfange. Vermöge jener Erweiterungen des Zahlbegriffs bildet die Arithmetik nur noch einen Zweig der Analysis. Im selben Masse wie die alte Arithmetik ihre Selbständigkeit aufgab, machte sich aber das Erforderniss fühlbar, die Umwandlungen des Zahlbegriffs selbst sowie überhaupt dessen allgemeine Eigenschaften der Untersuchung zu unterwerfen. So entstand die heutige Zahlentheorie, dasjenige Gebiet der reinen Mathematik, welches praktischen Anwendungen und wirklichen Grössenmessungen beinahe am fernsten liegt, obgleich es sich gerade mit denjenigen Elementen beschäftigt, auf die schliesslich jede Messung zurückführt. Diesen Umgestaltungen der alten Arithmetik gegenüber hat die Geometrie in Bezug auf das Object ihrer Untersuchungen im Ganzen mehr ihren ursprünglichen Charakter bewahrt, so weit sie nicht der Analysis oder diese ihr dienstbar geworden ist. Immerhin sind auch hier Versuche einer analogen, aber die wesentlichen Eigenschaften des Geometrischen bewahrenden Behandlung hervorgetreten, indem man von allen sonstigen Eigenschaften des Raumes ausser der stetigen Ausdehnung abstrahirte und so der concreten Raumlehre eine allgemeinere Ausdehnungslehre überordnete*). Von hier ausgehend lag es dann nahe, auch das Stetige aus dem obersten Begriff zu entfernen, um Ausdehnungs- und Zahlenlehre als Gebiete zu behandeln, die nebst anderen denkbaren Begriffsconstructionen wieder in einer abstracten Mannigfaltigkeitslehre oder Formenlehre enthalten seien**). Diese letzte Begriffserweiterung führt zur Aufstellung einer allgemeinsten mathematischen Disciplin, als deren specielle Zweige alle einzelnen mathematischen Wissenschaften betrachtet werden können, und durch deren Inhalt daher auch die Aufgabe der Mathematik in der allgemeinsten Form bezeichnet sein muss. Die beiden oben gebrauchten Ausdrücke deuten diesen Inhalt in verschiedener Weise an, indem sie zugleich auf zwei Erfordernisse hinweisen, die bei den Gegenständen mathematischer Untersuchung erfüllt sein müssen. Das erste dieser Erfordernisse ist das Gegebensein einer Mannigfaltigkeit zusammen-

---

*) H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik, 2. Aufl., Leipzig 1878.

**) Den Ausdruck „Mannigfaltigkeitslehre“ hat Riemann, den Ausdruck „Formenlehre“ Grassmann zuerst eingeführt. B. Riemann's gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876. S. 255. Grassmann, Ausdehnungslehre. S. 1 f. Uebrigens hat Grassmann auch die Betrachtung der Zahlen in seine Ausdehnungslehre hineingezogen, indem er dieselben als „Ausdehnungsgrössen nullter Stufe“ (d. h. als Punkte) behandelte (a. a. O. S. 107). Vgl. hierzu noch G. Cantor, Crelle's Journal f. Mathematik, Bd. 84, S. 242, und die Aufsätze desselben Verf. in den mathematischen Annalen, Bd. 15—21.

gehöriger Denkobjecte, das zweite die rein formale, d. h. ausschliesslich die wechselseitigen Relationen der Denkobjecte, nicht ihre eigene concrete Beschaffenheit in Betracht ziehende Behandlungsweise. In diesem weitesten Umfange umfasst die Mathematik auch den formalen Theil der Logik, welcher eben darum vollständig einem mathematischen Algorithmus sich unterwerfen lässt. Da ferner alles in der Erfahrung Gegebene auf Relationen mannigfaltiger Denkobjecte zurückgeführt werden kann, so ist jede Erfahrungswissenschaft an und für sich einer formalen oder mathematischen Behandlungsweise zugänglich, wobei es jedoch selbstverständlich von äusseren Untersuchungsbedingungen abhängt, ob und in welchem Umfange diese mathematische Behandlung anwendbar ist. Dagegen ist die Mathematik selbst durchaus nicht auf die Untersuchung derjenigen formalen Relationen beschränkt, die sie an den Objecten der Erfahrung verwirklicht findet, sondern es steht ihr frei, die in der Erfahrung gegebenen Bedingungen beliebig zu erweitern oder zu verengern. Da sie eine rein logische Wissenschaft ist, so findet sie ihre Schranken immer nur an der formalen Ausführbarkeit der durch bestimmte Voraussetzungen geforderten Denkoperationen. Naturgemäss aber müssen diese Voraussetzungen stets anknüpfen an die in der Erfahrung gegebenen Relationen wirklicher Objecte; sie können nicht als völlige Neuschöpfungen auftreten, sondern nur als willkürliche Veränderungen gegebener Beziehungen. Desshalb hat auch die Ausbildung der mathematischen Methoden fast nur von denjenigen Aufgaben, welche dem Denken aus den mannigfaltigen Beziehungen der Erfahrungsobjecte erwuchsen, ihre Antriebe empfangen. Insbesondere lässt sich leicht zeigen, dass jede der fundamentaleren mathematischen Methoden aus bestimmten Rechnungs- oder Messungsaufgaben hervorgegangen ist, welche bald die Bedürfnisse des praktischen Lebens, bald die Probleme der Naturwissenschaft nahe legten.

So verdanken zunächst die zwei Hauptzweige der älteren Mathematik, Arithmetik und Geometrie, ihre Trennung und selbständige Ausbildung den verschiedenartigen Anforderungen, die der Handelsverkehr und die Aufgaben der Feldmessung an die Rechenkunst stellten. Auf diese Weise fügte es ein glücklicher Zufall, dass die äusseren Bedürfnisse, die der Mathematik ihre ersten Impulse gaben, mit jener naturgemässen Scheidung der Probleme zusammentrafen, welche in der Verschiedenheit der mathematischen Grundbegriffe selbst ihre Wurzel hat. Die discrete Zahl und die stetige Ausdehnung sind bis auf den heutigen Tag die heterogensten Begriffe der Mathematik geblieben, an deren Vermittlung die letztere in einer mehr als zweitausendjährigen Entwicklung gearbeitet hat. Jede Messung muss, wenn sie praktisch brauchbar sein soll, ein numerisches Resultat ergeben; aber die stetige Grösse fügt sich einer genauen Ausmessung nach ganzen Zahlen nur in glücklichen Ausnahmefällen. Diese Schwierigkeit würde vielleicht früher schon in empfindlicherer Weise fühlbar geworden sein, hätte nicht die nämliche Verschiedenheit der Begriffe, welche die erste Scheidung der mathematischen Gebiete bewirkte,

auch zu einer Verschiedenheit der mathematischen Begabung geführt, welche einer tieferen Auffassung der Beziehungen im Wege stand. Während der Grieche die Zahlverhältnisse räumlich darzustellen liebte und daher ohne Bedenken überall wo die Zahl nicht ausreichte zur geometrischen Anschauung griff, half sich der indische Rechner, wenn die gewohnten arithmetischen Operationen auf geometrische Objecte nicht ohne weiteres anwendbar waren, gelegentlich mit unzureichenden Näherungsmethoden*). Erst das aus den Anregungen indischer Arithmetik und griechischer Geometrie hervorgegangene Streben arabischer Algebristen, ebensowohl arithmetische Beziehungen geometrisch zu gestalten, wie geometrische Sätze in arithmetische Formen zu bringen, hat allmählich zu jener allgemeingültigen Form mathematischer Untersuchungen übergeführt, wie sie in der modernen Analysis Geometrie und Arithmetik gleichzeitig beherrscht und durch das Mittelglied der Geometrie selbst die physischen Vorgänge in das nämliche Gewand abstracter mathematischer Formeln kleidet. Bei den grossen Vortheilen, welche diese alle Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen umfassende Methode darbietet, ist es begreiflich, dass sie auf längere Zeit beinahe die Alleinherrschaft behauptete, indem insbesondere die constructiven Methoden der Geometrie Jahrhunderte lang auf der nämlichen Stufe stehen blieben, auf welche sie schon die Alten erhoben hatten. Da die Analysis die schwierigsten geometrischen und mechanischen Probleme zu lösen vermochte, so gab man sich mit den Resultaten zufrieden, gleichgültig ob die Anschauung dem Gang der analytischen Entwicklung zu folgen im Stande war oder nicht. Erst die synthetischen Methoden der neueren Geometrie haben in dieser Beziehung einen bedeutsamen Umschwung herbeigeführt. Indem sie zeigten, dass die Resultate mühseliger Rechnungen durch constructive Verfahrungsweisen oft leichter und anschaulicher zu erreichen, und dass analytische Entwicklungen Schritt für Schritt in räumliche Anschauungen übertragbar seien, haben sie die mit Descartes begonnene Verbindung abstracter Untersuchung und concreter Anwendung ihrer Vollendung entgegengeführt und der bis dahin vorherrschenden analytischen Behandlung die geometrische Anschauung als gleich berechtigtes und ihrerseits der Analysis neue Ideen zuführendes Hülfsmittel an die Seite gestellt. Unter dem Uebergewicht abstracter algebraischer Formeln hatte sich die geometrische Construction in einem steifen, die freie Bewegung hemmenden Gewande bewegt. Jetzt begann man überall nach den der Natur der Objecte angemessensten Constructionen zu suchen, in Folge deren dann auch wieder zweckmässigere arithmetische Methoden gefunden wurden. Die neu geübte geometrische Gestaltungskraft gestattete es, bisher todt liegende analytische Formen durch die Anschauung zu beleben, und Begriffen, deren Werth fast nur auf zufälligen Entdeckungen

*) Vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 546 f.

beruhte, wie den complexen Zahlen, eine reale anschauliche Bedeutung zu sichern. So ist auch die Arithmetik wieder, in ähnlicher Weise wie dereinst in der Blüthezeit hellenischer Mathematik, nur verändert durch die seitdem weit fortgeschrittene Entwicklung, überall von geometrischen Vorstellungen durchdrungen worden.

Die hier in flüchtigen Umrissen angedeutete Entwicklung des mathematischen Denkens macht es begreiflich, dass die logischen Methoden desselben in ihrer Entstehung einer bestimmten Gesetzmässigkeit gefolgt sind. Dabei ist zwar nicht selten eine ältere Methode vor einer neu auftauchenden in den Schatten getreten; im allgemeinen aber wird das Neue dem Schatz des bereits Erworbenen zugefügt und lässt diesen selbst an Werth und Verwendbarkeit zunehmen. In dieser Sicherheit ihrer Entwicklung, ebenso wie in ihrem ganzen Aufbau, ist die Mathematik die logisch vollendetste Wissenschaft; sie steht ausserdem noch desshalb der Logik am nächsten, weil sie nichts anderes als die logische Untersuchung der allgemeinen Anschauungsformen und der mit ihrer Hülfe vollziehbaren Begriffsconstructionen zu ihrem Gegenstande hat. Um so mehr ist es erforderlich, hier die Grenze scharf zu bezeichnen, welche die Logik der Mathematik von der Mathematik selber trennt. Insofern die mathematischen Grundbegriffe und Methoden zum Zweck der Lösung der oben bezeichneten Probleme entwickelt und angewandt werden, sind sie ganz und gar Gegenstand der mathematischen Untersuchung. Insofern man aber nach dem logischen Ursprung jener Begriffe und Methoden und nach ihrem Verhältniss zu den allgemeinen Gesetzen des Denkens frägt, werden sie Objecte der Logik. Darin liegt zugleich eingeschlossen, dass sich die Logik auf die Untersuchung der allgemeinen Principien der mathematischen Methodik beschränken muss. Auch wird diese Arbeitstheilung von Seiten der Mathematik thatsächlich eingehalten, da dieselbe gerade den principiellen logischen Fragen meist aus dem Wege geht oder höchstens gelegentlich sie berührt, wenn etwa zufällig einmal der Mathematiker zugleich zum Logiker wird.

Die Logik der Mathematik kann nun aber ihrerseits wieder von zwei Gesichtspunkten ausgehen. Erstens kann sie fragen, welche Formen die allgemeinen Methoden der wissenschaftlichen Forschung in ihrer Anwendung auf das mathematische Untersuchungsgebiet annehmen. Die aus dieser Frage entspringenden Betrachtungen, welche die Untersuchung der mathematischen Analyse und Synthese, Abstraction, Induction und Deduction zu ihrem Gegenstande haben, weisen wir der im gegenwärtigen Capitel zu behandelnden allgemeinen mathematischen Methodenlehre zu. Sodann kann zweitens der logische Charakter der in den einzelnen Hauptgebieten der Mathematik herrschenden Methoden untersucht werden. Dies ist die Aufgabe einer speciellen mathematischen Methodenlehre, mit der sich die folgenden Capitel beschäftigen sollen.

## 2. Die mathematische Analyse und Synthese.

Die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Methode ist von Euklid, zum Theil nach Platonischem Vorbilde, in die Mathematik eingeführt worden. Analysis und Synthesis sind bei ihm die beiden Unterformen der syllogistischen Beweismethode. Bei der Analysis nimmt man das zu beweisende als zugestanden an und zeigt, dass die daraus gezogenen Folgerungen mit allgemein als wahr anerkannten Sätzen übereinstimmen. Bei der Synthesis geht man von als wahr anerkannten Sätzen aus und zeigt, dass die Folgerungen den zu beweisenden Satz enthalten*). Beide Methoden fügen sich bei Euklid in das nämliche vielgliederige Schema von Definitionen, Axiomen, Theoremen und Problemen, und es ist klar, dass in beiden Fällen der zu beweisende Satz existiren muss, ehe der Beweis angetreten wird, dass sie also Demonstrations-, nicht Untersuchungsmethoden sind. Zugleich hat die synthetische Methode einen unverkennbaren Vorzug dadurch, dass sie stets zu einem bindenden Beweise führt, während das analytische Verfahren nur dann unbedingt richtige Folgerungen gestattet, wenn der Beweis ein indirecter oder apagogischer ist. Der directe analytische Beweisgang dagegen wird nur in dem Falle zwingend, wenn das Verhältniss von Grund und Folge zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung ist, so dass die Folge als Grund den Grund als Folge hervorbringen würde. Gerade desshalb aber kann der directe analytische Beweis bei Euklid stets durch einen synthetischen ersetzt werden.

Eine wesentlich andere Bedeutung gewinnt die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Methode erst bei Descartes. Analysis nennt er dasjenige Verfahren, durch welches das Wesen eines Gegenstandes unmittelbar erforscht werde, und welches daher auch beim Unterricht der Mathematik zu bevorzugen sei, weil es den Schüler selbst den Weg der Erfindung führe. In seiner Geometrie hat er ein mustergültiges Beispiel dieser Methode aufgestellt. Ueberall besteht hier die Analyse in einer zweckmässigen Zerlegung des Ganzen, dessen Untersuchung in Frage steht, in Elemente und eventuell in der constructiven Hinzufügung anderer Elemente, welche zusammen mit den gegebenen eine vollständige Bestimmung der Eigenschaften des untersuchten Gebildes möglich machen. Zugleich aber hält es Descartes für wesentlich, dass diese analytische Untersuchung in der allgemeinsten Form geführt werde, damit die Beschaffenheit der Verstandesoperationen und die allgemeine Bedeutung der Resultate deutlich hervortrete. In diesem Sinne macht er der Analysis der Alten den Vorwurf, dass sie den Geist an die Betrachtung der Figuren gebunden und darum die Einbildungskraft ermüdet, aber die Uebung des Verstandes verabsäumt habe; und seine eigene Methode bezeichnet er als ein Verfahren,

---

*) Euklid's Elemente, XIII, 1, und oben Abschn. I, S. 61.

welches, die Analysis der Alten mit der Algebra der Neueren und der syllogistischen Kunst verbindend, die Vortheile dieser aller wahrnehme und ihre Fehler vermeide*). So äusserlich diese Definition auch erscheinen mag, so deutet sie doch vollkommen treffend den Charakter der neueren Analysis an, zu welcher Descartes' Geometrie den Grund gelegt hat. Gerade das Princip der analytischen Methode Plato's und Euklid's, dass das Gesuchte als bereits gegeben vorausgesetzt werde, ist eines der mächtigsten Werkzeuge auch dieser Analysis. Aber die eigentliche Quelle seiner Anwendungen liegt hier wie in anderen Fällen schon in der Einführung der algebraischen Symbolik. Indem das Buchstabensymbol jede beliebige unbekannte oder veränderliche Grösse bezeichnen kann, ist es ein überall brauchbares Hülfsmittel, um das Gesuchte in der Rechnung so zu verwenden, als wenn es gefunden wäre. Schon vor Descartes hatte sich daher das analytische Verfahren in den algebraischen Methoden zur Lösung der Gleichungen praktische Geltung verschafft. Doch bewegen sich diese Anwendungen ausschliesslich auf arithmetischem Gebiete, und es bleibt so Descartes das Verdienst, dass er zuerst mit durchschlagendem Erfolg die allgemeinere Anwendbarkeit der algebraischen Symbolik kennen lehrte. Erst die Einführung dieser Symbolik machte aber die Analysis zu einem der Synthesis logisch gleichwerthigen Verfahren. Die Analysis der Alten war, als ein Schluss von der Folge auf den Grund, wegen der Mehrdeutigkeit dieser Schlussform im allgemeinen unsicherer und eben darum von beschränkterer Anwendung gewesen als die Synthesis. Dieser Unterschied besteht für die neuere Analysis nicht mehr: hier ist ein analytisch gewonnener Satz von ebenso zwingender Gewissheit wie das Resultat einer synthetischen Demonstration. Die Analysis der Alten hatte sich in geometrischen Constructionen bewegt, deren Ergebnisse in einer Reihe von Bedingungsurtheilen niedergelegt waren. Sollte hier ein directer Beweis in bindender Weise geführt werden, so war zu prüfen, ob jedes Bedingungsurtheil zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung enthalte, also umkehrbar sei. Diese Prüfung wurde hinfällig, sobald für jede Art mathematischer Untersuchungen der abstracte arithmetische Ausdruck in Anwendung kam. Denn nun trat an die Stelle des Bedingungsurtheils die algebraische Gleichung, welche, da sie stets umkehrbar sein muss, bei ihrer Aufstellung bereits jene Prüfung bestanden hat. War aber die Analysis erst in Bezug auf Strenge der Beweise der synthetischen Methode ebenbürtig geworden, so konnte es nicht fehlen, dass sie bei ihren sonstigen Vorzügen bald den Vorrang behauptete. Nur als Beweisverfahren hat die synthetische Methode Euklid's noch lange Zeit die Herrschaft behalten, und nicht selten mussten, wie das Beispiel Newton's zeigt, Untersuchungen, die auf analytischem Wege geführt waren, sich die mühselige Umprägung in Euklidische Demonstrationen gefallen lassen.

*) Discours de la méthode. Oeuvr. publ. par Cousin, I, p. 140.

Im Gefolge dieser allmählichen Erweiterung ihrer Anwendungen erweiterte sich zugleich der Begriff der Methode selbst. Die bei dem Gebrauch der algebraischen Symbolik vorausgesetzte Maxime, die gesuchten Grössen ebenso wie die bereits gegebenen in die Rechnung einzuführen, wurde, weil als ein selbstverständliches, zugleich als nebensächliches Element angesehen. Indem sich die Demonstrations- in eine Untersuchungsmethode umwandelte, konnte nicht mehr die Stellung des Beweisobjectes, sondern nur noch das wechselseitige logische Verhältniss der auf einander folgenden Sätze entscheiden. Hier aber erwies sich überall der Fortschritt vom Zusammengesetzten zum Einfachen, vom Besonderen zum Allgemeinen als das charakteristische Merkmal der Analyse, der umgekehrte Weg als derjenige der Synthese. In dieser allgemeineren, aber dem logischen Sinn der Ausdrücke vollkommen entsprechenden Weise fassten daher namentlich Newton und Leibniz den Unterschied beider Methoden auf*).

Wie nun in der Regel die fertigen Begriffe mannigfache Spuren ihrer Vergangenheit an sich tragen, so gilt dies vielleicht von wenig Begriffen in so hohem Masse wie von dem der Analysis in der Mathematik. Die ganze Geschichte desselben scheint sich in seiner heutigen Bedeutung verdichtet zu haben. Eine weitere Erschwerung ist noch durch den Umstand eingetreten, dass der nämliche Ausdruck, der ursprünglich nur auf eine Methode bezogen wurde, nunmehr zur Bezeichnung der ganzen Disciplin dient, in welcher jene Methode vorzugsweise zur Anwendung kommt, in welcher aber selbstverständlich auch solche Verfahrungsweisen, die ihrem logischen Charakter nach synthetische genannt werden müssen, keineswegs ausgeschlossen sind. Bleiben wir hier bei der methodologischen Bedeutung des Begriffes stehen, so werden sich nach dem Obigen hauptsächlich drei Kriterien der analytischen Methode unterscheiden lassen. Das erste besteht in der allgemeinen logischen Eigenschaft, dass sie den Weg von dem Zusammengesetzten zu dem Einfachen einschlägt; das zweite in der Wahl einer gleichförmigen, für die formale Ausführung der arithmetischen Operationen geeigneten Symbolik, welche alle Bedingungsurtheile in Gleichungen umwandelt und dadurch den Schlussfolgerungen eine eindeutige Form giebt; endlich das dritte in dem Euklidischen Princip, dass das Gesuchte gefunden wird, indem man es als gegeben voraussetzt. Diese drei Kennzeichen der analytischen Methode stehen in innigem Zusammenhange mit einander. Sobald eines gegeben war, mussten daher die anderen allmählich von selbst entdeckt werden. Aber es ist bemerkenswerth, dass sie nicht in der soeben angegebenen Reihenfolge ihrer logischen Wichtigkeit, sondern in der umgekehrten, die specielleren voran, das allgemeinste zuletzt, zur Entwicklung gelangt sind.

Im Verhältniss zu der Ausbildung der Analysis ist nun die Synthesis,

---

*) Newton, Optice. Lib. III, quaestio XXXI. Ed. Lausann. 1740, p. 329. Leibniz, Math. Werke. Ausgabe von Gerhardt. III, S. 206.

als mathematische Methode betrachtet, verhältnissmässig lange zurückgeblieben. Augenscheinlich war es hier der Einfluss Euklid's, welcher einer freieren Auffassung im Wege stand. Während man längst in dem analytischen Verfahren eine Forschungsmethode erkannt hatte, welche sich nur gelegentlich zugleich in eine Darstellungsmethode verwandeln könne, hatte man bei dem synthetischen Verfahren die geometrische Demonstration im Auge. Nur hieraus erklärt es sich, dass noch Newton der Analyse ausdrücklich den zeitlichen Vorrang vor der Synthese einräumt. Nichts desto weniger findet diese Auffassung im Grunde schon in den einfachsten arithmetischen Operationen ihre Widerlegung. Die Addition, Multiplication und Potenzirung sind synthetische Verfahrungsweisen, und sie sind zweifellos früher als die zu ihnen inversen Operationen der Subtraction, Division und Radicirung, welche als analytische bezeichnet werden können. Aber diese einfachen Operationen setzte man als gegeben voraus, man betrachtete sie als Hülfsmittel, deren sich jede Methode bedienen müsse, die aber nicht selbst den Rang von Methoden beanspruchen können. Obgleich daher in Wahrheit in Arithmetik und Zahlentheorie synthetische Methoden eine nicht geringe Rolle spielen, so ist doch auch hier die Geometrie es gewesen, in welcher die Erkenntniss reifte, dass die Synthesis ebenfalls den Werth einer Forschungsmethode besitzen könne. Fasst man bei Euklid nicht die äussere Form der Demonstration, sondern die Untersuchungsmethoden selbst ins Auge, wie dieselben vor allem in seinen geometrischen Constructionen zu Tage treten, so kann kein Zweifel bleiben, dass hier das herrschende Verfahren das analytische ist. (Vgl. unten Cap. III.) Im Gegensatze hierzu ist nun diejenige Richtung der neueren Geometrie, die sich selbst die synthetische nennt, bestrebt gewesen, ihre einzelnen Constructionen in einen systematischen Zusammenhang zu bringen, in welchem aus den einfachsten Raumgebilden allmählich die zusammengesetzteren hervorgehen. Hier ist aber zugleich die synthetische Methode zur Forschungsmethode geworden, und als Darstellungsmethode empfiehlt sie sich nur unter dem nämlichen Gesichtspunkte, unter welchem Descartes auch die analytische empfohlen hat, und unter welchem das Demonstrationsverfahren Euklid's bestreitbar ist, insofern nämlich als im allgemeinen der zweckmässigste Weg zur Nachweisung der Wahrheit in der Reproduction ihrer Auffindung besteht.

Unzweifelhaft ist nun die synthetische Methode in diesem neuen Sinne nicht auf die Geometrie beschränkt, sondern sie erstreckt sich über alle Gebiete der Mathematik. Zu einer consequenten Anwendung derselben scheint aber allerdings eine anschauliche Beschaffenheit der Untersuchungsobjecte erforderlich zu sein. Dafür spricht schon der Umstand, dass sie bei den complicirteren Aufgaben der höheren Geometrie wachsenden Schwierigkeiten begegnet, so dass sie hier hinter der analytischen Behandlung zurückstehen muss. Diese Bedingung der Anschaulichkeit resultirt aus dem der synthetischen Methode eigenthümlichen Constructionsverfahren, welches stets voraussetzt, dass irgend ein zusammengesetztes Ganze in

leicht zu übersehender Weise aus der Synthese seiner Elemente gewonnen werde. Neben der Geometrie ist es daher die Mechanik, deren elementare Probleme eine synthetische Behandlung gestatten, wie denn auch in die nach ihrem vorherrschenden Charakter so genannte analytische Mechanik und nicht minder in die analytische Geometrie Constructionen von synthetischem Charakter eingehen. Von den aus der Arithmetik hervorgegangenen Gebieten ist es hauptsächlich die Zahlentheorie, die bei ihrer Beschäftigung mit den einzelnen Zahlbegriffen und Zahlgesetzen synthetischen Untersuchungen zugänglich oder sogar auf sie angewiesen ist.

Hiernach kann, wenn wir die beiden Methoden unter übereinstimmenden Bedingungen ihrer Anwendung vergleichen, von einer zeitlichen Priorität der Analysis im Sinne Newton's nicht mehr die Rede sein. Vielmehr zeigen sich zahlreiche Probleme ebensowohl der synthetischen wie der analytischen Behandlung zugänglich. Nur bei den fundamentalsten Aufgaben gewinnt die synthetische Methode einen Vorrang und wird bei der Ableitung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze ausschliesslich verwendbar, während umgekehrt bei der Untersuchung sehr zusammengesetzter Objecte die Analysis die näher liegende und manchmal sogar, freilich mehr aus praktischen als rein theoretischen Gründen, die allein brauchbare Methode ist.

Mit diesem Verhältniss, welches nahezu eine Umkehrung der früheren Auffassung in sich schliesst, hängt ein weiterer Unterschied der modernen Begriffe von den älteren zusammen. Nach den letzteren stehen Analysis und Synthesis beide im Dienste der Deduction. Jede dieser Methoden setzt die Principien, aus denen Folgesätze abgeleitet oder Beweise geführt werden sollen, als gegeben voraus. Nicht nur die Definitionen und Axiome der Arithmetik und Geometrie, sondern auch alle möglichen einzelnen Zahlformeln und mit Lineal und Cirkel im Raume ausführbaren Constructionen, die letzteren von Euklid zum Theil als Postulate bezeichnet, gelten als ein ursprüngliches Inventar, über welches die mathematische Deduction beliebig verfügen könne. Wesentlich anders gestaltet sich die Sache, wenn man, wie es in der neueren Mathematik geschieht, auf beiden Gebieten den genetischen Standpunkt zur Geltung bringt. Es erhebt sich dann nothwendig die Frage, wie jenes ursprüngliche Inventar selber entstanden ist, und wie seine einzelnen Bestandtheile mit einander zusammenhängen oder aus einander hervorgehen. Hier ist es nun gerade auf der einen Seite die Zahlentheorie, auf der andern die synthetische Geometrie, welche in ihren grundlegenden Theilen jene Frage zu beantworten suchen. Dadurch gelangt in beiden das logische Verfahren der Induction zu umfassender Geltung. Auch die inductiven Operationen der Mathematik sind aber theils synthetischer, theils analytischer Art, wie dies schon an den vier arithmetischen Fundamentaloperationen zu sehen ist, deren einzelne Sätze nicht bloss durch Induction gefunden sind, sondern auch allein auf inductivem Wege bewiesen werden können.

## 3. Die mathematische Induction und Abstraction.

### a. Der mathematische Realismus und Nominalismus.

Bis in die neueste Zeit sind Mathematiker und Philosophen darin einig gewesen, in der Mathematik das Vorbild einer deductiven Wissenschaft zu sehen, welche nur in einigen seltenen Fällen die so genannte vollständige Induction zu Hülfe nehme. Um so weiter haben sich die Anschauungen über die Natur der Voraussetzungen, von denen die mathematische Deduction auszugehen habe, von einander entfernt. Bald gilt die Mathematik desshalb als das Ideal einer Wissenschaft, weil ihre Fundamentalsätze durch ihre Evidenz und Allgemeingültigkeit auf eine dem Zufall wechselnder Erfahrungen entrückte Quelle der Erkenntniss in dem menschlichen Geiste selbst hinzuweisen scheinen. Bald behandelt man die Principien der mathematischen Deduction als empirisch entstandene, aber durch willkürliche Annahmen von den Erfahrungsobjecten abweichende Vorstellungen. Damit ist die metaphysische Verwerthung der Mathematik beseitigt, und gleichwohl behält diese den Erfahrungswissenschaften gegenüber eine Ausnahmestellung, wie sie für die apodiktische Geltung ihrer Sätze unerlässlich scheint. Beide Auffassungen begegnen sich daher in der Ueberzeugung, dass die Gewissheit der Mathematik auf der Unveränderlichkeit ihrer Voraussetzungen beruhe. Aber diese Voraussetzungen erscheinen dort als eingeborene Gesetze des Geistes, welche dieser vielleicht aus einem überempirischen Dasein mitbringt, und in denen man darum geneigt ist gleichzeitig ursprüngliche Weltgesetze zu erblicken; hier verdanken sie ihre allgemeinere Geltung der Uebereinkunft der Menschen und höchstens noch der praktischen Anwendbarkeit auf empirische Objecte. Darum besitzt in diesem Fall das mathematische Wissen einen subjectiven und hypothetischen, gerade desshalb aber zugleich einen exacten Charakter: denn nur unsere subjective Willkür kann den Begriffen jene Constanz sichern, die zu einer exacten Beweisführung erfordert wird. Für beide Anschauungen erscheinen in diesen ihren Anwendungen auf das Gebiet der mathematischen Vorstellungen noch heute die alten Bezeichnungen des Realismus und Nominalismus als die passendsten*). Denn

---

*) In seiner „allgemeinen Functionentheorie" (Tübingen 1882, Th.I, S. 58 f.) hat Paul du Bois Reymond für die nämlichen Gegensätze, insofern dieselben bei den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode zur Geltung kommen, die Ausdrücke Idealismus und Empirismus gewählt. Ich habe es vorgezogen, die Namen des mathematischen Realismus und Nominalismus, die ich in einem vor dem Erscheinen des soeben genannten Werkes veröffentlichten Aufsatze (Philosophische Studien, I, S. 105) schon gebraucht habe, beizubehalten, da die philosophischen Richtungen des Idealismus und Empirismus zwar häufig, aber keineswegs immer mit den hier gemeinten Gegensätzen zu-

nach der einen Ansicht beruht die Bedeutung der mathematischen Ideen wesentlich auf ihrer realen Existenz im Geiste; die andere leugnet diese reale Existenz, jene Ideen gelten ihr als willkürliche Schöpfungen, welche durch die für sie eingeführten Namen oder sonstigen Symbole die erforderliche Constanz erst empfangen. Dieser mathematische Realismus und Nominalismus sind aber beide nicht unverändert geblieben, sondern sie haben Wandlungen erfahren, durch die sie sich im Laufe der Zeit einander genähert haben.

Der Realismus Descartes' trägt in mancher Beziehung noch die Züge der Platonischen Ideenlehre. Die sinnlichen Objecte können nur darum mathematische Ideen in uns hervorrufen, weil diese vorher in unserem Geiste gelegen waren. Die Art, wie dieselben durch die äusseren Eindrücke erweckt werden, schildert er deutlich als eine Art von Wiedererinnerung*). Ueber das Verhältniss der angeborenen Ideen zu den sinnlichen Bildern, die ihnen entsprechen, spricht er sich nirgends in unzweideutiger Weise aus. Im allgemeinen scheint er sich jene ebenfalls in der Form von Anschauungen gedacht zu haben. Zuweilen aber weisen seine Aeusserungen mehr auf eine bloss begriffliche Existenz derselben hin. Von dem Tausendeck z. B. sollen wir eine vollkommen klare Idee besitzen, obgleich es unmöglich sei, dasselbe mit der Einbildungskraft vorzustellen. Aehnlich unbestimmt bleibt überhaupt, was er eine »klare Idee« nennt. So sehr er es betont, dass die Klarheit der mathematischen Vorstellungen ihren auszeichnenden Charakter bilde, der zugleich auf ihren überempirischen Ursprung hinweise, so wenig hat er sich bemüht, diesen Begriff der Klarheit sicher zu definiren. Nur dies kann als eine bemerkenswerthe Bestimmung angesehen werden, dass die klare Idee für uns immer die nämliche überzeugende Kraft besitze, so oft wir auch ihr uns zuwenden. Offenbar ist also die Unveränderlichkeit ein sie auszeichnendes Merkmal.

Entschiedener nun als Descartes betont es Leibniz, dass die mathematischen Ideen, um in unserem Geiste lebendig zu werden, der sie auslösenden Einwirkung der Erfahrungsobjecte bedürfen. Deutlicher aber zugleich scheidet er die ursprüngliche Natur jener Ideen von den sinnlichen Bildern, in denen sie sich in der Erfahrung verwirklichen. Die ursprüngliche Existenz der Ideen ist ihm eine rein begriffliche. Hierfür liegt ihm der unumstössliche Beleg darin, dass Bild und Begriff vollkommen von einander verschieden sind**). Der Begriff des Dreiecks fällt ebenso

---

sammentreffen, wie sie denn auch selbst keine Gegensätze bilden. Berkeley z. B. ist als Philosoph bekanntlich Idealist und Empirist zugleich, daneben huldigt er in mathematischer Beziehung einem entschiedenen Nominalismus.

*) Rép. aux. cinq. obj. (Desc. à Gassendi). Oeuvr. publ. par Cousin, II, p. 290.

**) Nouv. ess. I, 1. IV, 17. Vgl. ausserdem namentlich die unter den Titeln „Initia mathematica" und „Mathesis universalis" mitgetheilten Schriften. Math. Werke, Ausg. von Gerhardt, VII, S. 17 f.

wenig mit dem einzelnen Dreieck zusammen wie die Zahl mit den gezählten Objecten. Demnach denkt sich Leibniz nun die Entwicklung der mathematischen Ideen keineswegs mehr in der Form einer Wiedererinnerung, bei welcher eine Gleichheit zwischen dem Eindruck und der zurückgerufenen Idee vorauszusetzen wäre; sondern die sinnlichen Bilder sind bei ihm vielmehr Gelegenheitsursachen, bei denen wir uns ursprünglich in uns liegender Begriffe bewusst werden. Darum ist ihm die mathematische Untersuchung um so vollkommener, je abstracter sie geführt wird; denn in gleichem Masse nähert sie sich einer adäquaten Vorstellung der in uns liegenden Begriffe. In diesem Sinne stellt Leibniz gelegentlich der wissenschaftlichen eine empirische Geometrie gegenüber, welche nicht wie jene durch den logischen Beweis, sondern durch die unmittelbare Anschauung zu überzeugen sucht*). Aus dem gleichen Grunde schätzt er die Euklidische Demonstrationsmethode; nur scheint es ihm, dass einzelne der Euklidischen Axiome eine Deduction aus abstracteren Axiomen und Definitionen gestatten, und er macht in dieser Beziehung verschiedene Versuche, das Euklidische System zu verbessern**). Die Thatsache, dass schliesslich auch die Euklidischen Demonstrationen auf die Ueberzeugung durch unmittelbare Anschauung zurückführen, gesteht er ebenso wenig zu wie den inductiven Ursprung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze. Solche Sätze sind nach ihm intuitiv gewiss; man muss sie anerkennen, sobald man nur die Aufmerksamkeit auf sie wendet.

Durch die entschiedene Hervorkehrung der begrifflichen Natur der mathematischen Ideen scheidet sich Leibniz wesentlich von Descartes. Freilich hatte auch dieser schon die algebraische Behandlung der Geometrie in der Absicht eingeführt, dadurch die geometrischen Gesetze auf eine abstracte und rein begriffliche Form zurückzuführen. Aber er tadelt ebenso die Unfähigkeit der früheren Algebristen, ihren Formeln eine anschauliche Anwendung zu geben, und seine Geometrie verfolgt daher den doppelten Zweck einer analytischen Untersuchung geometrischer Objecte und einer geometrischen Darstellung algebraischer Gleichungen. Bei Leibniz gilt die analytische Behandlung in jeder Beziehung als die vorzüglichere. Aus diesem Grunde zieht er schon die Arithmetik als die abstractere Disciplin der Geometrie vor, und unter den Euklidischen Axiomen bevorzugt er diejenigen, die den Charakter abstracter Grössenaxiome besitzen. So eröffnet Leibniz in der Entwicklung der neueren Mathematik jene Periode unbedingter Herrschaft der Analysis, welche später in Euler und Lagrange culminirte, und in welcher man es sich zu besonderem Ruhme anrechnete, in der Mechanik und wo möglich sogar in der Geometrie der Figuren entrathen zu können. Diese ganze Richtung hat in jener Ansicht von der begrifflichen Natur der mathematischen Principien ihre ursprüngliche Quelle.

---

*) Opera philos., ed. Erdmann, p. 382.

**) Opera philos., ed. Erdmann, p. 81 Nota. Math. Werke, Ausg. von Gerhardt, VII, S. 260 f. Specimen Geometriae luciferae.

Gerade die Schroffheit, mit welcher Leibniz die nach ihm an sich der Anschaulichkeit völlig entbehrenden Grundbegriffe von ihren anschaulichen Anwendungen scheidet, verwickelt nun aber den Realismus in neue Schwierigkeiten. Sind die ursprünglichen Ideen selbst anschaulicher Natur, so liefert der psychologische Mechanismus der Reproduction ein immerhin verständliches Schema für die Rückbeziehung des unmittelbar Angeschauten auf eine idealere Form. Der abstracte Begriff mit realer Existenz gedacht ist aber gegenüber dem sinnlichen Object ein völlig Incommensurables. Diese Anschauung ist mystisch, denn sie setzt hinter die Welt der Vorstellungen noch einmal eine Welt völlig unvorstellbarer Ideen, und es bleibt unbegreiflich, wie das vorgestellte Object die unvorstellbare Idee im Bewusstsein soll erwecken können. So erschien es denn dringend geboten, die Incongruenz zwischen Idee und Bild wieder zu beseitigen, der Idee ihre anschauliche Natur wiederzugeben, um ihre Beziehung zu den sinnlichen Objecten erklärlich zu machen. Diesen letzten Schritt in der Entwicklung des mathematischen Realismus hat Kant gethan mit seiner Lehre von der reinen Anschauung und den Anschauungsformen.

Es ist ohne Zweifel einer der glücklichsten Griffe Kant's gewesen, dass er von der vielgestaltigen Menge der einzelnen mathematischen Ideen zurückging auf die Grundlagen, auf die sie sich alle beziehen müssen, auf die Raum- und Zeitanschauung. Schon die Zahl, die der Mathematiker in den Vordergrund zu stellen pflegt, giebt nach Kant durch die Zusammenfassung der auf einander folgenden Zeitpunkte dem Begriff der Quantität eine anschauliche Form, und sie ist daher ein secundäres Erzeugniss jenes Begriffsschematismus, welcher überall erst die allgemeinen Begriffe durch ihre Darstellung in Formen des Zeitverlaufs anwendbar machen soll auf die sinnliche Erfahrung. Die Bewegung vollends setzt nicht nur Zeit und Raum, sondern auch die Wahrnehmung eines beweglichen Etwas voraus, und er behauptet daher, dass sie im Unterschied von Zeit und Raum, die aller Erfahrung vorausgehen, ein empirischer Begriff sei*). Endlich die einzelnen arithmetischen Operationen, die einzelnen geometrischen Gebilde sind nach Kant durchaus nur Constructionen innerhalb der reinen Zeit- und Raumanschauung, zu denen wir durch den Eindruck empirischer Objecte veranlasst werden, und bei deren Ausführung wir uns daher ebensolcher Objecte bedienen müssen**). Die unendliche Menge mathematischer Ideen, welche der vorangegangene Realismus als ein angeborenes Besitzthum des Geistes angesehen hatte, beschränkt sich also bei Kant auf die reine Raum- und Zeitanschauung. Diese allein sind a priori gegeben, und die Zeitanschauung vermittelt überdies noch durch ihre Verbindung mit der Kategorie der Quantität den reinen Begriff der

*) Kritik der reinen Vern., 2. Aufl., S. 58.

**) Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik. Ausg. von Rosenkranz, S. 19.

Zahl. Alles Weitere dagegen besteht in Vorstellungen, die durch »Einschränkungen« jener allgemeinen Anschauungen entstehen, zu welchen Einschränkungen wir durch einzelne sinnliche Wahrnehmungen veranlasst werden. Indem wir an dem sinnlichen Object dasjenige auffassen, was an ihm der reinen Anschauung angehört, entsteht der Gegenstand des mathematischen Begriffs, der in dem äusseren Object nur seine Gelegenheitsursache hat, sonst aber ganz und gar der reinen Anschauung angehört. Auf diese Weise wird z. B. das sinnliche Dreieck Anlass zur Bildung der Idee des geometrischen Dreiecks. Die mathematischen Definitionen und Axiome sind Sätze, die sich auf die Verbindung der Bestandtheile der reinen Anschauung beziehen, und sie sind daher nach Kant's prägnantem Ausdruck »synthetische Urtheile a priori«.

Diese fundamentale Reform der realistischen Lehre unterscheidet sich von der vorangegangenen Gestaltung derselben bei Leibniz hauptsächlich dadurch, dass der ursprüngliche Besitzstand des Geistes an mathematischen Ideen nicht mehr als ein begrifflicher, sondern als ein anschaulicher angesehen wird. Kant's Bemühen ist daher überall darauf gerichtet, die anschauliche Natur der mathematischen Operationen und Demonstrationen darzuthun, und er weist im sichtlichen Gegensatze zu Leibniz darauf hin, wie gerade auch bei Euklid der Beweis schliesslich an die unmittelbare Anschauung appellire*). Alle weiteren Unterschiede haben hierin ihre Quelle. Besteht der ursprüngliche Besitz des Geistes, aus welchem die Mathematik schöpft, in Anschauungen und nicht in Begriffen, so genügt es, die allgemeinen Anschauungsformen als ursprüngliche zu betrachten, aus denen sich die einzelnen mathematischen Vorstellungen entwickeln können. Damit wird auch der Einfluss der Erfahrungsobjecte ein anderer; diese wirken nicht mehr nach Analogie der psychologischen Reproduction, sondern sie erwecken jene Thätigkeit der reinen Einbildungskraft, welche die äusseren Objecte gewissermassen in die reine Anschauung überträgt, indem sie lediglich dasjenige nacherzeugt, was an ihnen der Raum- und Zeitform angehört. Ist auf diese Weise die Thätigkeit, welche mathematische Gebilde schafft, von constructiver Natur, so besitzen aber auch nothwendig die mathematischen Fundamentalsätze den Charakter synthetischer Urtheile. Jene einschränkende Thätigkeit, welche die Einbildungskraft an den Anschauungsformen ausübt, um die einzelnen Objecte der mathemathischen Betrachtung hervorzubringen, muss zugleich ein Zusammenfügen der einzelnen Elemente sein, aus denen die Objecte bestehen. So entsteht jede einzelne Zahl aus der Verbindung ihrer Einheiten, jede geometrische Figur aus der Verbindung der einfacheren Raumgebilde, die zu ihrer Construction verwendet werden. In dieser starken Betonung der synthetischen Grundlagen der Mathematik kündet sich in der Lehre Kant's schon das Ende jener Alleinherrschaft der Analysis an, welche mit Leibniz begonnen hatte.

---

*) Kritik der reinen Vern., 2. Aufl., S. 39.

Von so unbestreitbarer Wahrheit nun aber auch die Behauptung der synthetischen Natur der mathematischen Fundamentalsätze ist, so ist doch die Grundlage, auf welcher das ganze Gebäude von Kant's Philosophie der Mathematik ruht, die Apriorität der Anschauungsformen, von ihm nicht bewiesen worden. Seine beiden Argumente, dass die Vorstellungen räumlicher und zeitlicher Objecte die allgemeinen Vorstellungen von Raum und Zeit als Bedingungen voraussetzen, und dass alle mathematischen Sätze einen apodiktischen, also über die Zufälligkeit der Erfahrung hinausweisenden Charakter besitzen, sind hinfällig. Denn allerdings kann das Einzelne in Raum und Zeit nicht vorgestellt werden, ohne dass die Raum- und Zeitanschauung vorhanden wären; aber dadurch wird nicht ausgeschlossen, dass sich diese an und mit den einzelnen Vorstellungen gleichzeitig entwickeln, und insofern es keine Anschauungsformen giebt ohne einen Empfindungsinhalt, ist diese letztere Annahme die zunächst gebotene. Apodiktisch aber ist das ausnahmslos Gültige; der apodiktische Charakter mathematischer Sätze wird daher vollkommen zureichend durch die Thatsache erklärt, dass sie sich auf die constanten Bestandtheile aller Erfahrung beziehen. (Vgl. Bd. I, S. 431, 452.) Hat also auch Kant den anschaulichen und darum synthetischen Charakter der mathematischen Fundamentalsätze vollkommen richtig erkannt, so hat er doch keineswegs den Beweis geliefert, dass sie synthetische Urtheile a priori sind. Nun bildet aber letzteres gerade den auszeichnenden Bestandtheil der Kantischen Lehre. Nimmt man die Apriorität der mathematischen Principien hinweg, so mündet Kant's transscendentale Aesthetik in den Strom jener empiristischen Anschauungen, welche sich aus der entgegengesetzten Denkweise des mathematischen Nominalismus entwickelt haben.

Die Veränderungen, welche die letztere Richtung erfahren hat, sind nun weit mehr an der Oberfläche geblieben als die Wandlungen des Realismus. Eine weiter Raum trennt schon die Anschauungen von Descartes und Leibniz, und die Lehre Kant's hat sich fast in allen Stücken im directen Gegensatze zu Leibniz entwickelt. Zwischen Thomas Hobbes und John Stuart Mill dagegen besteht fast nur der Unterschied ungleicher Betonung der verschiedenen Bestandtheile einer im Ganzen übereinstimmenden Ansicht. In seiner Ueberzeugung von dem Werth der mathematischen Methode lässt sich Hobbes nur mit Leibniz vergleichen*). Diese Hochschätzung tritt bei ihm um so augenfälliger hervor, je mehr sie gegen seine Auffassung der Grundbegriffe contrastirt. Die Definitionen der Mathematik verdanken ihre Unveränderlichkeit nur der Constanz der Namen, mit denen wir die willkürlich gebildeten Begriffe festhalten; die Axiome aber sind aus den Definitionen abgeleitet, sie besitzen daher weder den Werth von Denkgesetzen noch von objectiven Naturgesetzen, sondern sie

*) Vgl. J. J. Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie, Berlin 1868, Bd. I, S. 237 ff.

sind willkürliche Festsetzungen wie die ihnen entsprechenden Definitionen selbst. Der Zweck dieser willkürlichen Festsetzungen pflegt endlich in der isolirten Inbetrachtnahme gewisser Bestandtheile der sinnlichen Objecte zu bestehen. Darum verbessert Hobbes die geometrischen Definitionen Euklid's: Punkt ist nicht dasjenige was keine Theile hat, sondern dasjenige, wovon beim Beweis keine Theile in Betracht zu ziehen sind; eine Linie ist nicht selbst ohne Breite, sondern sie soll beim Beweis so betrachtet werden. Auf diese Weise erscheinen die mathematischen Begriffe durchgängig als Erzeugnisse einer Abstraction, diese aber ist nicht eine nothwendige Thätigkeit des Geistes, sondern sie beruht auf willkürlicher Uebereinkunft. Nur hierdurch wird es begreiflich, dass für Hobbes der auszeichnende Charakter der Mathematik nicht in ihrem begrifflichen Inhalt, sondern nur in ihrer Methode besteht. Wie er daher einerseits z. B. der Politik die Fähigkeit zuschreibt, sich zum Rang einer mathematischen Disciplin zu erheben, so sieht er anderseits in jedem streng logischen Denken eine Folge mathematischer Operationen.

Sehen wir so in Hobbes den nominalistischen Gesichtspunkt, die Annahme der willkürlichen Feststellung der Begriffe, durchaus vorwalten und die Anerkennung der empirischen Motive derselben verhältnissmässig zurücktreten, so gewinnen dagegen bei Locke diese letzteren das Uebergewicht. Das Element der Willkür hat sich bei ihm zu der Anerkennung ermässigt, dass die mathematischen Ideen den Objecten der Wahrnehmung nicht unmittelbar gleich seien, sondern durch freie Variation der durch die äusseren Eindrücke entstandenen allgemeinen Ideen des Raumes, der Zahl u. s. w. gebildet würden. Trotz dieses von ihm zugestandenen idealen Charakters der mathematischen Ideen weist aber Locke denselben zugleich eine reale Bedeutung an, da er hervorhebt, die mathematischen Sätze besässen eben insofern objective Wahrheit, als die Dinge mit ihren mathematischen Vorbildern in unserm Geiste immer in einem gewissen Grade übereinstimmten*). Sicherlich ist er zu diesem Zugeständniss wesentlich durch seine empiristische Neigung geführt worden, welche der Annahme von Principien widerstrebte, deren Anwendbarkeit auf die Erfahrung irgendwie bezweifelt werden könnte. Dennoch kommt gerade dadurch in seine Auffassung der Mathematik ein realistisches Element, welches das nominalistische fast ganz unterdrückt. In der That erinnert die Annahme von Vorbildern im Geiste, abgesehen von der Behauptung ihrer empirischen Entstehung, stark an Cartesianische Vorstellungen. Fast noch näher aber streift Locke, durch die entschiedene Betonung der durchaus anschaulichen Natur der mathematischen Ideen und die schliessliche Rückbeziehung aller mathematischen Beweise auf die Anschauung, an Kant an. Denn was ist die allgemeine Idee des Raumes anderes als eine reine Anschauung, nur dass sie a posteriori entstanden gedacht ist? Vollends aber die Einschrän-

---

*) Essays. B. II, ch. 13; B. IV, ch. 4.

kungen und Variationen dieser Idee sind ein Construiren innerhalb der reinen Anschauung, welches sogar in die logische Form synthetischer Urtheile a priori gebracht werden könnte. In Folge dessen leidet die Lehre Locke's an einem unheilbaren Widerspruch zwischen der empiristischen Grundanschauung und den zum Theil völlig rationalistischen Ausführungen im Einzelnen. Falls die Erfahrung die einzige Quelle des Wissens ist, so bleibt es unbegreiflich, wie Ideen entstehen können, denen kein adäquates Object in der Erfahrung entspricht.

Ein solcher Widerspruch liess sich vermeiden, wenn man die Identität der mathematischen Ideen und der sinnlichen Einzelvorstellungen behauptete. Diesen Weg schlug Berkeley ein. Wie er die abstracten Begriffe leugnet, so selbstverständlich auch die Existenz einer reinen Raum- und Zeitanschauung. Die vollkommen zu Recht bestehende psychologische Unmöglichkeit, das Abstracte als solches im Bewusstsein festzuhalten, veranlasst ihn, dem Abstracten auch die logische und erkenntnisstheoretische Berechtigung abzusprechen, und er versetzt sich dadurch in einen schneidenden Widerspruch vor allem mit den Postulaten der mathematischen Wissenschaft. Das Dreieck im Geiste und das wirkliche Dreieck sind ihm eins und dasselbe. Alle zufälligen Eigenschaften des letzteren finden sich in jenem wieder. Auch die geometrische Demonstration hat daher nur dieses sinnliche Dreieck im Auge, und die an demselben bewiesenen Sätze haben für andere Dreiecke nur insofern Gültigkeit, als sie ihm gleichen. Die bindende Kraft der mathematischen Folgerungen hat darum nach Berkeley schliesslich ihren Grund in der Constanz der geometrischen Figuren und der sonstigen Objecte, auf welche sich die Demonstration bezieht*). Die Schwäche dieser Begründung liegt offen zu Tage. Als sinnliche Einzelvorstellungen entbehren die mathematischen Objecte durchaus der Unveränderlichkeit, die ihnen Berkeley zuschreibt. Sie gewinnen dieselbe gerade erst durch jene Denkacte, durch die unter ihnen abstracte Begriffe gedacht werden, welche Berkeley leugnet.

Auf dem Boden der Erfahrungsphilosophie giebt es nur einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten: die Rückkehr zu der nominalistischen Anschauung von Hobbes. Sie beginnt mit Hume. Freilich glaubt auch Hume die mathematischen Ideen nicht als blosse Erzeugnisse der Abstraction ansehen zu können, sondern er giebt ihnen mit Berkeley ein sinnliches Substrat. Aber er hält es nicht für erforderlich, dass jede einzelne Zahl, jede beliebige geometrische Figur aus der Anschauung eines sinnlichen Objects entspringe, sondern er meint, nur die Elemente, mit denen wir unsere Constructionen ausführen, müssten als reale Objecte der Erfahrung gegeben sein**). So gewinnen wir eine gegebene Zahl durch die wiederholte Setzung eines Punktes, so eine geometrische Curve durch

---

*) Treatise on the principles of hum. knowledge. Introd. und CXI f.

**) Treat. on hum. nat., B. I, 2.

die Aneinanderreihung von Punkten u. s. w. Auf diese Weise ist es der in der Wahrnehmung untheilbare Punkt, auf welchen alle arithmetischen und geometrischen Constructionen als letztes gegebenes Element zurückführen. Aus diesem Element erzeugen wir aber nach Willkür alle mathemathischen Vorstellungen, und auf dieser unserer willkürlichen Erzeugung beruht schliesslich die Evidenz der mathematischen Folgerungen.

So spielt bei Hume der sicht- und fühlbare Punkt die Rolle eines psychischen Atoms. Dieses ist ihm eine unmittelbare Thatsache der sinnlichen Erfahrung. Durch Wiederholung und Aneinanderfügung desselben sollen wir aber in freier Construction alle möglichen mathematischen Vorstellungen hervorbringen können, wobei wir freilich auch hier durch die Beispiele geleitet werden, die uns in der äusseren Erfahrung gegeben sind. Doch die Schwierigkeiten, denen Berkeley's Anschauung begegnet war, sind durch diese Beschränkung der sinnlichen Objecte der Mathematik auf ein letztes Element derselben keineswegs beseitigt. Denn wie sollen wir voraussetzen, dass dieses Element in allen mathematischen Vorstellungen derselben Art ein constantes bleibt, als welches es doch im mathematischen Denken vorausgesetzt wird, während die Eigenschaften unserer Empfindung fortwährend wechseln? Wie verträgt sich ferner die Annahme, dass der mathematische Punkt reale Ausdehnung und sonstige qualitative Eigenschaften wie Farbe und Festigkeit hat, mit der überall in dem mathematischen Denken festgehaltenen Voraussetzung, dass ihm alles dies nicht zukomme? Wenn die sinnliche Wahrnehmung die einzige Quelle unserer Ideen ist, so dürfen wir auch erwarten, alle Bestandtheile der ersteren in diesen wiederum anzutreffen.

Hier giebt es keine andere Rettung als den Rückgang auf Hobbes ganz zu vollziehen, einzugestehen, dass die Voraussetzungen der Mathematik abweichen von den sinnlichen Vorstellungen, durch welche sie angeregt werden, eben darum nun aber auch schon den Grundlagen dieser Wissenschaft nur einen hypothetischen Werth beizulegen. Es ist hauptsächlich das Verdienst John Stuart Mill's, die Nothwendigkeit dieser Consequenz erkannt zu haben. Seine Anschauungen fallen in allen wesentlichen Punkten mit denjenigen von Hobbes zusammen, aber die erkenntnisstheoretische Arbeit eines Locke, Berkeley und Hume ist für ihn nicht umsonst gethan. Das sinnliche Dreieck und das Dreieck in unserem Geiste, erklärt auch Mill, sind eins und dasselbe; einen Punkt ohne Ausdehnung und eine Linie von absolut gerader Richtung giebt es nicht in unserer Vorstellung*). Gerade darum aber beziehen sich die Definitionen und Axiome der Geometrie weder auf die sinnlichen Objecte noch auf unsere Vorstellungen von denselben, sondern auf rein hypothetische Gebilde, denen sich die sinnlichen Objecte immer nur mehr oder weniger annähern können.

---

*) Mill, System der deductiven und inductiven Logik, übers. von Schiel, 2. Aufl., I, S. 270 f.

Jene Definitionen und Axiome haben daher eben insoweit reale Gültigkeit, als sich die Objecte ihnen wirklich annähern. Nur in einem Punkte entfernt sich Mill von Hobbes: die Voraussetzungen der Mathematik sind ihm nicht willkürliche Fictionen, sondern Hypothesen, zu denen wir durch die Erfahrung genöthigt werden. Doch ist auch dieser Unterschied fast nur ein scheinbarer, denn weder hat Hobbes den Einfluss der Erfahrung geleugnet, noch kann Mill der Anerkennung sich widersetzen, dass die Aufstellung mathematischer Hypothesen schliesslich eine Handlung unseres Willens sei.

Es ist bemerkenswerth, dass neuere Mathematiker nicht selten aus eigenem Antrieb zu der nämlichen Auffassung gedrängt, dabei aber meistens durch Motive bestimmt worden sind, die von dem Empirismus Mill's weit abliegen. Da zahlreiche Objecte mathematischer Speculation ganz und gar imaginärer Art sind, also auf Voraussetzungen beruhen, die nicht unmittelbar aus der Erfahrung entspringen können, so betrachtet man alle diese Voraussetzungen als willkürliche Hypothesen. Da übrigens von den Vertretern der speculativen Mathematik zugestanden wird, dass irgend welche imaginäre Begriffe stets in Operationen ihre Quelle haben, die von den einer realen Veranschaulichung fähigen arithmetischen oder geometrischen Begriffen ausgehen, so bleibt auch hier in Bezug auf die fundamentalsten Principien die Ansicht Mill's bestehen, dass dieselben hypothetischer Art, aber aus Anlass bestimmter Erfahrungsobjecte gebildet sind.

Das logische Verfahren nun, welches aus einzelnen Erfahrungen allgemeine mathematische Sätze, Definitionen oder Axiome, ableitet, bezeichnet Mill als eine Induction, und er fasst dasselbe als vollkommen übereinstimmend mit der Gewinnung physikalischer oder anderer Naturgesetze durch Induction auf. Wie auf physikalischem Gebiet die empirischen Erscheinungen den von uns formulirten Gesetzen immer nur mehr oder weniger sich annähern, so sollen die Gesetze der Arithmetik und Geometrie nur eine schematische Bedeutung besitzen, dadurch aber gerade auf alle möglichen Objecte anwendbar sein. Auch in diesen Ausführungen treten die Schwächen der nominalistischen Auffassung deutlich zu Tage. Dass die mathematischen Wahrheiten in irgend einer Art von Erfahrung, mag es nun eine äussere oder innere sein, ihre Quelle haben, wird Niemand mehr leugnen. In diesem Sinne wird auch von vornherein zugestanden werden, dass die mathematische Erkenntniss schliesslich auf Inductionen zurückzuführen ist. Aber dass nun diese Inductionen in ihrem Wesen völlig mit denjenigen übereinstimmen sollen, aus denen wir allgemeine Naturgesetze gewinnen, dies ist eine Annahme, welche in der thatsächlichen Verschiedenheit physikalischer und mathematischer Sätze ihre Widerlegung findet. Wohl stellt auch der Physiker abstracte Gesetze auf, die in der Erfahrung immer nur annähernd verwirklicht sind. Aber alle Abweichungen beobachtet er auf das genaueste und sucht sie auf ihre Ursachen zurückzuführen. Den Geometer dagegen stören die Ungenauigkeiten seiner Figuren ebenso

wenig wie die Erkenntniss, dass es keine Objecte giebt, die seinen Begriffen vollkommen adäquat sind. Hierin liegt eben der Beweis, dass sich seine Inductionen nicht auf äussere Objecte beziehen, sondern nur auf seine eigenen Vorstellungen, und dass hier die Objecte bloss die Rolle von Hülfsmitteln spielen, welche die Vorstellungen erwecken und darstellen sollen. Doch in einer Beziehung existirt allerdings eine bemerkenswerthe Analogie zwischen der Generalisation der Naturgesetze und der Aufstellung mathematischer Sätze. Bei den fundamentalen Naturgesetzen gehen wir im allgemeinen von der Voraussetzung aus, dass sie von einfacher Art sind, dass sie also insbesondere eine einfache mathematische Formulirung zulassen. Nicht minder herrscht in der Mathematik diese Lex simplicitatis. In der Geometrie z. B. gelten der Punkt, die Gerade, die Ebene offenbar desshalb als die Elemente aller Construction, weil sie die einfachsten Gebilde unserer geometrischen Abstraction sind. Aber auch hier besteht ein wesentlicher Unterschied. In der Mathematik ist die Einfachheit der Principien eine selbstverständliche Voraussetzung. Wo es sich herausstellen sollte, dass ein Princip dieser Voraussetzung nicht genügt, da muss es zerlegt werden, bis dieselbe erfüllt ist. In der Naturwissenschaft ist die Einfachheit ein Postulat, dem immer nur insoweit nachzugehen erlaubt ist, als die Erfahrung dies gestattet. Daraus geht schon hervor, dass dieses Postulat gar nicht in der Naturwissenschaft selbst seinen Ursprung genommen hat, sondern von aussen in sie hereingetragen wird. In der That ist leicht zu erkennen, dass dasselbe nirgend anders als in der Mathematik oder in den formalen Gesetzen unserer Zeit- und Raumanschauung entspringt, die das Object der Mathematik sind, wie dies auch die Thatsache andeutet, dass wir für jedes Naturgesetz einen möglichst einfachen mathematischen Ausdruck zu finden suchen.

Die Auffassung der mathematischen Sätze als Generalisationen, die den Generalisationen der Naturgesetze entsprechen sollen, kreuzt sich nun aber ausserdem mit einer fast noch unzulässigeren Anwendung des Begriffs der Abstraction. Da es keine Objecte oder Vorstellungen giebt, die den Begriffen der Einheit, des Punktes, der Geraden u. s. w. vollkommen adäquat sind, so liegt es nahe, alle mathematischen Grundbegriffe aus einem Abstractionsprocess hervorgehen zu lassen. So wenig wir nun leugnen, dass die Mathematik auf Inductionen aufgebaut sei, ebenso sind wir weit entfernt, die Bedeutung der Abstraction bei der Aufstellung ihrer Begriffe in Abrede zu stellen. Aber auch hier begeht wieder der Nominalismus den Fehler, dass er diese Abstraction als einen uniformen Process ansieht, der sich in seiner Bethätigung auf mathematischem Gebiete durchaus nicht unterscheide von der Abstraction sonstiger Erfahrungsbegriffe. Nach ihm sollen wir den Begriff der Geraden in der nämlichen Weise bilden, in welcher in uns etwa der Begriff eines vierfüssigen Thieres entsteht. Wie wir bei dem letzteren von allen Merkmalen eines Thieres nur dasjenige der vier Füsse festhalten, so sollen wir bei dem Begriff der Geraden nicht

nur von der verschiedenen Dicke und Länge der einzelnen in der Erfahrung gegebenen geraden Linien, sondern auch von ihrer mehr oder minder grossen Abweichung von der geraden Richtung absehen und so die Gerade in abstracto übrig behalten. Als wenn diese Eigenschaft gerade zu sein nicht eben allen einzelnen Linien, die von der geraden Richtung abweichen, fehlte, so dass sie unmöglich aus ihnen abstrahirt werden kann, sondern offenbar schon vorhanden sein muss, wenn jene Richtungen als annähernd gerade erkannt werden sollen. Ja Mill stellt gelegentlich die Eigenschaft der Dinge zählbar zu sein auf eine Linie mit ihrer Eigenschaft blau oder hart oder süss zu sein, mit dem einzigen Unterschied, dass dieses Merkmal der Zählbarkeit allen Dingen ohne Ausnahme zukomme*).

Giebt der Nominalismus in seinen Anfängen von der Entstehung der Voraussetzungen, von welchen die mathematische Demonstration ausgeht, gar keine Rechenschaft, so ist die Antwort dieser letzten Entwicklungen desselben ungenügend; denn indem hier hauptsächlich auf die äusseren Gelegenheitsursachen der mathematischen Begriffe Werth gelegt wird, bleiben die wesentlichen logischen Eigenthümlichkeiten, die bei der Entstehung dieser Begriffe obwalten, unbeachtet. Wirft so der Nominalismus die mathematischen Begriffe trotz ihrer bedeutsamen Unterschiede mit den gewöhnlichen Erfahrungsbegriffen zusammen, so reisst aber der Realismus beide dergestalt aus einander, dass den mathematischen Principien abermals das logische Fundament abhanden kommt. Sie erscheinen entweder, wie in den älteren Ansichten, als ein ursprüngliches Besitzthum des Geistes oder, wie bei Kant, als Erzeugnisse einer in ursprünglichen Anschauungsformen frei thätigen Einbildungskraft. So werthvoll hier der Hinweis auf die Betheiligung des Denkens und der allgemeinen Formen unserer Anschauung ist, so wird doch dabei nicht nur der Einfluss der äusseren und inneren Erfahrung unterschätzt, sondern es fehlt auch jeder Versuch, jener constructiven Thätigkeit, welche die mathematischen Objecte erzeugt, im Einzelnen nachzugehen und die logischen Verfahrungsweisen festzustellen, aus denen die mathematischen Begriffe entspringen. Ein Versuch dieser Art darf aber nicht die Principien für sich ins Auge fassen, isolirt von dem Unterbau zahlreicher einzelner Anschauungen und Sätze, den sie voraussetzen. Denn die Geschichte der Mathematik lehrt, dass auch in ihr fast überall einzelne Erkenntnisse den allgemeinen vorangegangen sind.

### b. Die historische Bedeutung der mathematischen Induction.

Wo immer wir im Stande sind, die grundlegenden mathematischen Erkenntnisse auf ihren ersten Ursprung zurückzuverfolgen, da ergiebt sich als die Quelle derselben die Induction aus der Erfahrung. So wird Niemand daran zweifeln, dass die vier arithmetischen Fundamentaloperationen aus

*) Mill, Logik, I, S. 266.

Anlass der Wahrnehmungen getrennter Objecte und ihrer verschiedenartigen Gruppirungen entstanden sind, da ausser unserem eigenen Ziffernsystem die sämmtlichen Zählmethoden der Naturvölker auf einen solchen Ursprung hinweisen*). Aber es ist bemerkenswerth, dass wir in den Anfängen der mathematischen Wissenschaft deutlichen Spuren der Induction auch bei zusammengesetzteren arithmetischen Problemen begegnen. Eine der frühesten Aufgaben dieser Art, die an die Division sich anschliesst, ist wohl die Umwandlung der durch die Theilung eines Ganzen gewonnenen Bruchzahlen in eine Summe einfacherer Brüche, die ihnen äquivalent ist, eine Aufgabe, welche schon von den altägyptischen Rechnern mit grosser Fertigkeit gelöst wurde**). Der einfachste Bruch ist derjenige, dessen Zähler die Eins ist, weil er unmittelbar das Verhältniss des Theils zu dem Ganzen angiebt. Die Ueberführung in solche Stammbrüche gewährte eine leichtere Vergleichung verschiedener Theilungen mit einander, und sie spielte daher, wie es scheint, in den frühesten Zeiten der Mathematik eine ähnliche Rolle, wie sie heut zu Tage dem entgegengesetzten Verfahren der Umwandlung in Brüche mit gleichem Nenner zukommt. Aber während wir uns zu dem letzteren Zweck einer einfachen auf die arithmetischen Axiome gegründeten Regel bedienen, fand der ägyptische Rechner offenbar rein empirisch durch versuchsweise Theilungen, dass beispielsweise $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ oder $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ sei, u. s. w. Wie sehr die so gewonnene Tafel der Induction entsprungen ist, geht am sichersten daraus hervor, dass keinerlei übereinstimmende Regel die verschiedenen Theilungen beherrscht, so dass offenbar jede einzelne Zerlegung eine besondere Induction erforderte.

Dass die frühesten geometrischen Sätze in ähnlicher Weise entstanden sind, wird nicht minder durch die Umstände, die ihr erstes Auftreten begleiten, über allen Zweifel erhoben. Eine der ersten Aufgaben der praktischen Geometrie war hier wohl die Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats aus seiner Seite. Indem man ein beliebiges Quadrat in kleine Quadrate von der Seitenlänge 1 zerlegte, ergab sich durch einfache Addition der Satz, dass der Flächeninhalt $= a \,.\, a$ sei, wenn die Länge einer Seite $= a$ ist. Es lag nahe, diesen Satz sofort auf das Rechteck zu übertragen und festzustellen, dass hier den Seiten a und b ein Flächeninhalt $a \,.\, b$ entspricht. Nur wenn in solcher Weise der erste Schritt durch Induction gethan war, konnte es geschehen, dass eine ähnliche Uebertragung weiterhin auch da stattfand, wo sie zu falschen Ergebnissen führte, dass man also beispielsweise den Inhalt des gleichschenkeligen Dreiecks von den

*) Vgl. A. v. Humboldt, Crelle's Journal f. Mathematik, Bd. 4, S. 205. Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode, Halle 1847.

**) A. Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), Leipzig 1877.

Seitenlängen a und b zu $\frac{a.b}{2}$ bestimmte*). Auch die Ausmessung der Kreisfläche konnte in der frühesten Zeit nur empirisch, etwa durch Theilung in kleine Quadrate und Vergleichung mit dem über dem Durchmesser errichteten Quadrate geschehen sein, da sonst kaum begreiflich wäre, dass dieses Problem von Anfang an gerade in der Form der Quadratur des Kreises aufgetreten ist.

Von noch grösserem Interesse sind die Spuren, welche darauf hinweisen, dass Sätze, deren verwickelte Beschaffenheit ihre allgemeingültige Erkenntniss durch Induction ausschliesst, in gewissen einfacheren Fällen dennoch auf diesem Wege gefunden wurden, und der nachfolgenden Deduction nur die Aufgabe blieb, einen Beweis zu ersinnen, welcher das in einzelnen anschaulichen Beispielen Erkannte zu einer allgemeinen Wahrheit erhob. Auch hier mögen nicht selten empirische Proben, ob das in einem bestimmten Fall Beobachtete auch in einem andern davon abweichenden zutreffe, dem verallgemeinernden Beweise vorangegangen sein; war aber dieser erst gefunden, so gerieth jene inductive Vorbereitung leicht in Vergessenheit. Wenn uns übrigens berichtet wird, dass die Alten den Satz von der Winkelsumme im Dreieck für jede besondere Form des Dreiecks auch besonders bewiesen, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenkelige und zuletzt für das ungleichseitige Dreieck, so werden wir hierin die Spuren einer Induction um so weniger verkennen, als für das gleichseitige und gleichschenkelige Dreieck der unmittelbare Augenschein zu einer Messung der Winkel führen konnte. Denkt man sich das gleichseitige Dreieck A B C (Fig. 1) in ein Rechteck eingezeichnet, so lehrt leicht die Beobachtung, dass die drei Winkel bei B, welche zusammen zwei Rechten gleich sind, den drei einander gleichen Winkeln des Dreiecks A B C entsprechen. War erst der Satz für diesen einfachsten Fall ge-

Fig. 1.

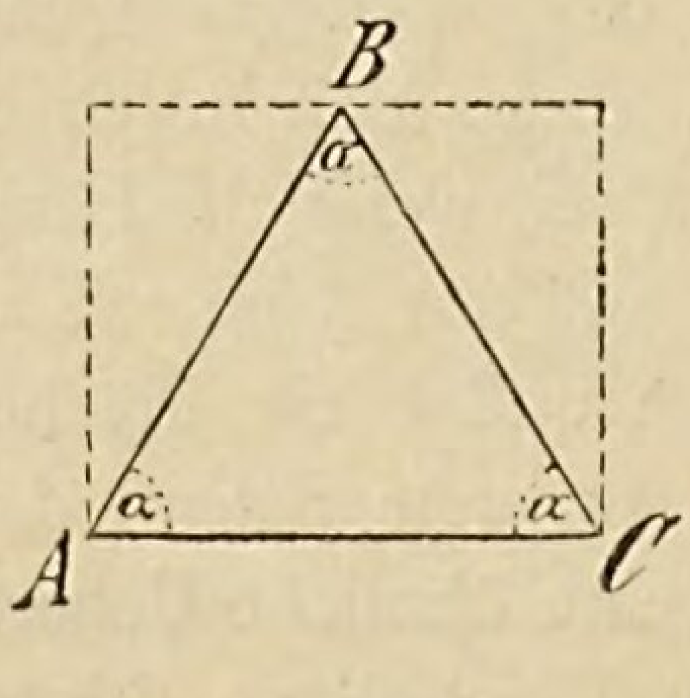
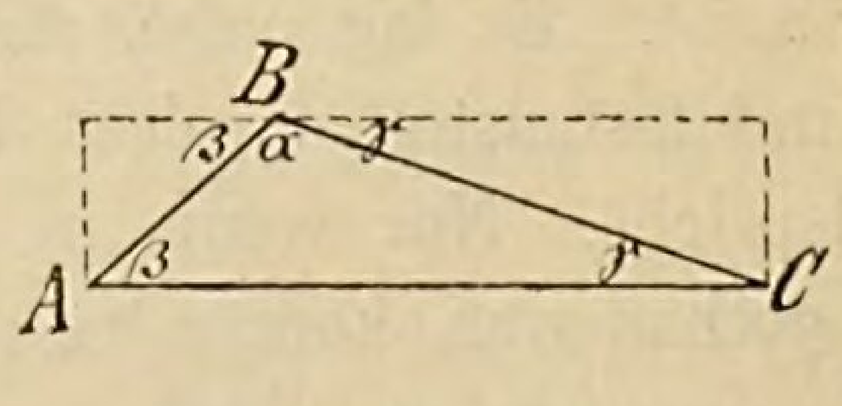



Fig. 2.

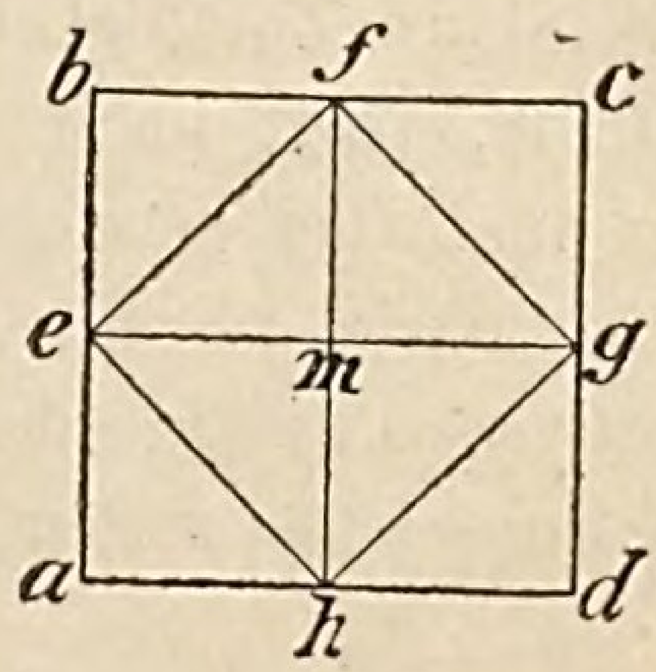



funden, so lag es nahe, ihn nun auch für das gleichschenkelige und sodann für jedes beliebige Dreieck durch eine ähnliche Einzeichnung in ein Rechteck zu constatiren. Indem im letzteren Fall alle drei Winkel bei B verschieden wurden (Fig. 2), zugleich aber sich die entsprechende Verschiedenheit der

*) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 49.

Dreieckswinkel der Beobachtung aufdrängte, mochte aus dieser Erweiterung ausserdem der allgemeinere Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel entspringen, worauf dann später umgekehrt aus dem letzteren erst der Satz von der Winkelsumme im Dreieck abgeleitet wurde*). Aehnlich ist der pythagoreische Lehrsatz sicherlich zuerst aus einzelnen, der Anschauung leicht zugänglichen Fällen abstrahirt worden, mag man nun etwa an dem Dreieck von den Seitenlängen 3, 4, 5, dessen man sich seit alter Zeit zur Construction des rechten Winkels bediente, zuerst die Eigenschaft, dass das Quadrat der dritten Seite der Summe aus den Quadraten der beiden ersten gleich sei, herausgefunden**), oder mag man, was noch wahrscheinlicher sein dürfte, an einer Construction wie der in Fig. 3 dargestellten jenen Satz entdeckt haben. Eine regelmässige Figur dieser Art, die nicht einmal in geometrischer Absicht ausgeführt zu sein brauchte, lässt sofort die Massbeziehung $efgh = \frac{1}{2} abcd = 2 aemh$ erkennen***). Dieser einfachste Fall des pythagoreischen Satzes, der sich auf das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck bezieht, musste zugleich zu einer Wahrnehmung Anlass bieten, die für die Weiterentwicklung der Mathematik von folgenschwerer Bedeutung wurde. So anschaulich sich das Massverhältniss der Linien geometrisch erkennen liess, so widersetzte sich dasselbe doch einer genauen arithmetischen Bestimmung. Die Diagonale e h irgend eines Quadrates a e m h lässt sich nicht in einer ganzen Zahl angeben, wenn a e, die Länge der Seite, durch eine ganze Zahl messbar ist. So haben wir allen Grund anzunehmen, dass die Entdeckung des Irrationalen, welche die Ueberlieferung dem Pythagoras zuschreibt, auf dem nämlichen Weg inductiver Ermittelungen geschehen sei. Nur in einer Beziehung überschreiten diese geometrischen Versuche bereits den Kreis der reinen Induction. Sie bedienen sich, namentlich da wo sie Sätze, die in speciellen Fällen gefunden sind, in Bezug auf ihre Allgemeingültigkeit prüfen wollen, der Ziehung von Hülfslinien. Die geometrische Hülfsconstruction aber bezeichnet, wenn sie auch durch die probeweise Art ihrer Anwendung hier noch ganz als inductives Hülfsmittel verwendet wird, doch schon deutlich den Uebergang zur Deduction,

Fig. 3.




*) Eine ähnliche, aber in Bezug auf die Reihenfolge der Sätze umgekehrte Reconstruction vgl. bei H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 96.

**) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 153.

***) Aehnliche hypothetische Constructionen vgl. bei Hankel, a. a. O. S. 98, ebenso die in Bd. I, S. 514 mitgetheilte Figur, die jedoch weniger als die obige dem Geiste frühester Geometrie entsprechen dürfte.

da der Gedanke nahe liegt, die nämlichen Hülfsmittel, die zur inductiven Auffindung eines Satzes gedient haben, nun auch sofort zur Demonstration desselben zu benützen. So ist es denn begreiflich, dass im einzelnen Fall häufig nicht mehr entschieden werden kann, ob eine bestimmte Hülfsconstruction sogleich in deductiver oder ursprünglich in inductiver Absicht gebraucht wurde. Giebt man sich aber Rechenschaft über den Weg, den heute noch Jeder bei der Lösung einer geometrischen Aufgabe einschlägt, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass die Construction überall zunächst in einem experimentellen Verfahren bestand, welches manchmal erst nach vielen vergeblichen Versuchen zum Ziel führte. Nachdem durch dasselbe die Gültigkeit gewisser Sätze inductiv gefunden war, konnte man zur Aufsuchung der zweckmässigsten Constructionen übergehen und auf diese Weise auch der Deduction die nämliche Methode dienstbar machen. Die scheinbare Zufälligkeit, welche so vielfach bei den Constructionen Euklid's auffällt, trägt noch deutliche Spuren jenes tastenden Verfahrens an sich, das man bei den ersten geometrischen Inductionen befolgen musste. Ja selbst darin zeigen sich bei diesem Geometer die Nachwirkungen der inductiven Periode, dass er nicht ganz selten ein allgemeines Theorem in mehrere Fälle zerlegt, für die er einzeln den Beweis führt*).

### c. Die bleibenden Formen der mathematischen Induction.

Nehmen wir alle Ueberlieferungen zusammen, die uns aus der frühesten Entwicklungszeit des mathematischen Denkens geblieben sind, so lässt sich aus ihnen mit der grössten Wahrscheinlichkeit schliessen, dass die Mathematik ursprünglich eine inductive Wissenschaft gewesen ist. So bedeutsam dies aber auch für die Entwicklung der Erkenntniss überhaupt sein mag, so erscheint doch für den wissenschaftlichen Charakter der Mathematik von noch grösserer Wichtigkeit die weitere Thatsache, dass es in ihr gewisse bleibende Formen der Induction giebt, und dass gerade die fundamentalsten Sätze auf diese zurückführen.

Zunächst erweisen sich nämlich alle axiomatischen Sätze als solche, die nicht nur regelmässig durch Induction entstehen, sondern für die auch fortan keine andere Begründung gegeben werden kann. Der Umstand, dass die mathematischen Axiome im allgemeinen nur Umformungen der Definitionen sind, die sich von Zahl, Grösse, Raum u. s. w. aufstellen lassen, ändert an dieser Sachlage nichts. Denn auch für die Definitionen lässt kein anderer Ursprung sich nachweisen als die Abstraction aus der Erfahrung. Selbst für die Definitionen rein imaginärer Gebilde hat dies Geltung, da dieselben von den durch Abstraction gewonnenen Fundamentalbegriffen ausgehen, die dann willkürlich in Bezug auf irgend welche

*) Vgl. z. B. Euklid's Elemente, Buch I Satz 26, Buch III Satz 33, 35, 36, Buch IV Satz 5, Buch V Satz 6, 8, 20, 21 u. s. w.

Eigenschaften verändert gedacht werden. Insofern die mathematischen Definitionen ausschliesslich auf die Abstraction, die Axiome ausserdem noch auf die Induction zurückführen, offenbart sich jedoch der früher (Bd. I, S. 518) hervorgehobene Unterschied beider Sätze von einer neuen bedeutsamen Seite. Die Axiome werden regelmässig zuerst festgestellt. So ist die Wissenschaft lange Zeit im Besitz gewisser Axiome über Raum, Zahl und Grösse gewesen, ehe es gelang, befriedigende Definitionen dieser Begriffe zu gewinnen. In dem Abstractionsprocess, welcher zu denselben führte, spielen Axiome eine wichtige Rolle. Ohne die Sätze z. B., dass die Lage eines Punktes in Bezug auf einen andern immer durch drei Gerade bestimmt werden kann, und dass jedes Raumgebilde bei beliebiger Lageänderung sich selbst congruent bleibt, würde eine allgemeine Definition des Raumes gar nicht möglich gewesen sein. Kann man nun aber auch, nachdem diese Definition aufgestellt ist, aus derselben durch eine bloss formale Umwandlung die Axiome gewinnen, so führt doch jeder Versuch, die Richtigkeit der letzteren nachzuweisen, wiederum auf die ursprünglichen Inductionen zurück.

Nächst den Axiomen verdanken sodann solche Sätze einer Induction ihren Ursprung, welche als unmittelbare Specialisirungen der Axiome betrachtet werden können. Hierher gehören alle Zahlformeln, wie $7 + 5 = 12$, $5 . 6 = 30$ u. dergl., alle auf die einfachsten Raumconstructionen sich beziehenden Sätze der synthetischen Geometrie, z. B. dass zwei Gerade in einem Punkt, zwei Ebenen in einer Geraden sich schneiden, dass alle Strahlen, die durch einen Punkt und eine Gerade gelegt werden, in einer einzigen Ebene liegen, u. s. w. Von den eigentlichen Lehrsätzen unterscheiden sich diese Fundamentalsätze dadurch, dass sie, hierin den Axiomen gleichend, keinen Beweis zulassen, sondern nur in dem unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung ihre Begründung finden. Von den Axiomen dagegen sind sie insofern verschieden, als diese die allgemeinsten Abstractionen aus jenen sämmtlichen in der unmittelbaren Anschauung gegebenen Sätzen darstellen. Die letzteren lassen sich daher auf die Axiome zurückführen, aber sie gestatten keinen eigentlichen Beweis aus denselben, da in ihnen stets besondere Elemente der Anschauung auftreten, welche in den allgemeinen Axiomen nicht enthalten sind. Der Begriff der letzteren ist darum ungenügend bestimmt, wenn man sie bloss negativ als diejenigen Sätze bezeichnet, welche einen Beweis aus andern Sätzen nicht zulassen. Vielmehr werden durch dieselben die allgemeinsten Gesetze festgestellt, von welchen die verschiedenen mathematischen Begriffsgebiete beherrscht sind, und mit denen alle einzelnen Sätze in Uebereinstimmung stehen müssen. Sie sind daher Verallgemeinerungen aus den durch Induction gefundenen und nur durch Induction erweisbaren einzelnen Thatsachen der mathematischen Anschauung. Die Axiome selbst lassen sich, eben weil sie völlig abstracte Sätze sind, nur in diesen ihren einzelnen Anwendungen in der Anschauung nachweisen. Das Additions-

gesetz z. B. hat für uns eine anschauliche Wirklichkeit nur insofern, als wir es uns an einzelnen Additionsformeln deutlich machen. Den Satz von der Congruenz des Raumes mit sich selbst müssen wir auf concrete Raumgebilde anwenden, die wir uns im Raume bewegt oder zur Deckung gebracht denken, und alle einzelnen Congruenzsätze sind solche Anwendungen.

Ein drittes Gebiet der Induction bilden endlich diejenigen allgemeinen Sätze, die aus Einzelinductionen der soeben beschriebenen Art durch Generalisation entstanden sind. Bei der Feststellung des Gesetzes, nach welchem die Primfactoren einer Zahl sich bestimmen lassen, oder der Anzahl der Combinationen, welche eine bestimmte Zahl von Elementen gestattet, oder der Form, nach welcher eine durch empirische Entwicklung gefundene Reihe fortschreitet, ist das inductive Verfahren so augenfällig, dass es längst Anerkennung gefunden hat. Es ist aber klar, dass es sich hierbei nur um eine Weiterführung der vorhin besprochenen einfachen Inductionen handelt. Durch eine einfache Induction erhält man z. B. die Zahlformel $1 + 3 = 4$, durch eine mehrmalige Wiederholung solcher Inductionen die Glieder einer arithmetischen Reihe 1, 4, 7, 10, 13 . . ., und aus der Betrachtung dieser und ähnlicher Reihen gewinnt man durch Generalisation den Satz, dass das n te Glied einer arithmetischen Reihe $= a + (n - 1)\, d$ ist, wenn mit a das erste Glied und mit d die constante Differenz bezeichnet wird. So bilden jene Specialisirungen der mathematischen Axiome, wie sie uns in den Zahlformeln und in den auf die einfachsten Constructionen zurückgehenden geometrischen Sätzen entgegentreten, den Anfang aller mathematischen Induction. Auf der einen Seite gehen aus ihnen durch Abstraction die Axiome, auf der andern Seite durch die an eine Anzahl verwandter Inductionen sich anschliessende Generalisation die verwickelteren Inductionen hervor.

Besonders bei jenen einfachen Sätzen, welche entweder selbst unter die Axiome gehören oder als nächste Specialisirungen derselben betrachtet werden können, ist es nun ein altes Bestreben der Mathematiker, die Spuren der Induction zu verwischen. Dies geschieht entweder, indem man an die Stelle der Induction die Intuition setzt, wobei man hervorhebt, dass eine einmalige Beobachtung zu ihrer Feststellung zureichend sei, oder indem man die Induction durch einen angeblich deductiven Beweis zu ersetzen sucht. Der erste dieser Einwände übersieht jedoch den Umstand, dass die Erfahrungen, aus denen wir die Ueberzeugung von der Richtigkeit der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze geschöpft haben, zum grossen Theil von uns in einer Zeit gemacht wurden, die der wissenschaftlichen Induction lange vorausgeht. Den Charakter der Allgemeinheit wird man solchen Sätzen wie der Additionsformel $7 + 5 = 12$ oder dem geometrischen Satz, dass zwei Gerade nie mehr als einen Punkt gemein haben, nicht absprechen dürfen, denn der erste ist für alle

möglichen Gruppirungen von 7 und 5 Einheiten, der zweite für alle möglichen Geraden im Raum gültig. Eben desshalb aber ist es nicht denkbar, dass man zur Feststellung dieser Sätze anders als durch ein mehrfaches Experimentiren in der innern oder äussern Erfahrung gelangt sei. Nur eine Mehrheit von Anschauungen konnte lehren, dass, wie man auch die einzelnen Einheiten der Zahlen 7 und 5 aneinanderfügt, die resultirende Anschauung immer die nämliche Summe von Einheiten enthalte, oder dass, wie man auch die Richtungen der Geraden sich ändern lasse, niemals ein Bild mit zwei Durchschnittspunkten entstehen könne. Nicht besser steht es mit den Beweismethoden, durch welche man den experimentellen Ursprung gewisser Erkenntnisse zu verhüllen sucht. Diese setzen entweder, indem sie apagogischer Art sind, in Wirklichkeit das zu Beweisende voraus, oder sie enthalten selbst nichts anderes als die Schilderung eines Inductionsverfahrens. In beide Gattungen gehören die Euklidischen Congruenzbeweise. Der versuchte Beweis für die Congruenz zweier Dreiecke besteht hier darin, dass man angehalten wird, die gleichen Stücke zur Deckung zu bringen, worauf, wenn die drei Seiten gleich sind, die unmittelbare Anschauung lehren soll, dass auch die ganzen Dreiecke zusammenfallen (I, Satz 8), oder, falls zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, eine Seite und zwei Winkel gleich sind, so wird gezeigt, dass die Voraussetzung der Nichtcongruenz dem Axiom, nach welchem zwei Gerade keinen Raum einschliessen, widersprechen würde (Satz 4 und 26). Es ist klar, dass auch dieser apagogische Beweis der Berufung an die unmittelbare Erfahrung nur eine andere Wendung giebt; denn ich weiss ja nur aus der Anschauung, dass das Dreieck eine geschlossene Figur ist, der Beweis sagt also bloss, dass die Nichtcongruenz meiner Anschauung widersprechen würde. Aehnlich verhält es sich mit den für gewisse mathematische Fundamentalsätze versuchten Beweisführungen. Das so genannte Associationsgesetz der Addition und Multiplication, wonach $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a\,b)\,.\,c = a\,.\,(b\,c)$ ist, beweist man für beliebig viele Zahlen, indem man zeigt, dass es, wenn für eine gegebene Anzahl von Elementen richtig, auch für die nächst grössere Anzahl richtig sein müsse*). Dieses in der Mathematik als vollständige Induction bezeichnete Verfahren ist in der That insoweit eine Induction, als die Voraussetzung, das Gesetz sei für eine gegebene Anzahl zutreffend, nur aus experimentellen Ermittelungen hervorgegangen sein kann. Nur ist es nicht zulässig, diese Voraussetzung wie eine vorläufige Hypothese einzuführen, die durch die nachträgliche Ausdehnung auf eine beliebige Anzahl von Gliedern, welche in Wahrheit keine Induction mehr ist, ihre Bestätigung erst empfange. Diese Bestätigung würde nichts beweisen, wenn der Satz nicht durch Erfahrungen, die sich auf eine beschränkte Anzahl von Gliedern beziehen, vollkommen feststände. Aber es ist eine bemerkenswerthe Eigenthüm-

*) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 3.

lichkeit der neueren Mathematik, dass sie es liebt, die Erfahrung zu verleugnen, indem sie, um ihren deductiven Charakter zu wahren, Sätze als Hypothesen behandelt, die in Wirklichkeit durch Induction entstanden sind. Sehr augenfällig tritt dies an einer apagogischen Beweisführung hervor, welche man für den mit dem Associationsgesetz nahe zusammenhängenden Satz versucht hat, dass, wenn zwei Zahlen A und B aus der nämlichen Anzahl von Einheiten bestehen, keine eindeutige Verknüpfung zwischen ihnen möglich ist, bei welcher ein Rest bleibt. Man nimmt an, das Gegentheil wäre möglich: es soll neben der Verbindung, die keinen Rest lässt, noch eine andere stattfinden können, bei welcher etwa von B eine Einheit b übrig bleibt. Nun nehme man dieses Element b aus der Zahl B und entsprechend das Element a, mit dem es bei der restlosen Verknüpfung verbunden war, aus A weg: es wird dann vorausgesetzt, dass zwischen den gebliebenen Zahlen A′ und B′ wieder zwei Verknüpfungen, die eine mit einem Rest, die andere ohne einen solchen, möglich seien, und es sollen nun die einander entsprechenden Elemente b′ und a′ weggenommen und so fortgefahren werden, bis von jeder der beiden Zahlen nur noch eine Einheit übrig bleibt. Dass nun zwischen zwei Einheiten mehr als eine Art der Verbindung nicht stattfinden kann, ist unmittelbar einleuchtend, und es wird daher gefolgert, dass auch zwischen Zahlen aus beliebig vielen Einheiten nicht zwei Verbindungen möglich sind*). Der Schluss dieses Beweises ist offenbar eine demonstratio ad oculos, welche allerdings am einleuchtendsten bei bloss zwei Einheiten wird, aber im allgemeinen auch schon bei Gruppen von je 2, 3 oder überhaupt einer kleineren Zahl von Einheiten deutlich genug sein dürfte. Es handelt sich, wie bei den Congruenzbeweisen Euklid's, um eine Berufung an die Anschauung, welche in das Gewand der apagogischen Beweisführung gekleidet ist. Das wirkliche Inductionsverfahren wird hierbei umgedreht. Während das letztere von den einfachsten Fällen ausgeht, wird hier der zusammengesetzte Fall bis zum einfachsten zurückverfolgt. Es bedarf hiernach nicht mehr der näheren Ausführung, dass auch die übrigen allgemeinen Gesetze der Zahlenverknüpfung, das Commutations- und das Distributionsgesetz, $a + b = b + a$, $a\,b = b\,a$, $(a + b)\,c = a\,b + b\,c$ u. s. w., andere als inductive Begründungen nicht zulassen.

Nur auf einen Specialfall der Multiplication mag hier desshalb noch hingewiesen werden, weil bei demselben die Verkennung des inductiven Charakters der betreffenden Wahrheit zu sehr merkwürdigen Beweisversuchen den Anlass geboten hat, nämlich auf die Multiplicationsregel, wonach das Vorzeichen eines Productes aus zwei Factoren positiv ist, wenn beide Factoren ein gleiches, negativ, wenn sie ein verschiedenes Vorzeichen besitzen. Wenn man es auch für selbstverständlich hielt, dass $+ a \,.\, + b = + a\,b$ und allenfalls $+ a \,.\, - b = - a\,b$ sei, so wurde doch lange Zeit

*) Ernst Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I, S. 19 f.

das Product — a . — b = + a b für eine Art von Paradoxie gehalten, und noch in der neueren Analysis kann man Ausführungen begegnen, welche sich mit der Bemerkung begnügen, dass — a . — b nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen zu + a . — b empfangen müsse. Auch, wie es zuweilen geschieht, als bloss willkürliche Voraussetzungen, deren Berechtigung erst durch den Erfolg bewiesen werde, können jene Gleichungen nicht gelten, da eben ihre erfolgreiche Anwendung auf eine Berechtigung hinweist, die sie an und für sich schon besitzen müssen. Willkürlich ist nur der Gebrauch der Vorzeichen plus und minus für gewisse reale Gegensätze der durch Zahlen messbaren Objecte, wie der Werthgrössen, der Richtungen im Raume u. dergl. Gleichwohl ist gerade dieser Gebrauch lediglich aus der Beobachtung der zählbaren Objecte hervorgegangen. Die Verknüpfung zwischen den Grössen a und b ist in den drei Fällen die nämliche, darum erscheint auch immer das nämliche Product a . b. Aber die Gleichung + a . — b = — a b bedeutet, dass die Richtung der Grösse b, welche a-mal genommen werden soll, entgegengesetzt sei einer andern Richtung des nämlichen Grössencontinuums, die mit + b bezeichnet wurde, wo dann nothwendig auch die aus der Vervielfältigung hervorgehende Grösse einen negativen Werth haben muss. Das nämliche Resultat gewinnt man, wenn umgekehrt, entsprechend der Gleichung — a . + b = — a b, eine positive Grösse b a-mal aufgehoben gedacht wird, wenn z. B. eine Summe von b Wertheinheiten a-mal hinweggenommen wird: die Gesammtsumme der hinweggenommenen Wertheinheiten ist hier abermals = — a b, weil von vornherein die Aufhebung der ursprünglich gesetzten Grössen negativ bezeichnet wurde. Die Gleichung — a . — b = + a b endlich sagt aus, dass eine negative Grösse b a-mal aufgehoben gedacht wird, dass also z. B. ein Verlust vom Werthe b a-mal wiederersetzt oder ein in rückläufiger Richtung gemessener Weg b in rechtläufiger Richtung a-mal zurückgelegt sei. Hier muss mit derselben Sicherheit ein positives Product a . b erscheinen, als eine doppelte Negation verschwindet, eine allgemein logische Regel, von welcher der mathematische Fall eine Anwendung ist. (Bd. I, S. 508.) Dieser Zusammenhang mit dem Satz des Widerspruchs beweist nichts gegen den inductiven Ursprung der Multiplicationsgesetze, da ja die logischen Axiome selber nicht nur gleichzeitig Gesetze des Denkens und der Objecte des Denkens, sondern auch unter dem Einfluss dieser Objecte entstanden sind. Auch wird durch den inductiven Ursprung der Multiplicationsregeln keineswegs ausgeschlossen, dass einzelne unter ihnen deducirt werden können, wenn die andern gegeben sind. Vielmehr wird, sobald nur die gegebenen Regeln eine vollständige Definition der positiven und der negativen Einheiten enthalten, eine solche Deduction möglich sein. In der That lassen sich aus den beiden Gleichungen + a . + b = + a b und + a — a = 0 die zweite und dritte Multiplicationsregel ableiten*). Die

*) Eine solche von Weierstrass herrührende Ableitung vgl. bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872, S. 22 f.

Möglichkeit dieser Deduction beweist aber natürlich nur, dass, nachdem die erste Regel und der Begriff der entgegengesetzten Zahlen durch Induction und Abstraction aus der Erfahrung gefunden sind, man sich die besondere inductive Auffindung der übrigen ersparen kann.

Mehr anerkannt ist das Stattfinden einer Induction in jenen Fällen zusammengesetzter Induction, bei denen gleichzeitig eine Generalisation aus einfacheren Inductionen stattfindet. Hierher gehören vor allem die Schlüsse von der Potenz n auf die Potenz n + 1, bei denen nur die Bezeichnung »vollständige Induction« eine unrichtige ist*). Aehnlich verhält es sich mit andern Reihenentwicklungen. So gewinnt man z. B. die Anfangsglieder der Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^3}{1-x},$$

durch wirkliche Ausführung der Division von 1 durch 1 — x. Nur weil durch experimentelle Verfahrungsweisen dieser Art thatsächlich solche Reihen gebildet werden, lässt sich die Voraussetzung rechtfertigen, dass überhaupt jede Grössenfunction eine Reihenentwicklung gestattet. Diese Voraussetzung für jeden einzelnen Fall besonders zu beweisen, ist dann allerdings nicht mehr nöthig, sondern es genügt, dass der Erfolg ihre Richtigkeit ohne Ausnahme bestätigt. Auch in diesen zusammengesetzteren Fällen kann jedoch die Induction, in einer übrigens vollkommen zulässigen Weise, verhüllt werden. Dies geschieht theils durch die Verbindung mit deductiven Operationen, theils aber auch dadurch, dass die Induction in indirecter Weise Anwendung findet. So benützt man z. B. die inductive Ermittelung der Primfactoren einer Zahl m, um daraus deductiv diejenigen Zahlen zu finden, die relativ prim zu m sind**). Man würde die letzteren ebenso gut auf dem Wege einer directen, aber weit langwierigeren Induction durch Divisionsversuche bestimmen können.

### d. Die mathematische Abstraction.

Der Grund, wesshalb die mathematische Induction besonders in ihren einfachsten Fällen übersehen zu werden pflegt, liegt vornehmlich darin, dass sich dieselbe von Anfang an mit einem sehr vollständigen und durch eigenthümliche Merkmale ausgezeichneten Abstractionsverfahren verbindet. Niemand würde daran zweifeln, dass die Additionsformel 7 + 5 = 12 der Induction ihren Ursprung verdanke, wenn die Zahlsymbole eine concrete Bedeutung besässen, wenn also die Formel etwa lautete: sieben Aepfel und fünf Aepfel sind zwölf Aepfel. Aber da jene Symbole alle möglichen Objecte bezeichnen können, so ist man geneigt, die Zahlvorstellungen und ihre Verbindungen sowie die grundlegenden geometrischen Constructionen

---

*) Vgl. hierüber Bd. I, S. 313.

**) Lejeune-Dirichlet, a. a. O. S. 19 f.

als die Schöpfungen einer reinen Gedankenthätigkeit anzusehen, auf welche der nur auf empirischem Gebiet zulässige Begriff der Induction keine Anwendung finden könne. In diesem Sinne meinte der ältere Realismus, alle mathematischen Sätze liessen sich aus den abstracten Begriffen der Zahl, der Grösse, des Raumes ohne jede weitere Beihülfe analytisch entwickeln. Sobald man dagegen die anschauliche Grundlage der mathematischen Sätze anerkannte, wurde man entweder durch den abstracten Charakter derselben veranlasst, sie mit Kant auf synthetische Constructionen innerhalb einer reinen Anschauung zurückzuführen, oder man suchte in einer Weise, die mehr auf die psychologische Natur der Vorgänge als auf ihre logische Bedeutung Rücksicht nahm, die Unterschiede zwischen der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Induction zu verwischen. So besteht der Mangel beider Auffassungen darin, dass in ihnen jener Abstractionsprocess, welcher den mathematischen Inductionen hauptsächlich erst ihre Allgemeinheit sichert, nicht in zureichender Weise zur Geltung kommt. Bei Kant erscheint die reine Anschauung als ein ursprüngliches Gebiet innerer Erfahrung, in welchem jede Erkenntniss des Einzelnen mit der Construction anhebt, während in Wahrheit die reine Anschauung die höchste der Abstractionen ist, auf welche die einzelnen Abstractionen mathematischer Denkobjecte zurückführen. Mill dagegen vermengt die mathematischen Begriffsgebilde mit den Objecten der wirklichen Erfahrung, die Geometrie insbesondere bezeichnet er mit Comte als diejenige Naturwissenschaft, die sich mit den räumlichen Eigenschaften der Körper beschäftige*). So verwandeln sich ihm die Grundsätze der Mathematik in Inductionen, die sogar nur eine annähernde Gültigkeit besitzen, da es gerade Linien, Ebenen, regelmässige Figuren, wie sie die Geometrie voraussetzt, in der Wirklichkeit nicht giebt. Er nimmt die mathematischen Sätze für unmittelbare Inductionen aus der Erfahrung, während sie Inductionen von Abstractionen aus der Erfahrung sind.

Als Abstraction überhaupt haben wir das Verfahren bezeichnet, durch welches aus einer Anzahl einzelner Vorstellungen gewisse Elemente eliminirt und die zurückbleibenden als Gegenstand eines Begriffes festgehalten werden. (Abschnitt I, Cap. I, S. 10.) Vermöge des negativen Theils dieser Definition können wir nun offenbar die Entstehung mathematischer Begriffe ohne weiteres dem Verfahren der Abstraction unterordnen. Aber der positive Theil begegnet hier eigenthümlichen Schwierigkeiten. Wenn jene Elimination vollständig ausgeführt wird, so scheint kein Rest übrig zu bleiben, welcher dem mathematischen Begriff entspricht. Die Zahl ist ebenso wenig eine für sich denkbare objective Eigenschaft der zählbaren Objecte, wie gerade Richtung und ausdehnungslose Beschaffenheit Merkmale sind, in welchen gewisse Linien übereinstimmen. Trotzdem beweist diese Thatsache nicht, dass hier überhaupt keine Abstraction stattfindet, sondern sie beweist nur,

*) A. a. O. II, S. 164.

dass man die mathematische Abstraction falsch interpretirt, wenn man sie vollständig nach Analogie derjenigen Abstractionen beurtheilt, zu denen die physikalische Beobachtung Anlass giebt. Aus der Vergleichung der mathematischen mit den physikalischen Begriffen erhellt ohne weiteres, dass jenes Eliminationsverfahren, in welchem das Wesen der Abstraction besteht, bei den ersteren ein vollständigeres gewesen sein muss. Die nächste Frage lautet also: welche Bedingungen müssen zu der gewöhnlichen Abstraction, die wir die physische nennen wollen, hinzutreten, wenn mathematische Begriffe entstehen sollen?

Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben, sobald man sich die Schwierigkeiten vergegenwärtigt, in die sich die gewöhnliche Lehre von der empirischen Entstehung der mathematischen Begriffe verwickelt. Diese Lehre bleibt siegreich, so lange sie sich auf die Schilderung der negativen Seite der Abstraction beschränkt; sie scheitert aber in dem Augenblick, wo sie sich auf die positiven Begriffselemente besinnt, die ihr zurückbleiben. Die gewöhnliche Ausflucht, dass man sich auf die Vorstellungen beruft, die in unserm Bewusstsein die Begriffe repräsentiren, deckt nur nothdürftig dieses Scheitern; denn sie verwechselt die Zeichen der Begriffe mit den Begriffen selber. Der ganze Misserfolg hat aber seine Quelle darin, dass man von Anfang an diejenigen Vorstellungselemente, die den zur Einleitung des Abstractionsprocesses dienenden Objecten angehören, als die allein existirenden behandelt, die subjectiven, unserer eigenen Gedankenthätigkeit angehörenden ganz ignorirt. Führt nun jener Misserfolg zu dem Ergebniss, dass das Eliminationsverfahren der Abstraction scheinbar keinen Rest zurücklässt, so werden wir demnach sogleich schliessen dürfen, dass der in Wahrheit bleibende Rest nichts anderes als unsere bei der Bildung der mathematischen Vorstellungen wirksame Gedankenthätigkeit selbst ist, oder mit andern Worten, dass *mathematische Begriffe zu Stande kommen, indem wir von allen denjenigen Elementen der Vorstellung abstrahiren, die in dem Object ihre Quelle haben.*

Am deutlichsten kommt dieses Verfahren bei dem Begriff der *Zahl* zum Vorschein, weil die abstracte Natur dieses Begriffs sofort die Schwäche der physischen Abstractionstheorie blosslegt. Wenn wir uns fragen, was zurückbleibt, wenn wir von allen wechselnden Bestandtheilen jener Vorstellungen abstrahiren, an denen sich die Function des Zählens bethätigt, so ist dieses Zurückbleibende nichts anderes als die *Function des Zählens selber*, eine Aufeinanderfolge und Verbindung von Apperceptionsacten, deren jeder einzelne den abstracten Begriff der Einheit darstellt. Wir können freilich nicht zählen ohne Objecte, die uns in innerer oder äusserer Erfahrung gegeben sein müssen, und jede Darstellung von Zahlen sieht sich daher genöthigt, zu objectiven Versinnlichungen zu greifen, welche den einfachsten Gelegenheitsursachen, aus denen Zahlen entstehen, nachgebildet sind. Aber der Begriff der Zahl ist, was nach Elimination aller dieser wechselnden Elemente als das Constante zurückbleibt, die Ver-

bindung der einzelnen Denkacte als solcher, abgesehen von jedem Inhalt. (Vgl. Bd. I, S. 468.)

Von hier aus wird es nicht schwer werden, auch den geometrischen Begriffen gerecht zu werden. Der geometrische Punkt unterscheidet sich darin vom physischen, dass es sich bei dem letzteren immer um ein Etwas handelt, was objectiv, mit bestimmten physischen Eigenschaften begabt, gegeben sein soll. Der geometrische Punkt dagegen bedeutet den einzelnen Ort im Raume, insofern derselbe bloss durch unsere ortsbestimmende Gedankenthätigkeit gegeben ist. Von den Eigenschaften der physischen Gegenstände, die uns zur äusseren Bezeichnung so gut wie zur inneren Vorstellung eines Ortes dienen, wird abstrahirt; es bleibt nur die fixirende Thätigkeit zurück, ohne die sich keine Ortsbestimmung vollzieht. Die ausdehnungslose Beschaffenheit des Punktes ist eine selbstverständliche Folge dieser Abstraction, da die Ausdehnung immer nur den objectiven Bestimmungsmitteln der Oerter im Raum eigen ist. Etwas zusammengesetzter ist der Abstractionsprocess, welcher zum Begriff der geraden Linie führt. Hier wird nicht einfach, wie bei der arithmetischen Einheit und dem geometrischen Punkt, von dem zählbaren oder raumerfüllenden Object abstrahirt, sondern der sinnlichen Vorstellung eines annähernd geradlinigen Stabes folgt zunächst die Wahrnehmung, dass ein solcher Stab, wie er auch um sich selbst gedreht werden mag, stets in constanter Weise zwei von einander entfernte Orte im Raum, durch die man ihn gelegt denkt, verbindet. Dieser Erfahrung bemächtigt sich nun die mathematische Abstraction: indem sie aus der Vorstellung des Stabes alle objectiven Bestandtheile eliminirt, bleibt der Denkact übrig, welcher die relative Lage der zwei Punkte in Bezug auf einander bestimmt. Da die Gerade, welche zum Behuf der Lagebestimmung gezogen werden muss, nur in Bezug auf ihre Richtung und Länge bei jener Lagebestimmung in Betracht kommt, so bleiben als einzige Elemente des Begriffs einer gegebenen Geraden Richtung und Länge übrig. Der Umstand, dass es in der Natur keine absolut geradlinige Grenze giebt, steht diesem Begriff nicht im Wege, da der Gedanke der lagebestimmenden Verbindung zweier Punkte ein Postulat unseres Denkens ist, keine wirkliche Vorstellung.

In ähnlicher Weise ist nun die Verarbeitung der übrigen geometrischen Vorstellungen aufzufassen. Die einfacheren derselben werden ebenfalls durch unmittelbare Erfahrungen nahe gelegt; andere entstehen durch objective oder subjective, von unserer Einbildungskraft geleitete Experimente, d. h. auf dem Wege der Construction. Das auf solche Weise entstandene Bild wird aber erst zum geometrischen Object im eigentlichen Sinne, wenn wir alle diejenigen Elemente der Vorstellung eliminiren, welche nur nebensächliche Begleiter des Resultates sind, das unser Denken beabsichtigt. Wollen wir eine gegebene Figur als Kreis auffassen oder einen Kreis construiren, so besteht die Forderung unseres Denkens in einer continuirlichen Folge geometrischer Punkte, welche in

einer Ebene liegen und mit einem einzigen festen Punkte durch gerade Linien von constanter Grösse verbunden werden können. Bei der geometrischen Untersuchung des Kreises beschäftigt uns nur diese Forderung, nicht die einzelne Vorstellung, welche den Begriff in unserm Bewusstsein vertreten muss. Man hat vielfach den Hauptwerth darauf gelegt, dass die den Begriffen entsprechenden Vorstellungen von uns construirt werden müssten. In Folge dessen schwinde, wie man meint, die Schwierigkeit, dass die geometrischen Begriffe keinen realen Objecten entsprechen, und es sei darum möglich, die construirten Vorstellungen selbst als geometrische Gebilde zu betrachten, ohne dass ein hinzukommender Abstractionsprocess erforderlich wäre. Aber diese construirten Vorstellungen leiden an den nämlichen Ungenauigkeiten wie die äusseren Objecte; das wesentliche Moment der Begriffbildung bleibt daher immer die Elimination aller empirischen Bestandtheile der Vorstellung und die Zurückführung auf diejenigen Elemente, welche den Charakter von Postulaten des Denkens besitzen. Die allgemeinen Bedingungen der mathematischen Begriffbildung, die Anschauungsformen des Raumes und der Zeit, beruhen durchaus auf einer Abstraction der nämlichen Art, indem wir uns bei ihnen jeden gegebenen Raum- und Zeitinhalt eliminirt denken und so nur die subjectiven Apperceptionsformen zurückbehalten, welche dem räumlichen und zeitlichen Vorstellen entsprechen. Eben wegen des auch hier vorhandenen Abstractionsprocesses ist die »reine Anschauung« ein Begriff und keine Vorstellung.

Von der Kantischen Auffassung unterscheidet sich die hier entwickelte hauptsächlich darin, dass Kant die subjectiven Elemente der mathematischen Begriffbildung den objectiven vorangehen lässt und sie in diesem Sinne als transscendentale Bedingungen der empirischen Vorstellung selbst bezeichnet. Diese Ansicht ist wesentlich dadurch bedingt, dass Kant die begriffliche Natur der reinen Anschauung leugnet und demnach eine unmittelbare constructive Thätigkeit der reinen Einbildungskraft in dem oben angedeuteten Sinne annimmt. Nichts aber berechtigt uns, in dieser Weise das letzte Resultat des mathematischen Erkennens an den Anfang desselben zu stellen, statt dem wirklichen Erkennen mit unserer Reconstruction nachzufolgen. In der Reduction auf die formalen Elemente unseres Denkens besteht das Wesen des mathematischen Apriori. Dagegen können wir den Grund desselben nicht in einer jede Induction und Abstraction entbehrlich machenden Construction, am wenigsten aber in irgend einem aller Erfahrung vorausgehenden Wissen erblicken, da im Gegentheil die mathematischen Begriffe, von der Erfahrung ausgehend, den längsten Weg zurücklegen müssen.

Das ganze zur Feststellung der mathematischen Begriffe dienende Abstractionsverfahren gehört der Form der isolirenden Abstraction an. Auch in den weiteren Verlauf des mathematischen Denkens greift nun aber die Abstraction unter fortwährender Verbindung mit der Induction ein.

Als generalisirende Abstraction macht sie es möglich, die an einzelnen Gebilden der Anschauung gewonnenen Sätze sofort auf ganze Classen solcher Gebilde zu übertragen und so denselben die ihnen zukommende Allgemeinheit zu sichern. Sodann bemächtigt sich die nämliche Abstraction der durch einzelne Inductionen entstandenen Sätze, um mit ihrer Hülfe die nachher in der Form von Definitionen fixirten Grundbegriffe zu gewinnen, welche als die allgemeinen Bedingungen jener einzelnen Sätze angesehen werden können. Ist auf diese Weise erst die allgemeinste Definition gefunden, die ein bestimmtes mathematisches Begriffsgebiet beherrscht, so liegt darin aber der Anlass, nun wiederum solche Sätze zu prüfen, denen ein axiomatischer Charakter zugeschrieben werden kann, und aus ihnen diejenigen zum Rang definitiver Axiome zu erheben, welche zureichend sind, die Definition zu erschöpfen, und daher alle andern unmittelbar anschaulichen, keines Beweises bedürftigen Sätze als specielle Fälle unter sich enthalten. Euklid's Axiome erscheinen uns nur desshalb fast zufällig zusammengetragen, weil ihre Aufstellung nicht von bestimmten Definitionen der Grundbegriffe von Zahl, Grösse und Raum geleitet wird, und daher theils Axiome verschiedenartiger Gebiete mit einander, theils Sätze von untergeordnetem Charakter mit den Axiomen vermengt sind. Dieser Mangel des Euklidischen Systems ist also wesentlich die Folge unzureichender Generalisation.

## 4. Die mathematische Deduction.

Bei der grossen Bedeutung, welche die Mathematik für die Ausbildung der deductiven Methoden besitzt, hat bereits die allgemeine Methodenlehre vielfach auf das Vorbild der mathematischen Wissenschaft sich beziehen müssen. Namentlich sind die Hauptformen mathematischer Deduction in der Lehre von der Deduction und vom deductiven Beweis besprochen worden; mit der Betrachtung der einzelnen, an bestimmte Grundbegriffe sich anlehnenden logischen Methoden dagegen werden sich die folgenden Capitel beschäftigen. Nur eine allgemeine Deductionsform, die specifisch mathematischer Natur und für alle Gebiete der Mathematik von eminenter Wichtigkeit ist, bedarf hier noch der genaueren Untersuchung: es ist dies die Deduction nach exacter Analogie, die auf den früher betrachteten exacten Analogieschluss als ihre logische Grundform zurückführt. (Vgl. Bd. I, S. 311 f.) In dem systematischen Zusammenhang des mathematischen Denkens pflegt die exacte Analogie eine gewöhnliche unvollständige Induction deductiv abzuschliessen, indem sie dem Resultat derselben Allgemeingültigkeit sichert.

Am deutlichsten ist dies bei dem schon früher erwähnten Schlusse von einem Gliede n auf ein weiteres Glied n + 1, der fälschlich so genannten »vollständigen Induction« der Mathematiker. So findet man z. B.

durch Induction, dass das Commutationsgesetz für zwei und für drei Zahlen gilt, und zeigt dann, dass es in ähnlicher Weise von n auf n + 1 Zahlen ausgedehnt werden kann, wodurch es, da für n jede beliebige Zahl gesetzt werden darf, allgemein bewiesen ist*). Der gemeinsame Grund für diese unbedingte Verallgemeinerung arithmetischer Inductionen ist die Gleichförmigkeit der Zahlgesetze. Diese gründet sich aber nicht bloss auf die thatsächliche Bestätigung in aller Erfahrung, sondern in erster Linie auf jene Constanz der Begriffe, welche die Bedingung unseres eigenen logischen Denkens ist. Wollte ich voraussetzen, dass für den Fortschritt von n zu n + 1 ein anderes Gesetz der Zunahme Platz greife als von 1 zu 1 + 1, so müsste ich annehmen, dass der Begriff der Eins oder der Vorgang der additiven Verbindung eine Veränderung erfahren habe, d. h. dass identische Denkoperationen nicht mit einander identisch seien. Eine solche Annahme widerstreitet freilich auch aller Erfahrung. Dennoch heisst es Heterogenes vermengen, wenn man nun desshalb mit Mill mathematische Verallgemeinerungen dieser Art der Generalisation empirischer Gesetze gleichstellt und sie auf eine blosse inductio per enumerationem simplicem zurückführt**). Es waltet doch eine wesentliche Verschiedenheit ob zwischen einem Satze, der nur dem Umstand, dass bis dahin keine Erfahrung ihm widersprochen hat, seine allgemeine Geltung verdankt, während widerstreitende Erfahrungen sehr wohl vorstellbar wären, und einem solchen Satze, dessen Beseitigung wir uns nicht denken können, ohne gleichzeitig die Gesetze unserer Anschauung und die Normen unseres Denkens verändert zu denken.

In wesentlich anderer Weise vervollständigt die Analogie jene vereinzelten Inductionen, welche sowohl den zusammengesetzten Inductionsprocessen wie der Bildung der Axiome zur Grundlage dienen. Hier haben die einzelnen durch Induction gewonnenen Sätze die Bedeutung abstracter Regeln für singuläre Thatsachen, die an und für sich einer Verallgemeinerung nicht zugänglich sind; die Analogie gestattet es dann aber ohne weiteres, andere singuläre Sätze von verwandter Art festzustellen, für die in Folge dessen das Erforderniss einer besonderen Induction hinwegfällt. Nachdem die Summe 7 + 5 = 12 durch wirkliche Addition der Einheiten gefunden ist, bilden wir sofort die Summen 70 + 50 = 120, 700 + 500 = 1200 u. s. w., ohne dass es uns nothwendig scheint, auch in diesen Fällen die Addition durchzuführen. Indem man die 10, 100, 1000 u. s. w. als neue zusammengesetzte Einheiten betrachtet, setzt man voraus, die zwischen denselben möglichen Operationen seien den nämlichen Gesetzen unterworfen wie diejenigen zwischen den einfachen Einheiten. Die einzelnen Inductionen, aus welchen die axiomatischen Gesetze der Addition, Multiplication, Subtraction und Division abstrahirt sind, beschränken sich so auf die Feststellung der für die Zahlen zwischen 1 und 10 möglichen Zahlformeln,

---

*) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 1 f.

**) Mill, Logik, II, S. 154.

welche bei den directen Operationen unter allen Umständen leicht ausführbaren Verknüpfungen der Einheiten entsprechen, während bei den inversen Operationen in jenen Fällen, in welchen negative, irrationale oder imaginäre Grössen sich ergeben, die aufgestellten Beziehungen wirklichen Inductionen nicht unmittelbar parallel gehen. In der That ist es gar nicht denkbar, dass man, so lange die Zahlen ihre ursprüngliche Bedeutung bewahrten, durch unmittelbare Zählungen zu negativen oder irrationalen Zahlen gelangt wäre. Vielmehr wurden die betreffenden Zahlformeln zunächst nur nach Analogie anderer, aus wirklichen Inductionen hervorgegangener gebildet, und erst spätere Inductionen von anderer Beschaffenheit führten zu der Entdeckung, dass ihnen eine reale Bedeutung zukommen könne. Hier hat sich also der gewöhnliche Verlauf umgekehrt, indem die Analogie zuerst zu bestimmten Gesetzen führte, welche dann durch Induction eine objective Grundlage gewannen. Selbstverständlich kann es in solchen Fällen auch sich ereignen, dass die nachfolgende Induction ganz ausbleibt. Wo sie aber sich einstellt, da ist der Vorgang nicht so zu verstehen, als wenn die Begriffe zuerst durch Analogie und dann noch einmal selbständig durch Induction gefunden wären. Vielmehr hat die Induction immer nur zu realen Beziehungen geführt, für deren Ausdruck die schon vorhandenen Begriffe sich als geeignete Hülfsmittel erwiesen. Ihre Anwendung gieng daher aus einer willkürlichen Uebertragung hervor, zu welcher die Induction nur das äussere Motiv bildete. Kein objectiver Zwang nöthigt uns, Gewinn und Verlust, Vermögen und Schulden durch positive und negative Zahlen auszudrücken; aber durch Induction aus der Erfahrung mussten jene gegensätzlichen Begriffe entstanden sein, wenn die negative Zahl überhaupt eine reale Bedeutung erhalten sollte.

Auf geometrischem Gebiete ist es die Analogie, welche das in einer einzelnen Construction anschaulich Gegebene ohne weiteres auf alle Raumgebilde gleicher Art überträgt, um so der in einem einzelnen Fall erkannten Thatsache den Werth eines allgemeinen Gesetzes zu sichern. Diese Analogie ist aber eine exacte, weil sie auf die Unmöglichkeit sich stützt, andere Räume als den in der wirklichen Anschauung gegebenen vorzustellen. Die grosse Schwierigkeit, welche seit langer Zeit die Geometer in dem so genannten Parallelenaxiom gefunden, beruht wesentlich auf dem Vorkommen der bei diesem Satze mitwirkenden Analogie. Dass zwei gerade Linien, die von einer dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, sich selbst niemals schneiden können, wie weit wir sie auch verlängern mögen, schliessen wir daraus, dass die schneidende Linie sich selbst parallel beliebig längs der beiden Parallelen verschoben werden kann, ohne dass die schneidenden Winkel sich ändern. Insoweit dieser Schluss auf die unmittelbare Anschauung sich stützt, ist er eine Induction; insoweit er von uns über jede mögliche Anschauung hinaus verallgemeinert wird, ist er eine exacte Analogie, die sich auf die durchgängige Congruenz des Raumes mit sich selber stützt.

In einem wesentlich anderen Sinne dagegen verwerthet die geometrische Untersuchung die Analogie, wenn sie die Uebergänge zwischen den geometrischen Begriffen über die reale Anschauung hinaus im Sinne einer blossen Analogie fortsetzt, wenn sie also einen analogen Uebergang, wie er von der Ebene zum Raum stattfindet, zwischen Räumen von mehr Dimensionen statuirt. Hier beginnt, ähnlich wie bei den Erweiterungen des Zahlbegriffs, der Process mit der Analogie, welcher dann unter Umständen Inductionen, die eine reale Anwendung vermitteln, nachfolgen können. Nur muss man freilich stets beachten, dass diese Anwendungen nicht mehr dem Gebiet der eigentlichen Geometrie, welcher durch die Raumanschauung ihre festen Grenzen gezogen sind, angehören, sondern dass es sich hierbei immer nur um eine Behandlung von Problemen anderer Gebiete, der Functionentheorie oder der Mannigfaltigkeitslehre, in geometrischer Form handelt.

Auf diese Weise ergeben sich für die Benützung der exacten Analogie in dem Zusammenhang der mathematischen Methoden allgemein zwei Formen: eine erste, die sich an die Induction anschliesst und zur Feststellung der Allgemeingültigkeit gewisser ursprünglich durch Induction gewonnener Sätze führt, und eine zweite, die gewisse Operationen oder auf anderem Wege festgestellte Begriffe über ihr ursprüngliches Gebiet hinaus erweitert, indem sie einen bestimmten logischen Process nach Analogie der für ihn in den Erfahrungsgrenzen gültigen Normen über die letzteren fortsetzt. Während die erste Form vorzugsweise bei den fundamentaleren Sätzen ihre Anwendung findet, dient die zweite als Basis der abstractesten, zuweilen völlig von dem Boden der Anschauung sich entfernenden Speculationen. Beide Formen lassen sich auf verschiedene Principien zurückführen, die erste auf ein Princip der Constanz mathematischer Gesetze, die zweite auf ein Princip der Permanenz mathematischer Operationen. So sehr auch das erste derselben, das Constanzprincip, geeignet ist, die in einzelnen Anwendungen festgestellten Gesetze auf eine beliebige Zahl anderer Fälle auszudehnen, so ist es doch niemals im Stande, zu neuen Begriffen und Gesetzen zu führen. Dagegen besitzt das Permanenzprincip in hohem Grad diese Eigenschaft. Durch seine Anwendung werden regelmässig bedeutsame Umgestaltungen der Begriffe hervorgebracht, und diese können zugleich von Umwandlungen der für die Begriffsoperationen gültigen Gesetze begleitet sein*). Die grosse Wichtigkeit, welche das Permanenzprincip hierdurch für die Entwicklung des mathematischen Denkens besitzt, wird sich namentlich aus denjenigen Anwendungen ergeben, welche dasselbe auf den fundamentalsten Begriff der Mathematik, auf den der Zahl, gefunden hat.

---

*) Den Ausdruck „Permanenzprincip" für diesen zweiten auf der exacten Analogie beruhenden Grundsatz hat bereits H. Hankel gebraucht (Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1860, S. 10).

## Zweites Capitel.

# Die arithmetischen Methoden.

## 1. Die Zahlen und ihre Symbole.

### a. Das Ziffernsystem.

Weiter zurück als unsere sonstigen für andere Begriffe gebrauchten Schriftsymbole reichen die Anfänge der Zahlsymbolik, welche ihrerseits die Quelle des ganzen von der gewöhnlichen Sprache so weit abweichenden Zeichensystems der Mathematik geworden ist. Ursprünglich sind die besonderen Zahlzeichen durch nichts als durch den äusseren Vortheil der Kürze vor den andern Schriftsymbolen ausgezeichnet. Höchstens in dem überall festgehaltenen Gesetze, dass bei einem Aggregat aus mehreren Zahlen die grössere der kleineren vorangeht*), lässt sich wohl eine unmittelbare Wirkung der arithmetischen Operationen erblicken. Da jede Zahl aus einer Addition von Einheiten entstanden ist, so wird sie durch ebenso viele Summen ausgedrückt, als sie Zahlsymbole zu ihrer Schreibung bedarf. CLIII z. B. bedeutet die drei Summen 100, 50 und 3. Da nun hierbei die kleinere Summe der nach Vollendung der grösseren Summe gebliebene Rest ist, so ist es selbstverständlich, dass sie nachfolgt. In der That kann die umgekehrte Anordnung nur dort eintreten, wo nicht die Addition, sondern die Subtraction oder Multiplication zur Bildung der Zahlbezeichnungen dient, wie dies z. B. in der lateinischen Sprache und Schrift gelegentlich der Fall ist. Aber da die wirkliche Bildung der Zahlen von der Addition ausgeht, so konnten nur ausnahmsweise im Interesse der Kürzung solche entgegengesetzte Stellungen aufkommen, und sie mussten bei jedem rationell durchgeführten Ziffernsystem gegenüber der Forderung gleichmässiger Ordnung wieder verschwinden.

Derjenige Schritt, welcher dem Ziffernsystem erst seinen specifisch mathematischen Charakter aufgeprägt hat, ist die Umwandlung desselben in ein reines Positionssystem. Dieses aber unterscheidet sich von den vorangegangenen Systemen regelmässiger Anordnung dadurch, dass nicht die Stellung der Zahl nach ihrem Werthe, sondern umgekehrt der Werth der Zahl nach ihrer Stellung sich richtet. Diese sinnreiche Umkehrung der Beziehung wurzelt zwar in dem nämlichen Gesetz der Summirung, welchem die vorangegangene Abhängigkeit der Stellung vom Werthe entsprungen war; möglich aber wurde sie durch die Erfindung der Null. Denn die letztere gestattet es, eine doppelte Werthbezeichnung der Ziffern anzuwenden: eine erste, die an das Symbol als solches geknüpft ist,

*) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, S. 32.

und eine zweite, die von seiner Stellung abhängt. Diese giebt die allgemeine Classe an, welcher die Ziffer zugerechnet werden soll. Die Werthverhältnisse der Classen sind dabei an sich willkürlich und rein conventionell, aber es wird durch sie die Menge der einzelnen Symbole bestimmt, welche für die in jeder Classe vorhandenen Zahlen erforderlich sind. So beruht das Decimalsystem auf dem Princip, dass die unterste Classe neun einfache, jede höhere Classe aber neun zusammengesetzte Einheiten enthält, deren jede zehn Einheiten der nächst niederen Classe gleich ist. Wo in einer Classe überhaupt keine Einheiten vorkommen, da wird dies durch das zehnte Zeichen, die Null, ausgedrückt. Das Geschäft der Zählung dadurch zu erleichtern, dass man Gruppen von Einheiten bildet und diese als neue Einheiten behandelt, ist ein so nahe liegender Gedanke, dass er lange vor der Ausbildung einer Ziffernsymbolik verwirklicht worden ist, daher die letztere überall von ihm Gebrauch macht. Das von den indischen Mathematikern erfundene Positionssystem aber hat diesen Gedanken nach dem durch die Decimalmethode geforderten Princip systematisch durchgeführt und dabei durch die reine Stellungsbezeichnung der Einheitswerthe den ungeheuren Vortheil erreicht, dass sie mit der möglichst kleinen Zahl von Zeichen auskommt, indem sie ausser der Null nur so viele Ziffernsymbole nöthig hat, als die niederste Classe Einheiten enthält. Dass hierbei das Decimalsystem den Vorrang erhielt, ist wie gesagt conventionell. Man wird demselben den Vorzug einräumen können, dass es in Anbetracht der durch die praktischen Rechenbedürfnisse gestellten Bedingungen zwischen dem Zuviel und Zuwenig eine richtige Mitte einhält. Hätte man die Zahl der Symbole und also auch der Einheiten jeder Classe noch mehr beschränkt, wie in dem quinären System mancher Naturvölker, so würden schon bei mässigen Summen der Classen zu viele sein. Hätte man ein vigesimales oder gar sexagesimales System bevorzugt, so wäre die Menge der Zeichen nachtheilig für ihre sichere Unterscheidung geworden. Nur das duodecimale System, wie es in unserer Tageseintheilung angedeutet ist, hätte diese Vortheile in ungefähr gleichem Grad dargeboten, und es würde daneben für die Division den Vorzug besitzen, dass die Einheiten höherer Classe in eine grössere Zahl von Factoren zerlegt werden könnten als die Zehn und ihre Potenzen. Da jedoch die objectiven Bedingungen der Jahres- und Tageseintheilung, aus denen sich möglicher Weise ein Duodecimalsystem entwickeln liesse, keineswegs zwingend sich geltend machten, und sogar nur in sehr annähernder Weise auf Verhältnisse ganzer Zahlen zurückführbar waren, so hatte hier von vornherein die auf den unveränderlichen Eigenschaften des Menschen selbst beruhende decimale Zählmethode den Vorzug.

Das Positionssystem stellt, ganz abgesehen von der speciellen Form, die es als Decimalsystem angenommen hat, jede beliebige Zahl allgemein in der Form einer Reihe dar von der Form

$$\ldots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a,$$

in welcher durch a, b, c, d . . . die Einheitswerthe der einander folgenden Classen bezeichnet sind, während $\beta$ die Anzahl der in dem gewählten System vorhandenen Ziffernsymbole bedeutet; im Decimalsystem ist also $\beta = 10$, während für a, b, c, d . . . irgend welche unter den Ziffern 0 bis 9 eintreten können. Diese Reihe zeigt deutlich den mathematischen Charakter des Positionssystems: jede Zahl wird durch dasselbe zerlegt in eine Reihe von Summen, welche nach absteigenden Potenzen der Grundzahl des Systems geordnet ist. Da die Reihe bis zu jeder beliebigen Potenz von $\beta$ fortgesetzt werden kann, so ist sie durch keine noch so grosse Zahl begrenzt, ohne dass doch der kleine Vorrath der benützten Ziffernsymbole überschritten zu werden braucht. Das Positionssystem hat daher die durch die unbegrenzte Menge der Zahlen gestellte Forderung gelöst. In der That erkannten schon die indischen Mathematiker, dass die unbegrenzt grosse Zahl, deren Begriff in jener Forderung gegeben ist, zwar niemals durch eine wirkliche Summenreihe, wohl aber, unter Zuhülfenahme des nämlichen Symbols, welches das Fehlen einer Einheit andeutet, der Null, durch eine Division von der Form $\frac{a}{0}$ ausgedrückt werden kann*).

Nicht in der gleichen Weise wie nach oben sind die Zahlen nach unten unbegrenzt. Grössen, die kleiner als die Einheit sind, können zwar bis zu beliebiger Kleinheit durch echte Brüche ausgedrückt werden. Da die Nenner solcher Brüche aber jeden möglichen Werth haben können, so fehlt es innerhalb der ursprünglichen natürlichen Zählmethoden an einem Princip, welches für derartige Zahlen eine durchgängige Vergleichbarkeit herstellt. Das Positionssystem liefert dieses Princip, indem es einfach den Aufbau der Zahl aus einer Summenreihe nach entgegengesetzter Richtung fortsetzt. Wie es die Zahlen, die über der Einheit liegen, durch die Bildung neuer Einheiten gewinnt, die im *directen* Verhältniss der aufsteigenden Potenzen der Grundzahl des Systems zunehmen, so gewinnt es die Zahlen unter der Einheit ebenfalls durch die Bildung neuer Einheiten, welche den aufsteigenden Potenzen der Grundzahl *reciprok* sind. So entsteht beim Decimalsystem die Ergänzung durch die Decimalbrüche oder allgemein die Darstellung einer beliebigen Zahl durch die Reihe

$$\ldots e\,\beta^4 + d\,\beta^3 + c\,\beta^2 + b\,\beta + a + \frac{b'}{\beta} + \frac{c'}{\beta^2} + \frac{d'}{\beta^3} + \frac{e'}{\beta^4} + \ldots,$$

welche Reihe nach beiden Seiten unbegrenzt wachsen kann und so auf die beiden Begriffe der unbegrenzt grossen und der unbegrenzt kleinen Zahl hinweist. Durch diese Ausdehnung hat sich das Positionssystem zugleich den Erweiterungen angepasst, welche der ursprüngliche Zahlbegriff durch die Entwicklung der gebrochenen und namentlich der irrationalen Zahlen erfuhr.

---

*) M. *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 523.

b. Die Zahlarten und Zahlsysteme.

Dass durch die einfachen arithmetischen Operationen und ihre Wiederholung aus dem ursprünglichen System der positiven ganzen Zahlen andere Zahlbegriffe entstehen, welche dann eine reale Anwendung auf geometrische Grössen gestatten, wurde früher hervorgehoben. (Bd. I, S. 468 f.) Allgemein ist demnach eine doppelte Möglichkeit für die Erzeugung neuer Zahlbegriffe gegeben. Dieselben können erstens entstehen durch die Anwendung des Permanenzprincips auf die Resultate arithmetischer Operationen, indem man voraussetzt, dass mit diesen Resultaten stets die nämlichen Operationen wie mit den ursprünglichen Zahlen wieder ausgeführt werden können; und sie können zweitens sich bilden durch die Anwendung des Constanzprincips auf beliebige in der Anschauung gegebene Objecte, indem man annimmt, dass jeder Gegenstand, welcher überhaupt dem Begriff der Grösse subsumirt werden kann, eine analoge Messung durch Zahlen gestatte, wie eine solche für discrete abzählbare Objecte möglich ist. Diese historisch auf einander gefolgten Entstehungsformen der secundären Zahlbegriffe tragen aber logisch, beide aus verschiedenen Gründen, den Charakter der Zufälligkeit an sich. Bei der ersten erscheint es als ein willkürlicher Act, dass Rechnungsresultate, die nicht durch Zahlen ausgedrückt werden können, dennoch wie Zahlen behandelt werden; bei der zweiten entspringen die neuen Begriffe aus den empirischen Eigenschaften unserer Sinneswahrnehmung, und sie würden daher möglicher Weise ganz andere sein können, wenn diese Eigenschaften sich veränderten. Der Versuch erscheint daher gerechtfertigt, dass man jene beiden äusseren Entwicklungsformen der Zahlbegriffe durch eine innere, dem ursprünglichen Zahlbegriff selbst immanente zu ersetzen strebt.

Diese dritte Erzeugungsweise, welche wir im Unterschiede von der arithmetischen und geometrischen die logische nennen wollen, kann aber allein dadurch zum Ziele führen, dass sie die begrifflichen Merkmale, die in den secundären Zahlbegriffen zur Anwendung kommen, schon in den ursprünglichen Zahlbegriff aufnimmt. Dies geschieht am einfachsten, wenn man ausser dem Begriff der Einheit und der Zusammenfassung von Einheiten oder der Anzahl noch den Begriff des Elementes einführt, indem man von vornherein die Möglichkeit offen lässt, dass die Einheit aus beliebig angeordneten, selbst aber nicht weiter zerlegbaren Elementen, die auch »arithmetische Punkte« genannt werden, bestehe. Der logische Unterschied von den vorhin hervorgehobenen Umwandlungen des ursprünglichen Zahlbegriffs vermittelst der Anwendungen des Permanenz- und des Constanzprincips besteht hier darin, dass jener ursprüngliche Zahlbegriff selbst schon dem generellen Begriff der Mannigfaltigkeit subsumirt wird, aus welchem letzteren successiv seine logisch möglichen Formen durch Determination entwickelt werden. Unter diesen Formen müssen dann aber nothwendig auch die verschiedenen Zahlbegriffe anzutreffen

sein. Jener allgemeine Begriff enthält so zwei Bestandtheile, deren Variirung verschiedene Entwicklungen ermöglicht: 1) den Begriff des letzten absolut unzerlegbaren, weil jeder Grösse entbehrenden Elementes, und 2) den Begriff der Einheit oder des einzelnen irgend einen Inhalt zusammenfassenden, aber von der objectiven Beschaffenheit dieses Inhalts abstrahirenden Denkactes. Der Variirung des ersten dieser Begriffe entsprechen die Unterschiede der ganzen und gebrochenen, der rationalen und irrationalen Zahlen; aus den Veränderungen des zweiten entspringen die Unterschiede der positiven, negativen, imaginären und complexen Zahlen. Beide Entwicklungen haben eine völlig abweichende Bedeutung. Durch die ersteren ändert sich die innere Constitution, durch die letzteren die äussere Form des Zahlbegriffs; jene beziehen sich auf die Art des Zählens, diese auf die Richtung desselben. Es wird daher zweckmässig sein, beide auch durch verschiedene Namen zu unterscheiden: wir wollen die ersten als Zahlarten, die zweiten als Zahlsysteme bezeichnen. Da beide Begriffsvariationen unabhängig von einander geschehen können, so versteht es sich übrigens von selbst, dass in jedem der Zahlsysteme die verschiedenen Zahlarten möglich sind.

Die einfachste Zahlart sind die ganzen Zahlen, weil bei ihnen die Begriffe der Einheit und des Elementes sich decken. Ihre nächste anschauliche Verwirklichung finden sie in der zeitlichen Aufeinanderfolge der Denkacte, da bei ihnen die Einheit dem einzelnen Denkact unter Abstraction von jedem Inhalt desselben entspricht. (Siehe oben S. 108.) Diese psychologische Grundlage des Zahlbegriffs darf aber nicht dazu verführen, dass man mit Kant und W. R. Hamilton auch logisch die Zahl auf die Zeit zurückführt*). Können wir schon psychologisch unter Umständen mehrere Denkacte gleichzeitig vollziehen, so ist es logisch überhaupt nicht nöthig, über die Zeitfolge der Einheiten irgend etwas auszumachen. Das einzige was vorausgesetzt werden muss, ist, dass die Einheiten überhaupt zusammengefasst werden. Logisch ist demnach die Zahl ein Begriff sui generis, der ebenso wenig auf die Zeit wie auf den Raum zurückgeführt werden kann. Wäre er dies nicht, so würde auch kaum denkbar sein, wie es möglich ist, den Zahlbegriff logisch unabhängig von diesen Anschauungen nach seinen verschiedenen Gestaltungen zu entwickeln.

Bei den gebrochenen Zahlen entsprechen die Begriffselemente der Einheit und des Elementes einander nicht mehr, sondern es werden bestimmte Einheiten aus Elementen in je nach Bedürfniss wechselnder Menge zusammengesetzt gedacht. Die gebrochene Zahl misst diese Mengen vermittelst der Verhältnisse ganzer Zahlen. Da die Menge der Elemente beliebig gross vorausgesetzt werden kann, so ist die gebrochene Zahl zur Messung jeder beliebigen Grösse geeignet. Selbst die stetig wachsende Grösse entzieht sich ihr nicht, da für praktisch-arithmetische Zwecke dem

*) W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853. Preface.

Continuum ohne weiteres ein Nebeneinander beliebig dicht benachbarter, aber getrennter Elemente substituirt werden kann. Diesen Zwecken entsprechend richtet sich bei der Aufstellung der gebrochenen Zahlen die vorausgesetzte Dichtigkeit der Elemente nach den zu messenden Grössen selbst. Die gebrochenen Zahlen repräsentiren also eine beliebige, aber im allgemeinen ungleich dichte Anordnung von Elementen.

Aus diesem Umstand entspringt eine Forderung, die erfüllt gedacht die dritte und letzte Zahlart, die der irrationalen Zahlen, entstehen lässt. Die Forderung besteht in der Voraussetzung, die Elemente der Mannigfaltigkeit seien ein für alle Mal so angeordnet, dass mittelst derselben jede beliebige Theilung möglich ist. Hierdurch hat das für die ganzen Zahlen gültige Theilungsgesetz eine eigenthümliche Umkehrung erfahren, neben der aber trotzdem das ursprüngliche Theilungsgesetz gültig bleibt. Dieses letztere besteht darin, dass durch jede beliebige Zahl a, die man aus der Reihe der ganzen Zahlen herausgreift, die sämmtlichen Zahlen in zwei Classen zerfällt werden, von denen die eine nur Zahlen $< a$, die andere nur Zahlen $> a$ enthält, während a selbst entweder der einen oder der andern Classe zugerechnet werden kann. Führt man nun die Forderung beliebiger Theilbarkeit ein, so bedeutet dies offenbar, dass auch das umgekehrte Princip gültig ist, d. h. dass, wenn man irgend eine Theilung der vorausgesetzten Mannigfaltigkeit vornimmt, dadurch jedesmal eine bestimmte Zahl a entstehe, welche die Reihe der Zahlen in zwei Classen von den vorhin geschilderten Eigenschaften zerfällt. Die Zahlen, welche dieser Forderung beliebiger Theilung Genüge leisten, sind die irrationalen Zahlen, und die Mannigfaltigkeiten, welche denselben entsprechen, besitzen das Merkmal der Stetigkeit*). Gebunden in unsern arithmetischen Messungen an die ursprüngliche Gestaltung des Zahlbegriffs, vermögen wir auch die irrationalen Zahlen nicht durch besondere Zahlformen auszudrücken, ja wir besitzen nicht einmal für sie, wie für die gebrochenen Zahlen, das Hülfsmittel einer vollständigen Werthbestimmung mittelst der Relationen ganzer Zahlen, sondern es bleibt nur die Aufstellung von Näherungswerthen in der Form gebrochener Zahlen möglich, die aber wegen der unbegrenzten Fortsetzung der Theilungen, welche die letzteren gestatten, bis zu jeder beliebigen Grenze den wirklichen Werthen genähert werden können.

Wie auf diese Weise aus der Variation der Bedingungen für die Elemente der Zahlenmannigfaltigkeit die Zahlarten, so entspringen nun aus der Einführung verschiedener Voraussetzungen für die Einheiten der Zahlen die Zahlsysteme. Bezeichnen wir die ursprüngliche Einheit durch e, so hat der Werth a, den wir irgend einer Zahl beilegen, die Bedeutung, dass e a-mal gedacht werden solle. Diese einfache Position einer Ver-

---

*) Vgl. hierzu Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, und G. Cantor, Mathem. Annalen, Bd. 5, S. 127 f.

bindung von Einheiten nennen wir eine positive Zahl, und die unbegrenzte Mannigfaltigkeit solcher Zahlen ist das System der positiven Zahlen. Hiervon können nun die Zahlen anderer Systeme in doppelter Weise logisch abweichen. Sie können erstens aus verschiedenartigen Einheiten gebildet sein, so dass irgend eine Zahl durch das Product a . e' dargestellt werden muss, worin e' die abweichende Einheit bedeutet. Derartige Zahlsysteme stimmen mit den gewöhnlichen darin überein, dass sie einfache sind: zu jeder Zahl a des gewöhnlichen existirt eine gleich grosse Zahl eines solchen neuen Zahlsystems, die von jener nur durch die Qualität der Einheit verschieden ist. Zweitens können neue Zahlsysteme entstehen, indem Gruppen verschiedener Einheiten zu neuen Zahlen zusammentreten. Gruppen, die aus den nämlichen Einheiten bestehen, wie a . e und b . e, können stets durch Addition zu einfachen Zahlen (a + b) e vereinigt werden. Gruppen aus verschiedenartigen Einheiten, wie a . e und b . e', sind aber nicht addirbar, weil die Einheiten e und e' nicht vereinigt werden können. Eine so gebildete Zahl wird also nur in der Form eines durch Addition verbundenen Aggregates, a . e + b . e', darstellbar sein. Ein System, das aus solchen Zahlen aufgebaut ist, heisst ein complexes Zahlsystem, und es wird speciell, wenn jede Zahl zweierlei Einheiten enthält, ein zweifach ausgedehntes genannt, wenn drei verschiedenartige Einheiten vorkommen, ein dreifach ausgedehntes u. s. w. Es erhellt hieraus, dass die Menge denkbarer Zahlsysteme, und zwar sowohl der einfachen wie der complexen, unbegrenzt ist.

Vergegenwärtigen wir uns nun die Anwendungen der so entstandenen Zahlsysteme auf die Objecte der Anschauung, so liegt offenbar der wesentlichste Unterschied der ursprünglichen positiven Zahlen von den aus ihnen abgeleiteten darin, dass sich jene ausschliesslich auf die zählbaren Objecte selber beziehen, während durch diese zugleich die wechselseitigen Beziehungen der Objecte bestimmt werden. Erst unter dem Einfluss dieser neuen Begriffe erhalten dann auch die positiven Zahlen neben ihrem unmittelbaren noch einen relativen Werth, wobei sie jedoch stets die festen Beziehungspunkte bilden, auf welche die andern zurückgeführt werden müssen, sobald es um eine wirkliche numerische Messung der Objecte und ihrer Relationen sich handelt. Dies geschieht, indem man die Einheiten der übrigen Zahlsysteme durch positive Einheiten ersetzt und die letzteren mit Operationssymbolen versieht, welche die Entstehungsweise der andersartigen Einheiten aus positiven angeben. Auf diese Weise tritt an Stelle der zweiten Einheit $e_1$ das Zeichen der Subtraction, an Stelle der dritten i das aus der geometrischen Porportion $+ 1 : i = i : - 1$ entnommene Zeichen $\sqrt{-1}$, und die vierte Einheit $i_1$ endlich nimmt das der Verbindung der Subtraction und Radicirung entsprechende Zeichen $-\sqrt{-1}$ an. (Vgl. Bd. I, S. 471 f.)

Die logische Bedeutung der negativen, der imaginären und der aus den letzteren zunächst abgeleiteten gemeinen complexen Zahlen besteht hiernach

darin, dass dieselben neben den rein metrischen Verhältnissen der Grössen auch ihre verschiedenen Richtungsverhältnisse bestimmen, wobei aber wiederum die Begriffe der Richtung und Ausdehnung in einem allgemeineren logischen Sinne zu verstehen sind, in welchem sie die räumlichen Beziehungen als einen Specialfall unter sich begreifen.

Die Beschränkung des gemeinen complexen Zahlsystems auf eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit legt jedoch die Frage nahe, ob nicht mit Hülfe weiterer Einheiten noch andere Zahlsysteme sich bilden lassen. Mindestens für den Raum scheint die geometrische Anschauung eine ähnliche numerische Lagebestimmung zu verlangen, wie sie die gewöhnlichen complexen Zahlen für die Ebene gestatten. Nichts desto weniger erweist sich diese Forderung als undurchführbar. Vielmehr führt der Versuch, irgend eine weitere Form imaginärer Einheiten zu verwenden, immer wieder auf die gewöhnlichen imaginären und complexen Zahlen zurück. Der logische Grund dieser Beschränkung liegt in dem arithmetischen Ursprung der verschiedenen Einheitsformen. Wie die Gerade mit ihren zwei Richtungen der ersten Stufe der einfachen arithmetischen Operationen, der Addition und Subtraction, entspricht die durch zwei Gerade bestimmte Ebene den Operationen zweiter Stufe, der Multiplication und Division. Weitere Formen imaginärer Einheiten würden also nur dann möglich sein, wenn entweder noch andere arithmetische Fundamentaloperationen existirten, oder wenn mindestens die gegebenen in verschiedener Weise ausführbar wären, wenn also z. B. mehrere einander coordinirte Formen der Multiplication und Division von verschiedener Bedeutung aufgestellt werden könnten. Von dem ersten dieser Fälle kann vermöge der Natur des Zahlbegriffs nicht die Rede sein. Dagegen ist der zweite an und für sich denkbar, da bei jeder Operation je zwei Zahlen in zwei verschiedenen Formen mit einander verbunden werden können, additiv in den Formen $a + b$ und $b + a$, multiplicativ in den Formen $a . b$ und $b . a$. Nimmt man nun an, diese Formen seien einander nicht äquivalent, so würde jede Operation in ebenso viele Unterarten zerfallen, als Permutationen zwischen den Gliedern einer Summe oder den Factoren eines Productes möglich sind. Vorausgesetzt also, die Multiplication wäre eine vieldeutige Operation, so würde man, da die Zahl der Factoren, die man zu einem Producte vereinigen kann, unbegrenzt ist, beliebig viele Arten imaginärer Einheiten und mittelst ihrer eine unbegrenzte Anzahl complexer Zahlsysteme höherer Ordnung erhalten können.

Einen realen Werth können nun diese formalen Bedingungen natürlich nur dann gewinnen, wenn die wirkliche Anschauung zur Anwendung entsprechender Zahlbegriffe Veranlassung bieten sollte. Hier ist nun leicht ersichtlich, dass sofort ein von den Verhältnissen des gemeinen complexen Zahlensystems verschiedener Fall eintritt, sobald man als Constructionsfeld nicht die Ebene, sondern die Kugeloberfläche wählt. Irgend ein in der Ebene gelegener Punkt C, dessen Lage durch die complexe Zahl $a + b i$

bestimmt ist, lässt sich als Endpunkt der Diagonale A C eines Parallelogramms denken, dessen Seiten a und b i sind. Ob man nun auf den Wegen A B, B C oder A D, D C nach C gelangt, ist für das Resultat gleichgültig. Man schliesst daher, dass a + b i = b i + a ist, oder dass für das ebene complexe Zahlensystem das commutative Princip gilt. Nun lässt sich auch auf der Kugeloberfläche eine Figur construiren, welche dem ebenen Parallelogramm in der Weise entspricht, dass eine Seite B C mit einer andern A D

Fig. 4.

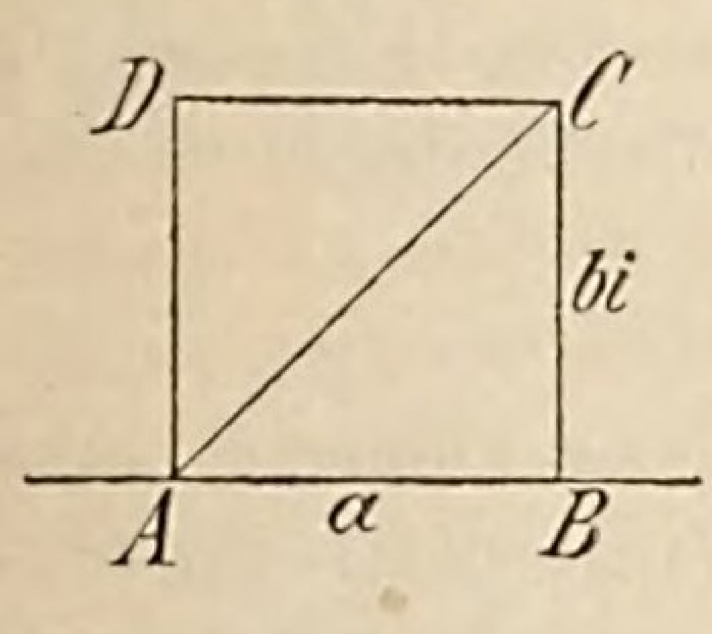
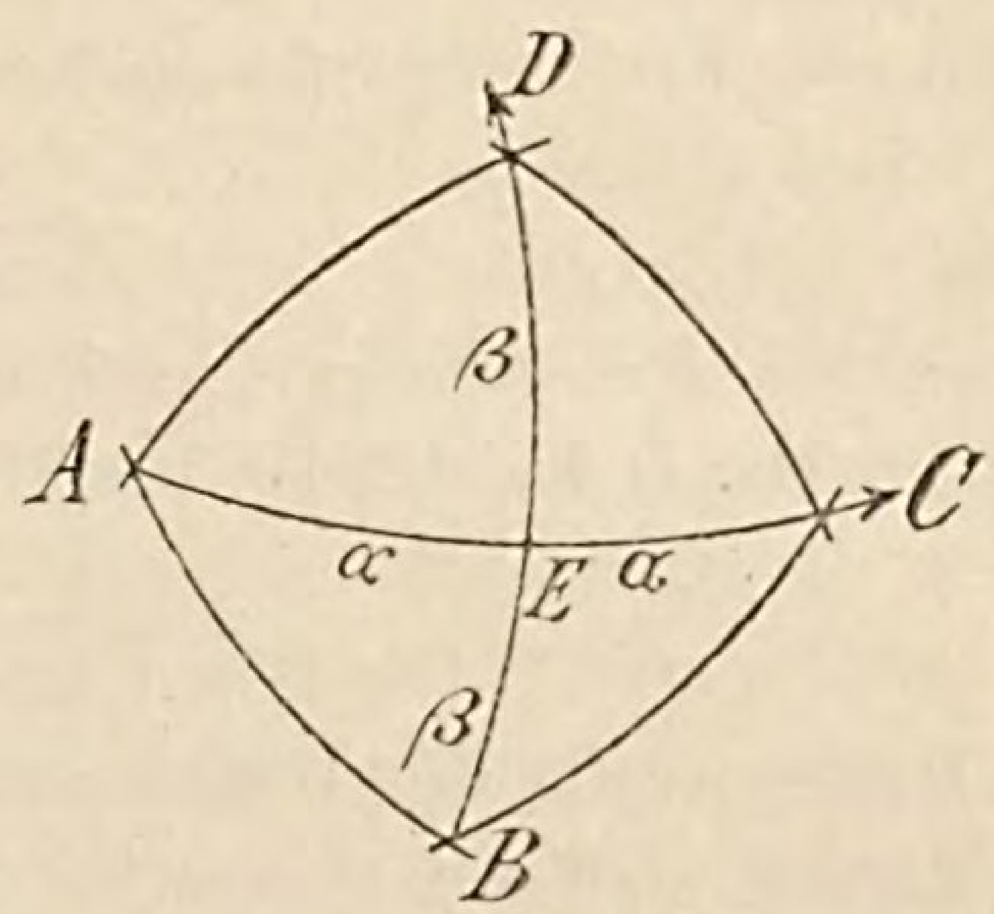



Fig. 5.




zur Deckung kommt, wenn sie um den Betrag einer dritten Seite in der Richtung B A um den Mittelpunkt der Kugel gedreht wird. Es ist aber klar, dass jene zwei parallelen Seiten eines sphärischen Parallelogramms zwar in ihrer Grösse, nicht aber in ihrer Richtung einander gleich sind: in diesem Fall wird daher auch einer Bewegung auf der Seite B C eine gleich grosse auf der Seite A D nicht äquivalent sein. Denken wir uns die diagonalen Hauptkreise gezogen, so entstehen vier sphärische Dreiecke, die an dem Pol E an einander stossen. Die dem Winkel bei E gegenüberliegende Seite eines jeden solchen Dreiecks lässt sich durch die Drehung eines von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehenden Vectors um die beiden Winkel $\alpha = EC$ und $\beta = BE$ hervorgebracht denken. Das Resultat einer combinirten Drehung wird aber in diesem Fall gleich dem Product der beiden einfachen Drehungen sein. Setzen wir also den Vector $= 1$ und bezeichnen wir $\alpha$ und $\beta$ als Versoren, so ist der Bogen B C gleich dem Producte $\alpha . \beta$ seiner beiden Versoren. Es zeigt sich aber zugleich, dass dieses Product wegen der vorhin hervorgehobenen Eigenschaften des sphärischen Parallelogramms verschiedene Bedeutungen annimmt, je nachdem es in der Form $\alpha . \beta$ oder $\beta . \alpha$ geschrieben und je nachdem es mit positivem oder negativem Vorzeichen eingeführt wird. Setzen wir die Drehungen in der Richtung der Pfeile als die positiven voraus, so wird das Product $+ \alpha . \beta$ gleichzeitige Drehungen E C und B E bedeuten, welche aber, da $\beta$ Multiplicandus ist, so verlaufen, dass ein von E um den Winkel $\beta$ entfernter Punkt in die Distanz $\alpha$ geführt wird, dass also $+ \alpha . \beta = BC$

wird. Ebenso kann $+\beta.\alpha$ nur derjenige Bogen sein, bei dessen Anfangspunkt $\alpha$ gegeben und $\beta = 0$ ist, also A D. Aus ähnlichen Erwägungen ergiebt sich $AB = -\alpha.\beta$ und $DC = -\beta.\alpha$. Diese Betrachtungen lassen sich auf beliebige im Raum ausgedehnte Gebilde übertragen, indem man jede Strecke erstens in Bezug auf ihre Grösse durch eine reelle Zahl misst, dazu aber zweitens in besonderen imaginären Einheiten den Bogen bestimmt, welcher die Richtung der Strecke angiebt. Bezeichnet man die vom Mittelpunkt der Kugel aus nach drei zu einander senkrechten Richtungen gelegten Einheitsradien mit i, j und k, so lassen sich dieselben als zu einander und zu den reellen Einheiten laterale Grössen betrachten, für welche die Bestimmungen gelten

$$i.i = -1,\quad j.j = -1,\quad k.k = -1,\quad i.j = k,$$

und die Zahl $\alpha$, welche eine geometrische Strecke nach Grösse und Richtung im Raum vollständig bestimmt, nimmt nun die Form an

$$\alpha = a + bi + cj + dk.$$

Diese viergliedrigen, eine reelle und drei imaginäre Einheiten enthaltenden Zahlen sind von ihrem Erfinder W. R. Hamilton als Quaternionen bezeichnet worden. Durch sie wird jene Uebertragung des Zahlbegriffs auf den Raum, welche das gewöhnliche System der complexen Zahlen vermöge der Eindeutigkeit der arithmetischen Fundamentaloperationen nicht gestattet, auf einem Umweg erreicht. Der Umweg besteht aber darin, dass man Grösse und Richtung als getrennte Eigenschaften einer Strecke behandelt und dann die letztere auf die Drehungen einer imaginären Kugel zurückgeführt denkt. Diese Trennung bringt es dann mit sich, dass die Quaternionen nicht zwei sondern drei imaginäre Einheiten enthalten. Auch hier lassen sich wieder die Begriffe der Richtung und Strecke selbstverständlich in einem allgemeineren, von den räumlichen Beziehungen abstrahirenden Sinne auffassen. Immerhin ist es klar, dass die so entstandenen Zahlen nicht wie die gewöhnlichen complexen Zahlen aus einer mit innerer Nothwendigkeit sich ergebenden Erweiterung des Zahlbegriffs hervorgegangen sind, sondern dass sie auf der Anwendung eines Kunstgriffs beruhen, der trotz seiner praktischen Fruchtbarkeit doch den Charakter des Zufälligen besitzt.

Einen logisch strengeren, aber freilich für die anschaulichen Anwendungen minder fruchtbaren Charakter gewinnt die Entwicklung neuer complexer Zahlbegriffe dann, wenn man von der Entstehung derselben aus arithmetischen Operationen überhaupt abstrahirt und lediglich die formalen Eigenschaften der gewöhnlichen complexen Zahlen zum Ausgangspunkte nimmt. Eine solche Entwicklung kann dann wieder nach zwei Richtungen ins unbegrenzte fortgeführt werden, indem man 1) die Anzahl der Glieder einer complexen Zahl zunehmen lässt, und 2) an Stelle des linearen Ausdrucks, aus welchem die gewöhnlichen complexen Zahlen bestehen, höhere Potenzen treten lässt. Logisch betrachtet bewegen sich demnach

diese zahlentheoretischen Speculationen lediglich in fortwährenden Anwendungen des Permanenzprincips*).

Die verschiedenen Entwicklungen des Zahlbegriffs haben nunmehr gezeigt, dass, obgleich dieselben ursprünglich in der Anschauung und in den von der Anschauung ausgehenden Begriffsoperationen ihre Quelle haben, dennoch überall diesen anschaulichen Motiven ein rein logisches Erzeugungsprincip substituirt werden kann, welches den Vortheil der grösseren Allgemeinheit voraus hat. Mit seiner Annahme werden dann die anderen Bildungsformen der Zahlen zu blossen Folgerungen und Anwendungen herabgedrückt, so dass gelegentlich von ihnen auch ganz abgesehen werden kann. Dieses Verhältniss ist aber nicht etwa so aufzufassen, als sei das logische Erzeugungsprincip nur aus zufälligen Ursachen das spätere, oder als sei eine intellectuelle Entwicklung denkbar, bei welcher die Sache umgekehrt sich verhalten könnte. Diese Auffassung wird durch die Existenz eines Hülfsbegriffs widerlegt, den die logische Erzeugung der neuen Zahlbegriffe nicht entbehren kann, während die übrigen Entwicklungen seiner nicht bedürfen, des Hülfsbegriffs der Mannigfaltigkeit oder, was der Bedeutung nach damit identisch ist, des arithmetischen Elementes. Der Mannigfaltigkeitsbegriff ist zunächst durch eine Abstraction aus den in der Anschauung gegebenen Mannigfaltigkeiten, wie Zeit, Raum, beliebig vertheilte Zeitmomente oder im Raum gegebene Punktmengen u. dergl., hervorgegangen, und er hat dann seine arithmetische Allgemeinheit durch die Anwendung des Permanenzprincips auf diese Abstraction erlangt, indem nach demselben nicht nur die Verhältnisse der Dichtigkeit der Elemente, sondern auch die Richtungen ihrer Anordnung als dem Begriff nach völlig unbeschränkte und darum die realen Bedingungen der Anschauung beliebig übersteigende gefordert werden. Darauf wird ausserdem vermittelst des Constanzprincips eine exacte Analogie der für verschiedene Mannigfaltigkeiten solcher Art gültigen Gesetze vorausgesetzt. Aber die Grundlage dieser begrifflichen Constructionen bleibt doch die Anschauung, sie bleibt es auch in dem Sinne, dass hier wie überall fortwährend Anschauungen als Stellvertreter der Begriffe functioniren müssen. (Bd. I, S. 41.) Der Unterschied von den beiden anderen Erzeugungsformen besteht also im wesentlichen nur darin, dass bei den letzteren im einen Falle das Permanenz-, im andern das Constanzprincip erst nachträglich auf den ursprünglichen Begriff der positiven ganzen Zahlen angewandt wird, während dort beide Principien gleichzeitig vor der Ableitung des Zahlbegriffs überhaupt zur Anwendung kommen, um zunächst den Begriff einer Mannigfaltigkeit herzustellen, der hinreichend allgemein ist, so dass die verschiedensten denkbaren Zahlarten und Zahlsysteme aus ihm abgeleitet werden können. Es ist ersichtlich, dass dieses Verfahren, welches die beiden ersten eigentlich als Theile in sich begreift, das logisch

*) Eine allgemeine Uebersicht der höheren complexen Zahlen giebt H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 99 f.

vollendetere ist. Dies bewährt sich auch darin, dass die Zahlbegriffe, zu denen man auf solchem Wege gelangt, an sich unerschöpflich sind, und dass begriffliche Beziehungen zwischen ihnen hervortreten, welche bei den specielleren Erzeugungen unberührt bleiben.

### c. Die Zahlgrenzen.

Die positiven ganzen Zahlen bilden eine unerschöpfliche Reihe, vor deren Anfang die Nichtexistenz jeder Zahl, die Null, und an deren Ende die jede denkbare Zahl übersteigende Grösse, das Unendliche, liegt. Diese Eigenschaft geht auf alle andern Zahlarten und Zahlsysteme über. Die Symbole 0 und $\infty$ bezeichnen daher nicht selbst Zahlen, sondern die beiden Grenzen des Zahlbegriffs. Aber dies schliesst nicht aus, dass sie gewisse Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben und daher unter bestimmten Bedingungen den Charakter wirklicher Zahlen annehmen können.

Zunächst nämlich entstehen 0 und $\infty$, ebenso wie die eigentlichen Zahlen mit Ausnahme der Einheit, durch die arithmetischen Fundamentaloperationen. So wird $\infty$ durch die unbegrenzte Addition von Einheiten oder andern positiven Zahlen, die unbegrenzte Multiplication von ganzen Zahlen mit Ausnahme der Einheit oder auch durch die Division einer Zahl mit 0 erzeugt. Die Null dagegen entsteht entweder durch die Subtraction zweier gleicher Zahlen von einander oder durch die Division einer Zahl mit $\infty$. Es zeigt sich nun schon bei der Vergleichung dieser Entstehungsweisen, dass jedes der Symbole 0 und $\infty$ verschiedene Bedeutungen besitzen kann. Am deutlichsten ist dies bei der Null, wie aus den einfachen Beziehungen hervorgeht:

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = \frac{0}{0} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a - a}{b - b} = \frac{0}{0} = 0.$$

Jeder der beiden Grenzbegriffe kann hiernach in einer doppelten Bedeutung auftreten. In der ersten bedeutet er die Grenze einer veränderlichen Grösse, einer unaufhörlich abnehmenden oder unaufhörlich zunehmenden; in der zweiten dagegen bedeutet er was alle Grenzen messbarer Grössen überschreitet, weil es entweder keine Grösse besitzt, oder weil seine Grösse durch die Reihe aller Zahlen, selbst wenn diese vollendbar wäre, nicht erschöpft würde. Im ersten Fall handelt es sich um eine aus der Betrachtung der Grössenänderungen, im zweiten um eine aus der Auffassung des absoluten Werthes der Grössen hervorgegangene Gestaltung des Null- und des Unendlichkeitsbegriffs. Die beiden Formen der Null sind durch die oben erwähnten Entstehungsweisen hinreichend gekennzeichnet. Während die nach der Subtraction a — a zurückbleibende Null das absolute Fehlen jeder Grösse

bedeutet, weist die Division $\frac{a}{\infty}$ darauf hin, dass a durch Theilung abnehme, wobei aber, da die theilende Grösse unendlich ist, auch diese Abnahme eine unbegrenzte sein muss. Die beiden Formen des oberen Grenzbegriffs verhalten sich in Bezug auf ihre Entstehungsweisen insofern abweichend, als hier ein absolutes Unendlich überhaupt nicht auf dem Wege irgend welcher arithmetischer Operationen entstehen kann. Denn durch die der Subtraction entsprechende Operation der Addition entsteht hier ebenfalls nur der veränderliche Grenzbegriff, da diese Addition, um eine unendliche Summe zu geben, nicht wie die Subtraction a — a eine begrenzte Zahl von Gliedern verlangt, sondern in der Form einer unvollendbaren Reihe $a + a + a + a \ldots$ fortschreitet. Der absolute Unendlichkeitsbegriff kann daher überhaupt nur in der Form eines von den erzeugenden Operationen völlig abstrahirenden Postulates gedacht werden. Zu einem derartigen Postulat kann aber die mathematische Untersuchung endlicher Grössen Veranlassung finden. Denn es kann für die Fixirung gewisser Begriffe, die eine absolute Bedeutung besitzen und der Messung durch bestimmte endliche Grössen unzugänglich sind, jener constante oder absolute Unendlichkeitsbegriff erforderlich werden. Wenn man z. B. den Durchschnittspunkt zweier Parallellinien in unendliche Entfernung verlegt, so ist hier ein absolutes Unendlich gemeint. Als Durchschnittspunkt bezeichnet er einen einzigen fest bestimmten Ort im Raume, und da der Parallelismus der Linien als gegeben, nicht als erst entstehend vorausgesetzt ist, so kann man ihn nicht etwa als einen Punkt denken, dem die Linien ohne Ende zustreben. Vielmehr denken wir uns die Linien über alle messbaren Grenzen hinaus immer noch als parallel. So lange wir bloss die erste Form des Unendlichkeitsbegriffes, die Grenze einer veränderlichen Grösse, im Auge haben, ist daher der Begriff eines Durchschneidungspunktes überhaupt unvollziehbar. Aehnliche Voraussetzungen wie hier für die specielle Form der Raumgrössen können nun aber selbstverständlich auch für die allgemeinsten Grössen, die Zahlen, gemacht werden. Vermöge der unbeschränkten Freiheit der Begriffsconceptionen, deren sich die Mathematik erfreut, ist die Annahme möglich, es gebe einen absoluten Werth $\omega = \infty$, welcher nicht bloss die Grenze bezeichne, dem die Reihe der Zahlen ohne Ende zustrebt, sondern in welchem diese Grenze wirklich erreicht sei. In der That hat man diese Fiction in die arithmetische Speculation eingeführt und daran Untersuchungen über die Eigenschaften der jenseits der Grenzen einer solchen absoluten Grösse $\omega = \infty$ gelegenen Zahlen geknüpft. Dabei stellt sich z. B. heraus, dass diese transfiniten Zahlen schon bei der Addition dem Commutationsgesetz nicht mehr folgen, indem $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 > \omega$, also auch $1 + \omega$ nicht gleich $\omega + 1$ ist*). Wenn wir eine in ihrer absoluten Totalität gedachte unend-

*) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883, S. 39.

liche Gerade, die nach ihrer einen Richtung begrenzt ist, vor ihrem Anfang im Unendlichen um eine Strecke verlängert denken, so bleibt dadurch ihre Grösse unverändert; wenn wir aber die nämliche Strecke an ihrer Grenze im Endlichen ansetzen, so wird sie um eben diese Strecke grösser werden.

Vielfach sind in der Mathematik und Philosophie die beiden hier besprochenen Formen der Grenzbegriffe mit einander vermengt worden, und viele der so genannten »Paradoxien des Unendlichen« haben hierin ihre Quelle*). Auch wenn man zu einem gewissen Bewusstsein der Unterschiede gelangte, verband sich dies nicht selten mit einer ungleichen Werthschätzung beider Begriffe, indem einer derselben als der allein berechtigte, der andere aber als ein unrechtmässiger galt. Besonders bezog sich dieser Streit auf den oberen Grenzbegriff, während der untere, bei dem die arithmetische Anwendung beiden Formen ihr Recht verschaffte, davon kaum berührt wurde. So wurde in der Mathematik das Symbol $\infty$ fast nur in der Bedeutung einer ohne Ende wachsenden Grösse gebraucht, während dagegen Hegel diese Unendlichkeit der Mathematiker als die schlechte bezeichnete und ihr die absolute Unendlichkeit als die wahre gegenüberstellte. Neuestens hat G. Cantor aus Anlass der arithmetischen Verwerthung beider Begriffe den ersten das uneigentlich Unendliche, den zweiten das eigentlich Unendliche genannt**). Auch der dieser Unterscheidung zu Grunde liegenden Anschauung, dass es sich bei der ersten Form in Wahrheit um endliche, wenn auch unmessbar grosse oder kleine Grössen handle, kann wohl nicht zugestimmt werden. Obgleich sie in der Entwicklung der Grundbegriffe des Infinitesimalcalcüls ihre Quelle hat, so ist sie doch in diesem offenbar nicht selbständig entstanden, sondern aus den älteren Näherungs- und Exhaustionsmethoden in ihn übergegangen. Das Unendliche ist die Negation der endlichen Grösse und als solche für die beiden Gestaltungen des oberen Grenzbegriffs zutreffend. Der einzige Unterschied liegt in dem zu Grunde liegenden Erzeugungsprincip. Dieses besteht aber im ersten Falle darin, dass man das Unendliche aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsthum hervorgehen lässt, während man es im zweiten Falle als einen fertigen Begriff denkt, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt, nicht besitzt. Eher dürften daher die Bezeichnungen des Endlosen und des Ueberendlichen oder des Infiniten und des Transfiniten diesen verschiedenen Entstehungsbedingungen der Unendlichkeitsbegriffe einigermassen gerecht werden.

Noch den andern Uebelstand hatte die Vermengung dieser verschiedenartigen Grenzbegriffe, dass sie in solchen Fällen, wo an sich nur einer der beiden Unendlichkeitsbegriffe Berechtigung besass, durch die Herbei-

---

*) Vgl. B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851.

**) Hegel, Logik, I, S. 263 f. G. Cantor, a. a. O. S. 13.

ziehung des andern einen falschen Zwiespalt der Anschauungen erzeugte. Wir werden auf diesen Punkt bei den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode zurückkommen. Dagegen ist hier schon hervorzuheben, dass der absolute oder transfinite Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik nur für zahlentheoretische oder geometrische Zwecke eingeführt werden kann, dass dagegen überall da, wo es sich um die mathematische Darstellung physikalischer, also durch die Erfahrung bestimmter Begriffe handelt, nur der infinite Unendlichkeitsbegriff möglich ist.

Nicht zu übersehen ist schliesslich, dass beide Unendlichkeitsbegriffe den Charakter logischer Postulate besitzen. Wir können fordern, es solle die Reihe der positiven ganzen Zahlen in einer einzigen Zahl $\omega = \infty$ zusammengefasst werden, und es solle eine Grösse ohne Ende wachsen oder zunehmen, ja wir können wegen der begrifflichen Freiheit des mathematischen Denkens alle diese Postulate als erfüllt annehmen und dann die daraus entspringenden Folgerungen entwickeln. Aber da unser Denken überhaupt niemals die Macht hat, eine objective Realität zu erschaffen, sondern höchstens im Stande ist, dieselbe in subjectiven und darum den Erkenntnissbedingungen des Bewusstseins unterworfenen Begriffen nachzuerzeugen, so sind auch jene Voraussetzungen an sich nichts als logische Postulate, und eine reale Bedeutung gewinnen sie erst von dem Punkte an, wo sie sich in der begrifflichen Nachbildung der Wirklichkeit als brauchbar bewähren*).

## 2. Die algebraischen Operationen.

In den Zahlarten und Zahlsystemen ist ein Zahlbegriff zur Entwicklung gelangt, welcher von dem allgemeinen Begriff der Grösse nicht mehr verschieden ist. Durch die Symbole des an den ursprünglichen Zahlbegriff sich anlehnenden Ziffernsystems kann daher dieser Begriff nicht in zureichender Weise ausgedrückt werden, sondern derselbe fordert Begriffszeichen von allgemeinerer Bedeutung. Solche Zeichen sind die algebraischen Buchstabensymbole, denen jene Bedeutung willkürlich beigelegt worden ist. Neben ihnen bedarf die allgemeine Arithmetik der Operationssymbole, durch welche die mit den Zahlen vorgenommenen arithmetischen Operationen ausgedrückt werden. Ausser diesen beiden kann endlich noch eine dritte Art von Symbolen vorkommen, welche Zahlen und die mit denselben vorzunehmenden Operationen gleichzeitig andeuten. Diese dritte Art ist an sich nicht unerlässlich wie die beiden ersten, aber sie ist als

*) Vgl. hierüber die Bemerkungen über die transscendenten Raumspeculationen, Bd. I, S. 439, die vollständig auch auf die analogen arithmetischen Speculationen Anwendung finden.

abkürzendes Hülfsmittel des Denkens von der grössten Wichtigkeit und findet desshalb eine mit der Verwicklung der Aufgaben zunehmende Anwendung.

Die arithmetischen Methoden, welche diese dreierlei Symbole benützen, können nun entweder die directe Lösung allgemeiner Zahlenprobleme bezwecken, indem sie sich dazu der vier arithmetischen Grundoperationen und ihrer Wiederholungen bedienen; oder sie können der Untersuchung der Eigenschaften gewisser allgemeiner Grössenbeziehungen gewidmet sein, um dann erst in zweiter Linie von diesen Eigenschaften für die Lösung der Probleme Gebrauch zu machen. Auf diese Weise scheiden sich von einander die Gebiete der eigentlichen Algebra und der algebraischen Analysis. Nicht die Gegenstände, mit denen sich beide beschäftigen, sondern die Standpunkte, die sie bei der Untersuchung dieser Gegenstände einnehmen, sind daher verschieden. Die Algebra betrachtet einen algebraischen Ausdruck bloss mit Rücksicht auf den Werth der einzelnen Grössen und auf die Beschaffenheit der Operationen, die mit ihnen vorzunehmen sind; die algebraische Analysis sieht ihn als die Darstellung einer Beziehung zwischen Grössen an, und sie untersucht seine Abhängigkeit von den Veränderungen, welche einzelne in ihn eingehende Grössen erfahren können. Der analytische Standpunkt ist daher der allgemeinere, welcher den rein algebraischen als speciellen Fall in sich schliesst. Nichts desto weniger wird es angemessen sein, hier den nämlichen Weg zu wählen, welchen die Ausbildung der mathematischen Begriffe selber genommen hat. Wir beschäftigen uns darum zuerst mit den algebraischen Methoden im engeren Sinne und wenden uns erst in einem folgenden Capitel der logischen Untersuchung des Begriffs der Function zu, von welchem die Analysis beherrscht ist, dessen Entwicklung aber, wie wir sogleich sehen werden, schon in den gewöhnlichen algebraischen Operationen beginnt.

### a. Die Entstehung und Bedeutung algebraischer Gleichungen.

Die algebraischen Methoden in dem oben angegebenen engeren Sinne sind auf zwei logische Grundlagen zurückzuführen. Die eine besteht in der Allgemeinheit der Zahlgesetze. Diese, die den Gebrauch der Symbole möglich macht, beherrscht auch fortan deren Anwendungen. Die andere besteht in der unmittelbaren, aber vermöge der abgeschlossenen Natur eines jeden Problems stets begrenzten Anwendung der vier arithmetischen Operationen und ihrer Wiederholungen. Die Art, wie diese Operationen zur Anwendung kommen und auf einander folgen müssen, richtet sich nach der Natur des Problems. Die nächste Aufgabe der algebraischen Methodik besteht daher darin, dass sie die Beschaffenheit des vorgelegten Problems in einem allgemeinen symbolischen Ausdruck darstellt. Dies geschieht mittelst der Aufstellung einer Gleichung, welche die Beziehungen zwischen den in das Problem eingehenden Grössen angiebt.

Die Probleme, welche auf solche Weise eine algebraische Formulirung zulassen, können sich nun auf alle möglichen messbaren Objecte beziehen, auf abstracte Zahlen, auf Zeit- und Raumgrössen, auf Waaren und Güterwerthe u. s. w. Stets aber besteht die Bedingung zur Aufstellung einer algebraischen Gleichung darin, dass die quantitativen Relationen zwischen den Grössen sich auf einfache arithmetische Operationen in begrenzter Anzahl zurückführen lassen. Das bei der Lösung der gestellten Aufgaben einzuschlagende Verfahren muss dann aus Operationen bestehen, welche denjenigen entgegengesetzt sind, aus denen die quantitativen Relationen der in der Gleichung verbundenen Grössen hervorgingen: eine Addition wird also in einer Subtraction, eine Multiplication in einer Division, eine Potenzerhebung in einer Radicirung ihre Auflösung finden.

Die Gleichung als mathematisches Identitätsurtheil ist die einzige Form, in welcher der Ausdruck fest bestimmter Relationen zwischen Grössen überhaupt möglich ist. Die Aufstellung einer Gleichung enthält aber nur dann zugleich eine bestimmt lösbare Aufgabe, wenn eine der durch sie in Relation gesetzten Grössen unbekannt ist und aus der in der Gleichung vorgelegten Relation zu den andern bekannten Grössen gefunden werden soll. Sind alle Grössen der Gleichung bekannt, so enthält diese keine Aufgabe; ist mehr als eine Grösse unbekannt, so genügt sie nicht, um die Aufgabe zu lösen, sondern es müssen ebenso viele weitere Relationen zwischen den nämlichen Grössen in der Form von Gleichungen gegeben sein, als weitere Unbekannte vorhanden sind. Da die Algebra aus praktischen Rechenaufgaben hervorging, bei denen es wirklich um die Ermittelung unbekannter Werthe aus unveränderlich gegebenen bekannten sich handelte, so ist die Untersuchung der Gleichungen ursprünglich ausschliesslich von diesem Gesichtspunkte bestimmt gewesen. Jede Gleichung galt als der Ausdruck einer Beziehung zwischen Grössen, welche sämmtlich fest bestimmte Werthe besitzen, von denen aber einzelne zufällig unbekannt sind. Traten mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten auf, so wurden solche nur als Hülfsmittel angesehen, um aus ihnen die Normalform mit der einen Unbekannten herzustellen. Zuerst kam dieser rein arithmetische Standpunkt aus Anlass der mehrfachen Werthe, welche die Unbekannte bei höheren Gleichungen annahm, ins Schwanken. Denn eine anschauliche Deutung dieser mehrfachen Werthe lieferte die Geometrie, indem sie zeigte, dass, sobald man die in der Gleichung aufgestellte Relation als eine solche zwischen Raumgrössen ansieht, die mehrfachen Werthe der Unbekannten mehreren Raumgrössen entsprechen, welche sämmtlich der gegebenen Gleichung Genüge leisten. Hier musste sich nun zugleich die Wahrnehmung aufdrängen, dass eine derartige Bestimmung der Unbekannten immer nur einen oder (bei den höheren Gleichungen) einige Einzelwerthe herausgreift, welche eine Grösse dann annimmt, wenn anderen mit ihr in gesetzmässiger Beziehung stehenden Grössen fest bestimmte Werthe gegeben werden, dass aber, sobald man sich diese letzteren oder

einzelne unter ihnen stetig verändert denkt, nun auch jene Unbekannte stetige Veränderungen erfährt. So führte hauptsächlich die geometrische Betrachtung zu einer neuen Auffassung der algebraischen Gleichungen. Die Unbekannte wurde untergeordnet dem allgemeinen Begriff der Veränderlichen. Die algebraische Gleichung musste nun allgemein als ein Ausdruck betrachtet werden, welcher die auf eine begrenzte Zahl arithmetischer Elementaroperationen zurückführbaren Beziehungen zwischen irgend welchen veränderlichen und constanten Grössen angiebt. Werden alle Grössen als constant angenommen mit Ausnahme von zweien, so drückt die Gleichung eine einfache Reihe stetig veränderlicher Beziehungen aus, indem jedem Werth der einen Veränderlichen x im allgemeinen auch ein anderer Werth der zweiten Veränderlichen y entspricht. Ihre einfachste anschauliche Verwirklichung findet darum eine solche Gleichung in einer ebenen Curve, deren Grad dem Grad der Gleichung entspricht. Wird in dieser Gleichung der einen der Veränderlichen ein constanter Werth beigelegt, so ist es klar, dass auch die zweite Veränderliche einen constanten Werth oder, wenn das Resultat mehrdeutig wird, eine begrenzte Anzahl constanter Werthe annehmen muss. Insofern diese constanten Werthe nicht direct gegeben sind, sondern erst aus ihrem Verhältniss zu den übrigen Grössen gefunden werden sollen, verwandelt sich jetzt die Veränderliche in die Unbekannte, und die Auflösung der Gleichungen wird zu einem Specialfall der Behandlung algebraischer Functionen. Will man sich die Entstehung dieses Specialfalls vergegenwärtigen, so muss man also von dem allgemeinen Gesetz einer stetig veränderlichen Function ausgehen. Eine Function zweiten Grades z. B. von der Form $y^2 = x\,(a - x)$ wird in eine lösbare Gleichung zweiten Grades übergehen, wenn etwa $y = b$ und demnach $x^2 - a\,x + b^2 = 0$ wird. Man erhält dann für x die zwei Werthe $\frac{1}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 - b^2}$. Fragen wir aber nach der realen Bedeutung dieses Uebergangs, so wird, wenn wir eine geometrische Bedeutung zu Grunde legen, $y^2 = x\,(a - x)$ zur Scheitelgleichung eines Kreises vom Durchmesser a. Setzt man hierin die auf dem Durchmesser senkrechte Ordinate $= b$, so ist damit auch der zugehörige Abscissenwerth x fixirt. Aber da zu der Ordinate b eine gleich grosse auf der entgegengesetzten Seite des Kreismittelpunktes existirt, so erhält x zwei Werthe, je nachdem man die Wurzelgrösse positiv oder negativ nimmt.

Es ist das grosse Verdienst Descartes', dass er diese Entwicklung der Gleichung aus der algebraischen Function der Wissenschaft zum Bewusstsein brachte*). Er hat damit zugleich auf den rationellen Weg zur methodischen Behandlung der Gleichungen hingewiesen, welcher darin

---

*) Descartes, Géométrie, Oeuvr. t. I. Zwar waren schon die arabischen Mathematiker durch die von ihnen geübten Methoden der Lösung von Gleichungen zu ähnlichen Gesichtspunkten gelangt. Ihre Leistungen wurden aber erst

besteht, dass man sich überall erst von den Entstehungsbedingungen derselben Rechenschaft giebt, hieraus die Kenntniss ihrer allgemeinen Eigenschaften schöpft und auf die letzteren endlich die Methoden zu ihrer Lösung gründet.

Die einfachsten Bedingungen zur Aufstellung einer Gleichung sind dann gegeben, wenn die realen Grössen, welche durch dieselbe in Beziehung gesetzt werden, gleichförmig mit einander veränderlich sind. In diesem Fall entspricht der Constanz in dem Fortschritt der Zahlenreihe eine ihr völlig gleichende Constanz in den Verhältnissen der Objecte, auf welche die Zahlen Anwendung finden. Ist nun bei einem solch gleichmässigen Fortschritt irgend eine der mit einander veränderlichen Grössen für einen bestimmten Werth der andern nicht direct gegeben, so bestimmt sie sich aus dem bekannten Verhältniss, in welchem sie zu den andern Grössen steht. Der Ausdruck dieses Verhältnisses ist eine lineare Gleichung, welche durch einfache Isolirung der Unbekannten gelöst wird. Bei diesem Verfahren kommen nur die vier arithmetischen Operationen selbst zur Anwendung, nicht ihre Wiederholungen. Zu den einfachsten Aufgaben solcher Art gehören diejenigen der Regeldetri, bei denen zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte gesucht wird.

Hiervon unterscheiden sich nun die verwickelteren Fälle dadurch, dass die Grössen, deren Relation die Gleichung ausdrückt, nicht gleichförmig zu- und abnehmen, dass also die eine nicht ein constanter Bruchtheil oder ein constantes Vielfaches der andern ist. Demgemäss reicht nun auch die einfache Division oder Multiplication nicht mehr aus, um eine Unbekannte in bekannten Grössen auszudrücken. Der nächst einfache Fall ist hier dann gegeben, wenn die Geschwindigkeit in der Zunahme des Wachsthums einer Grösse proportional der absoluten Zunahme einer andern ist, oder wenn, während die eine Grösse gleichförmig zunimmt, die andere mit einer Geschwindigkeit wächst, welche fortwährend ihrem eigenen absoluten Werthe proportional bleibt. Der erste dieser Fälle ist in der Natur in vielfältiger Weise verwirklicht, in der Zunahme der Geschwindigkeit fallender Körper, in der Zunahme der Licht- und Schallstärke mit der Annäherung an die Licht- und Schallquelle, u. s. w. Die reine quadratische Gleichung ist der Ausdruck dieser Beziehung. Dem zweiten Fall entspricht das Wachsthum eines Capitals, dessen Zinsen wieder capitalisirt werden. Reine Gleichungen höherer Grade entstehen demnach überhaupt, wenn zwei Zahlen in solcher Beziehung stehen, dass sie sich stetig mit einander verändern, dass aber die Veränderung der einen aus derjenigen der andern nicht durch eine einfache Multiplication oder Division, sondern nur durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen in Bezug auf die nämliche Grösse gefunden werden kann.

---

in jüngster Zeit der Vergessenheit entrissen und haben daher in dieser Beziehung keinen merklichen Einfluss auf die Entwicklung der neueren Algebra ausgeübt. Vgl. L. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, Leipzig 1878, S. 921.

Diese bis dahin noch einfachen Aufgaben werden nun von steigender Verwicklung, wenn nicht bloss das Wachsthum der durch die Gleichung in Beziehung gesetzten Grössen ein verschiedenes ist, sondern wenn ausserdem theils die Anzahl der Grössen, die zu einander in Relation gebracht sind, theils die Zahl der zwischen ihnen existirenden Relationen zunimmt. Geben wir z. B. der Gleichung mit zwei Variabeln x und y eine geometrische Deutung, so bezeichnen x und y stets zwei gerade Linien, deren relatives Wachsthum den Weg einer Curve bestimmt, die in ihrem ganzen Verlauf der Ausdruck der gesetzmässigen Beziehungen zwischen den Veränderungen jener beiden Geraden ist. Denken wir uns zwischen den nämlichen Geraden von denselben Anfangspunkten aus gleichzeitig zweierlei beziehungsweise Veränderungen nach einem verschiedenen Gesetze oder mindestens mit verschiedener Geschwindigkeit erfolgen, so werden diese zwei neben einander hergehenden Relationen in zwei Curven ihren Ausdruck finden, welche sich in irgend einem Lageverhältnisse zu einander befinden. Legt man sich nun die Frage vor, ob es einen oder mehrere Punkte auf der Geraden x giebt, welche für beide Gesetze beziehungsweiser Veränderungen coincidiren, wo also zwei Werthen y von gleicher Grösse auch zwei gleiche Werthe von x entsprechen, so verwandeln sich die beiden Gleichungen zwischen x und y, welche die Gesetze des Verlaufs der zwei Curven ausdrücken, in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Werthe von x, die man aus ihnen gewinnt, bezeichnen, auf der Geraden x abgemessen, die den beiden Curven gemeinsamen Punkte. Auf diese Weise entsprechen zwei Kegelschnitten im allgemeinen vier Schnittpunkte. Die zwei quadratischen Gleichungen der Kegelschnitte liefern daher als allgemeinen Ausdruck für die Werthe von x eine Gleichung vierten Grades. Die Lage der beiden Kegelschnitte kann nun aber auch eine solche sein, dass sie in weniger als vier Punkten, oder dass sie gar nicht sich schneiden. In diesem Fall ergeben sich als die entsprechenden Werthe von x imaginäre oder complexe Zahlen. Gemäss der geometrischen Bedeutung der letzteren wird dieses Resultat so zu erklären sein, dass sich der betreffende Punkt nicht auf der Geraden x selbst finden lässt, sondern dass diese in lateraler Richtung bewegt werden müsste, um ihn zu erreichen. Denken wir uns, die eine der sich schneidenden Linien sei stets eine Gerade, so ist an und für sich klar, dass die andere eine Curve von immer zusammengesetzterer Beschaffenheit werden muss, wenn die Zahl der Schnittpunkte wachsen soll. Wie die Gerade eine andere Gerade in einem und einen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, so eine Curve dritten, vierten, fünften Grades in je drei, vier, fünf Punkten, von denen wieder je nach der Lage der Geraden einzelne hinwegfallen können, wodurch imaginäre Werthe der Unbekannten x sich ergeben.

Die geometrischen Objecte bilden die anschaulichste Darstellung der Beziehungen, welche zur Aufstellung von Gleichungen führen, und die Verhältnisse anderer Grössen können immer leicht in sie übertragen werden.

Versuchen wir es aber, die in dieser Darstellung gegebenen Bedingungen in abstracter Allgemeinheit auszudrücken, so bestehen dieselben offenbar darin, dass aus einer Summe in wechselseitigen Relationen stehender Grössen zunächst die einzelnen Grössen isolirt werden, was in der Bezeichnung jeder einzelnen durch ein besonderes Buchstabensymbol ausgedrückt ist. Jede solche isolirte Grösse enthält in sich kein bestimmtes Gesetz des Wachsthums, ihre Messung folgt daher dem durch die natürliche Zahlenfolge gegebenen Gesetz gleichmässiger Aenderung. Sobald nun aber die Grössen in den zwischen ihnen stattfindenden Relationen beobachtet werden, so zeigt es sich, dass die einen, a, b, c . . ., constant bleiben, während sich die andern, x, y, z . . ., verändern. Dem Ausdruck des Gesetzes dieser Veränderung ist zunächst die Gleichung bestimmt. Die ihr entsprechende Curve hat, wie die Gleichung selbst, die Bedeutung einer Relation zwischen Grössen, die für sich selbst betrachtet sämmtlich gerade Linien von theils unveränderlichem, theils veränderlichem Werthe sind. Auch die Aufgabe, zu welcher die Gleichung überführt, indem sie an Stelle der mehreren Veränderlichen die eine Unbekannte zurücklässt, besteht daher geometrisch in der Ermittelung der Länge einer Geraden oder allgemein des isolirten Werthes der Grösse x. Darum führt die Auflösung einer Gleichung immer darauf hinaus, dass eine Gleichung nten Grades für x in n Gleichungen ersten Grades übergeführt werde, welche den n Wurzeln für x entsprechen.

b. Die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen.

Der nahe Zusammenhang der Eigenschaften der Gleichungen mit ihren Entstehungsbedingungen ergiebt sich unmittelbar aus den obigen Erörterungen. Während aber die Betrachtung der Entstehungsbedingungen von den verwickelten Erscheinungen, welche Anlässe zu bestimmten Problemen enthalten, ausgehen musste, ist der Weg für die Untersuchung der Eigenschaften der Gleichungen nothwendig der umgekehrte. Daraus ergiebt sich zugleich die Möglichkeit, dass hier die Untersuchung sofort in abstracter Form begonnen werden kann, wogegen einer verwickelten Gleichung immer erst durch die anschaulich gegebenen Verhältnisse, auf die sie bezogen wird, ein Verständniss abzugewinnen ist. Hierin besteht nun das zweite grosse Verdienst Descartes' um die algebraische Analysis. Während er auf der einen Seite das geometrische Bild als das angemessenste Object für die Erkenntniss der Bedeutung einer Gleichung und der sie constituirenden Grössen kennen lehrte, zeigte er auf der andern, dass bei der Untersuchung des Aufbaues der Gleichung aus diesen Elementen das algebraische Symbol jeder anschaulichen Versinnlichung überlegen ist, weil es für die Ausführung der arithmetischen Elementaroperationen das einfachste Werkzeug darbietet.

Das Ergebniss der Auflösung einer Gleichung besteht in der Feststellung linearer Gleichungen von der Form $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ . . ., deren

Anzahl dem Grad der ursprünglichen Gleichung entspricht, und in denen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... successiv die einzelnen Wurzelwerthe bedeuten, welche x annehmen kann. Diese Werthe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... sind in der ursprünglichen Gleichung nicht isolirt enthalten, sondern unter einander und mit x zu einer einzigen zusammengesetzten Relation verbunden, welche die Werthe $x - \alpha$, $x - \beta$, $\alpha - \gamma \ldots$, die sämmtlich gleich null sind, als Factoren enthält, und worin übrigens $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... sowohl negative als complexe Werthe annehmen können. Rückwärts wird man daher auch aus den n linearen Endgleichungen die ursprüngliche wiederherstellen können, wenn man die genannten Factoren mit einander multiplicirt, wenn man also

$$(x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \ldots = 0$$

setzt. Es ergiebt dann die wirkliche Ausführung dieser Multiplication einen Ausdruck

$$x^n + A\,x^{n-1} + B\,x^{n-2} + \ldots + T = 0,$$

in welchem die Coëfficienten A, B, C... T bestimmte Verbindungen der Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... sind, nämlich

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta + \gamma \ldots \\ B &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta \ldots \\ C &= \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ T &= \alpha\beta\gamma\delta \ldots . \end{aligned}$$

Diese von Descartes gelehrte Reconstruction der Gleichung aus den linearen Endgleichungen ihrer Wurzeln liefert nun das vollständige Material zur Ableitung der Eigenschaften der Gleichungen. Die oben entwickelte Form, welche sämmtliche Potenzen von x in absteigender Reihenfolge enthält, wird dabei als die Normalform angesehen, deren verschiedene Gestaltungen von der positiven, negativen oder imaginären Form der einzelnen Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... abhängen. Alle Methoden für die Untersuchung der Gleichungen gründen sich einzig und allein auf die Herstellung jener Normalform nten Grades aus den vorläufig hypothetisch als gegeben vorausgesetzten n Wurzeln als ihren Elementen. Die specielle Verfolgung dieser Methoden gehört nicht zu unserer Aufgabe; nur der Ausgangspunkt und allgemeine Charakter derselben bedarf einer kurzen Erörterung. Ausgangspunkt ist der Satz, dass die Gleichung nten Grades aus ihren n Wurzelgleichungen reconstruirt werden kann. Dieser Satz gründet sich auf das arithmetische Gesetz, dass die Veränderung, die an einem beliebigen Zahlenausdruck durch eine begrenzte Anzahl elementarer Operationen vorgenommen wurde, wieder aufgehoben werden kann, wenn man die umgekehrten Operationen in der geeigneten Reihenfolge anwendet. Dieses Gesetz selbst ist aber nur eine Verallgemeinerung des Princips der inversen Operationen. Nachdem unter der Anleitung dieses Princips die Normalform der Gleichung nten Grades durch die wirkliche Ausführung der Multiplication, also durch Induction gefunden ist, trägt nun die weitere Unter-

suchung der allgemeinen Eigenschaften der so entstandenen Gleichungen durchgehends einen gemischten Charakter an sich, insofern die Sätze, zu denen man gelangt, sowohl eine inductive wie eine deductive Begründung zulassen. In der Regel sind sie zuerst durch Induction im Anschlusse an die erste Induction, welche die Normalgleichung ergiebt, gefunden worden; man hat dann aber ausserdem gesucht, sie direct aus den Eigenschaften dieser letzteren abzuleiten. So ergiebt sich z. B. der Cartesianische Satz, dass eine vollständige Gleichung lauter positive Wurzeln hat, wenn die Coëfficienten von x abwechselnde Vorzeichen besitzen, und dass sie lauter negative Wurzeln hat, wenn die Coëfficienten ohne Ausnahme positiv sind, inductiv aus der Multiplication der linearen Factoren; derselbe ergiebt sich aber ausserdem auch als eine nothwendige Folge der Eigenschaften der Normalfunction $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} \ldots$. Denn sobald von je zwei auf einander folgenden Gliedern vom ersten an die höhere Potenz positiv und die niedrigere negativ ist, so muss x unter allen Umständen einen positiven Werth haben, wenn die Summe gleich null werden soll; umgekehrt dagegen, wenn alle Vorzeichen positiv sind, so kann die Summe nur dann gleich null sein, wenn x stets negativ ist. Aehnlich folgt der Satz, dass die Normalgleichung durch jede der Differenzen $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$ ohne Rest theilbar ist, inductiv aus der Bildung des Productes $(x - \alpha) . (x - \beta) . (x - \gamma) \ldots$, wo jede der Differenzen unmittelbar als ein Factor jenes Polynoms erscheint. Der nämliche Satz lässt sich aber aus den allgemeinen Eigenschaften des Polynoms und dem Begriff der Wurzel erweisen, nach welchem für jeden Werth $\alpha$, $\beta$, $\gamma \ldots$ die nämliche Gleichung wie für x gelten muss, also auch die Differenzgleichung

$$(x^n - \alpha^n) + A (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + B (x^{n-2} - \alpha^{n-2}) \ldots = 0$$

gebildet werden kann, welche durch $x - \alpha$ theilbar ist.

Bei den Transformationen der Gleichungen, namentlich bei der Bildung abgeleiteter Wurzelgleichungen und Coëfficientengleichungen, benützt man sodann die durch die Fundamentalsätze festgestellten Eigenschaften der Normalgleichung, um aus ihnen auf ausschliesslich deductivem Wege weitere Sätze zu gewinnen. Es handelt sich hierbei um fortgesetzte Anwendungen zweier allgemeiner Principien. Nach dem ersten derselben darf jede in eine Gleichung eingehende Grösse eine beliebige Veränderung erfahren, sobald nur mit den zu ihr in Relation gebrachten Grössen entsprechende Veränderungen vorgenommen werden. Nach dem zweiten Princip darf für eine gegebene Relation einer Grösse irgend eine andere der nämlichen Grösse substituirt werden, sobald man nur an Stelle der übrigen ursprünglichen Grössen andere von geeigneter Beschaffenheit einführt. Das erste dieser Principien, welches wir als das Princip der correspondirenden Veränderungen bezeichnen können, beruht unmittelbar auf der Constanz der Zahlgesetze und der Existenz der inversen Operationen, vermöge deren es jederzeit möglich ist, eine willkürlich eingeführte Veränderuug wieder aufzuheben. Das zweite Princip, welches wir das der Variation der

Beziehungen nennen können, schöpft seine Berechtigung aus dem Wesen der Gleichung. Da die letztere aus einer unbegrenzten Zahl denkbarer Beziehungen einer Grösse x eine einzelne herausgreift, so ist es natürlich immer möglich, dieser letzteren irgend eine andere jener denkbaren Beziehungen zu substituiren. Bei der Anwendung des ersten Princips bleibt die vorliegende Form der Gleichung unverändert, bei der Anwendung des zweiten wird sie in der Regel verändert, und im allgemeinen geht man bei dieser Veränderung darauf aus, eine Gleichung niedrigeren Grades aus einer solchen höheren Grades herzustellen.

Die zahlreichen Methoden, die zum Zweck der Auflösung der Gleichungen im Laufe der Zeit erfunden worden sind, bestehen nun durchweg in der fortgesetzten und in der Regel combinirten Anwendung jener beiden Principien. Nur die Gleichungen ersten Grades erfordern ausser der einfachen Anwendung der vier arithmetischen Operationen kein weiteres Verfahren; streng genommen handelt es sich aber bei ihnen gar nicht um Lösungsmethoden, sondern nur um eine geeignetere Ordnung der Grössen, da sie die Form der linearen Wurzelgleichung bereits besitzen. Anders bei den Gleichungen höherer Grade, wo nunmehr das eigentliche Lösungsverfahren in der schliesslichen Reduction auf Gleichungen ersten Grades besteht. Zahlreiche Methoden substituiren, um dies zu erreichen, zunächst der Unbekannten x eine lineare Function von x, z. B. $y = x - z$. Aus der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ erhält man auf diese Weise eine neue Gleichung $f(y) = 0$, in welcher alle Grössen Veränderungen erfahren haben, die dem Uebergang von x in y entsprechen. Wenn man die unbestimmte Grösse z, welche in die Coëfficienten der neu gebildeten Gleichung eingeht, unter Rücksichtnahme auf die sonstigen Factoren dieser Gleichung in geeigneter Weise bestimmt, so genügt das so zur Anwendung gekommene Princip der correspondirenden Veränderungen vollständig zur Lösung. Ist dies aber nicht der Fall, so kann dann ausserdem das Princip der Variation der Beziehungen herbeigezogen werden, indem man z. B. die Gleichung $f(y) = 0$ in zwei Gleichungen $\varphi'(y, z) = 0$ und $\varphi''(y, z) = 0$ zerlegt, in welchen die beiden Grössen y und z als Unbekannte behandelt werden. Sind diese Gleichungen niederen Grades, so können sie auf diese Weise die Auffindung zunächst der Wurzeln von y und z und dadurch, vermöge der angenommenen Beziehung dieser Grössen zu x, auch der Wurzeln von x vermitteln. Bei der von Descartes erfundenen, für die algebraische Analysis epochemachenden Methode der Lösung biquadratischer Gleichungen wird das Princip der Variation der Beziehungen unmittelbar in der hier angedeuteten Weise angewandt, indem die vorgelegte Gleichung, nachdem sie auf die Form $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ gebracht ist, in zwei quadratische Gleichungen

$$x^2 + a_1 x + b_1 = 0 \text{ und } x^2 - a_2 x + b_2 = 0$$

zerlegt wird. Der ursprünglichen Beziehung zwischen x und den bekannten Grössen a, b, c sind hier zwei andere Beziehungen zwischen x und andern

Grössen $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, die zunächst ebenfalls unbekannt sind, substituirt. Diese unbestimmten Coëfficienten können nun aber gefunden werden, da die Bedingung besteht, dass die zwei neu aufgestellten Relationen mit der ursprünglichen übereinstimmen müssen. Man sucht daher besondere Gleichungen zu gewinnen, durch welche die Beziehungen der unbestimmten Coëfficienten $a_1$, $b_1$ u. s. w. zu den ursprünglichen a, b, c festgestellt werden. Dies ist im vorliegenden Fall leicht möglich, da man durch Multiplication der beiden quadratischen Gleichungen mit einander eine biquadratische von der Form der ursprünglichen erhält, die nun mit dieser verglichen unmittelbar die Bedingungsgleichungen liefert, durch welche die neuen Coëfficienten bestimmt werden. Die Methode der unbestimmten Coëfficienten, welche Descartes bei dieser Gelegenheit in die Analysis eingeführt, ist, wie in diesem Beispiel, so in zahlreichen andern, ein nothwendiges Hülfsmittel für die Anwendung des Princips der Variation der Beziehungen. Jene Methode selbst aber ist eine der fruchtbarsten Anwendungen des allgemeinen Princips der analytischen Methode, dass das Gesuchte zum Behuf seiner Auffindung als bereits gegeben vorausgesetzt werde. (Siehe oben S. 82.)

---

## Drittes Capitel.

## Die geometrischen Methoden.

### 1. Die geometrischen Constructionsmethoden.

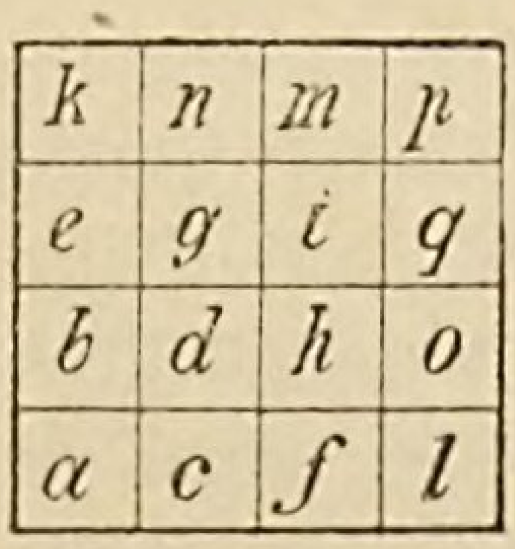
#### a. Die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden.

Der abstracte Raumbegriff, welcher den Gegenstand der reinen Geometrie bildet, ist durch eine einförmigere Entwicklung aus der Anschauung hervorgegangen als der Zahlbegriff. In diesem Sinne liegt er der Anschauung näher als der letztere, so dass Kant sogar ihn selbst für eine Anschauung halten konnte. (Vgl. Bd. I, S. 448.) Auch die anschaulichen Objectivirungen der einzelnen geometrischen Begriffe sind aus diesem Grunde eindeutiger als die arithmetischen Begriffsformen, und sie fordern dadurch unmittelbarer eine Untersuchung mittelst der Analyse und Synthese einfacher räumlicher Objecte heraus. Auf diese Weise erklärt es sich, dass unter allen mathematischen Methoden die geometrischen am frühesten eine wissenschaftliche Ausbildung erreicht haben. Im Dienste der Induction und der Deduction gleichzeitig verwendbar vollzieht sich in ihnen am deutlichsten der Uebergang aus der inductiven in die deductive Periode der Mathematik. Versuchsweise zog man Hülfslinien, um Sätze zu finden, oder um zu erproben, ob solche Sätze, die in speciellen Fällen bereits gefunden waren,

eine weitere Ausdehnung zuliessen. Ein derartiges Verfahren beginnt einen deductiven Charakter anzunehmen, sobald die ausgeführten Versuche die Kenntniss des nachzuweisenden Satzes bereits voraussetzen, wenn auch diese nur in der Form einer Vermuthung vorhanden sein sollte. Die Construction wird dann eben zu dem Zwecke ausgeführt, den deductiven Beweis für die Richtigkeit der Vermuthung zu liefern. Die Mathematik steht in dieser Beziehung auf dem nämlichen Boden wie die Erfahrungswissenschaften. Wo es sich nicht gerade um den Beweis von Wahrheiten handelt, die durch Induction oder durch eine andere Form der Beweisführung bereits vollkommen sicher stehen, da hat die Deduction überall die Aufgabe, zunächst Hypothesen zu Grunde zu legen, um diesen, wenn die Beweisführung gelingt, Gewissheit zu geben. Hypothesen, die der geometrischen Construction zum Ausgangspunkt dienen, entstehen aber am häufigsten dadurch, dass die unmittelbare Anschauung der Figuren dieselben an die Hand giebt.

Schon durch die griechischen Geometer wurden die Constructionsmethoden mit reicher Erfindungskraft gehandhabt. Sie bedienten sich derselben zugleich zum Beweis arithmetischer Sätze, indem sie die Zahlgrössen durch Raumgrössen versinnlichten. Theils die Anschaulichkeit solcher Beweise, theils die unvollkommene Ausbildung der arithmetischen Symbolik machten so die geometrische Construction fast zur allgemeinen mathematischen Methode. Die instrumentellen Hülfsmittel, welche die alte Geometrie bei diesem Verfahren gebrauchte, waren das Lineal und der Cirkel, wobei der letztere nicht bloss zur Herstellung des Kreises, sondern namentlich auch zur Abmessung gleicher Strecken auf den mit dem Lineal gezogenen Geraden diente. Lineal und Cirkel ersetzten also den Massstab. Jene Verwendung geometrischer Constructionen im Dienste der Arithmetik scheint aber keineswegs in der Weise entstanden zu sein, dass man von Anfang an für Zahlbegriffe nach räumlichen Versinnlichungen suchte. Vielmehr waren wohl umgekehrt die Sätze ursprünglich geometrische und wurden erst durch Messung und Zählung in arithmetische umgewandelt. Am frühesten scheint die Ausmessung des Quadrates zu diesem Uebergang den Anlass geboten zu haben. Indem man den Flächeninhalt desselben durch Zerlegung in kleine Quadrate bestimmte, ergab sich von selbst die umgekehrte Aufgabe, einem elementaren Quadrate a successiv Theile anzufügen, welche dasselbe mit Erhaltung seiner Gestalt vergrösserten. So erhielt man aus a durch Hinzufügung eines so genannten Gnomon (b d c) das nächstgrössere Quadrat a b d c, aus diesem auf ähnliche Weise das noch grössere a e i f, u. s. w. Mass man aber das zuletzt erhaltene durch Zählung der successiv hinzugenommenen elementaren Quadrate, so erhielt man die Reihe der so genannten Quadratzahlen $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, d. h. man gewann durch die geometrische Betrachtung den arith-

Fig. 6.



metischen Satz, dass die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl gleich dem Quadrat der Hälfte der nächst höheren geraden Zahl sei. Die nämliche Zerlegung hat wahrscheinlich Veranlassung gegeben, die elementaren Quadrate zu summiren, welche die Hälfte des ganzen Quadrates oder das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck a k l ausmessen: man erhielt so successiv a, b c, e d f, k g h l oder die natürliche Zahlenreihe $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n = n \frac{(n+1)}{2}$, die darnach den Namen der Dreieckszahlen führte, und deren Summirung abermals einen arithmetischen Satz ergab*). Das methodische Interesse dieser arithmetischen Anwendung geometrischer Constructionen besteht vor allem darin, dass uns dieselben hier noch vollständig als Hülfsmittel der Induction entgegentreten. Dem entspricht der eigenthümliche Charakter dieser Constructionen, dass eine Figur aus gleichartigen Elementen aufgebaut und dann die Verknüpfung der Elemente mittelst einer einfachen Addition ausgeführt wird.

Diesem synthetischen Verfahren einfachster Art trat frühe schon die Methode der Zerlegung geometrischer Figuren zum Zweck der Feststellung der wechselseitigen Beziehung ihrer Theile gegenüber. Man sieht sich zu einer derartigen Zerlegung gezwungen, sobald die geometrischen Figuren allzu verwickelt sind, so dass sie eine unmittelbare Erkenntniss ihrer Form- und Massverhältnisse in der Anschauung nicht zulassen. Der Zweck der Zerlegung besteht daher zunächst darin, einfachere Theile zu gewinnen, deren Massbeziehungen unmittelbar übersehen werden können. Das älteste Constructionsverfahren begnügt sich mit der Erreichung dieses Zweckes: der Geometer giebt die Anleitung zur Ziehung der Hülfslinien und verweist dann auf die Anschauung. Erst durch die Platonische Philosophie wurde der Mathematik allmählich das Bedürfniss zum Bewusstsein gebracht, bei dieser Berufung sich nicht zu beruhigen, sondern über die Gründe Rechenschaft zu geben, aus denen gewisse Formverhältnisse für uns evident sind**). Nun erst entstand die Forderung, mit Hülfe der Construction alle Sätze auf ein System von Definitionen und Axiomen zurückzuführen, eine Forderung, deren getreuen Reflex die Euklidische Geometrie enthält, welche die Theilung der Figuren mit Vorliebe als Constructionsmethode verwendet. Hiermit hat zugleich diese Methode ihren deductiven Charakter gewonnen, und sie ist analytisch in einem doppelten Sinne, in einem anschaulichen und in einem begrifflichen: im ersteren, weil das in der Anschauung Gegebene selbst zerlegt wird, im letzteren, weil diese Zerlegung auf die logischen Voraussetzungen zurückgeht, aus denen der Beweis zu führen ist.

An die Zerlegung der Figuren schliesst sich aber ein anderes Verfahren

*) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik. S. 104. Cantor, Vorlesungen, I. S. 135 f.

**) Cantor, Vorlesungen, I. S. 188 f.

nahe an, zu welchem man in solchen Fällen zu greifen pflegt, wo die Zerlegung nicht vollständig genügt, um Formverhältnisse herzustellen, die eine unmittelbare Anschaulichkeit vermitteln. Hier zieht man *ergänzende Constructionen* zu Hülfe, die, ausserhalb der untersuchten Figuren angebracht, die Theile derselben in neue Relationen bringen, welche die zuvor nicht hinreichend vorhandene Anschaulichkeit vermitteln und dadurch zugleich die Zurückführung auf bestimmte Axiome gestatten. Es stellt also dieses Verfahren eine Zwischenform zwischen analytischer und synthetischer Methode dar: die Zerlegung verbindet sich mit der Erzeugung neuer Raumgebilde, welche durch ihre Verbindung mit den gegebenen die Lösung einer Aufgabe gestatten. Hierdurch führt die Methode unmittelbar über zu einem letzten Verfahren, welches insofern das vollkommenste ist, als es das zu untersuchende Raumgebilde aus bestimmten Entstehungsbedingungen hervorgehen lässt, mit denen die wesentlichsten Eigenschaften desselben theils unmittelbar gegeben sind, theils in einem leicht durchschaubaren Zusammenhange stehen. Diese Methode der *genetischen Construction* ist daher im allgemeinen wieder synthetisch, sie wird aber, im wesentlichen Unterschiede von jenem synthetischen Aufbau einfacher Figuren aus gleichartigen Theilen, mit dem die geometrische Construction anfieng, ausschliesslich im *deductiven* Interesse geübt. Denn eine genetische Construction lässt sich nicht ausführen, ohne dass das leitende Princip, von welchem alle Eigenschaften der erzeugten Gebilde abhängen, zuvor gegeben ist. Auf diese Weise hat sich die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden in einer bestimmten Ordnung vollzogen: mit synthetischen Verfahrungsweisen nehmen dieselben ihren Anfang, und in ebensolchen finden sie wieder ihren Abschluss, der Uebergang aber wird durch Methoden von analytischem und von gemischtem Charakter vermittelt. Anderseits bewegt sich die nämliche Entwicklung von inductiven Anfängen aus durch grossentheils inductiv gefundene aber deductiv verwerthete Methoden zu solchen, die in Auffindung und Anwendung vollständig deductiv geworden sind. Doch ist auch hier das Nacheinander zugleich ein Nebeneinander, da die neu gewonnenen Methoden keineswegs die früher vorhandenen verdrängten. Nur die ältesten synthetischen Constructionen haben, da sie bloss räumliche Versinnlichungen einfacher arithmetischer Operationen sind, der abstracten Ausübung der letzteren Platz gemacht.

### b. Die Theilung der Figuren.

In den einfachsten Fällen, in welchen die Euklidische Geometrie die Theilung der Figuren anwendet, ist diese durch den Inhalt des zu erweisenden Satzes selbst bestimmt, so dass die constructive Erfindungskraft nicht weiter in Anspruch genommen wird. So ergiebt sich z. B. der Satz, dass Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben

Parallellinien einander gleich sind (Euklid I, 35), aus der Construction der Figur selbst ohne Ziehung von Hülfslinien. Für die Anschauung ist der Satz unmittelbar einleuchtend, der Beweis greift auf die Definition des Parallelogramms, den Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel und die Congruenz der Dreiecke zurück. Die Erfindung zweckmässiger Hülfslinien wird hier dadurch erspart, dass die Construction der Figur selbst schon eine hinreichende Zahl von Linien und Durchschnittspunkten liefert, um eine geeignete Zerlegung in Theile möglich zu machen (Fig. 7).

Fig. 7.

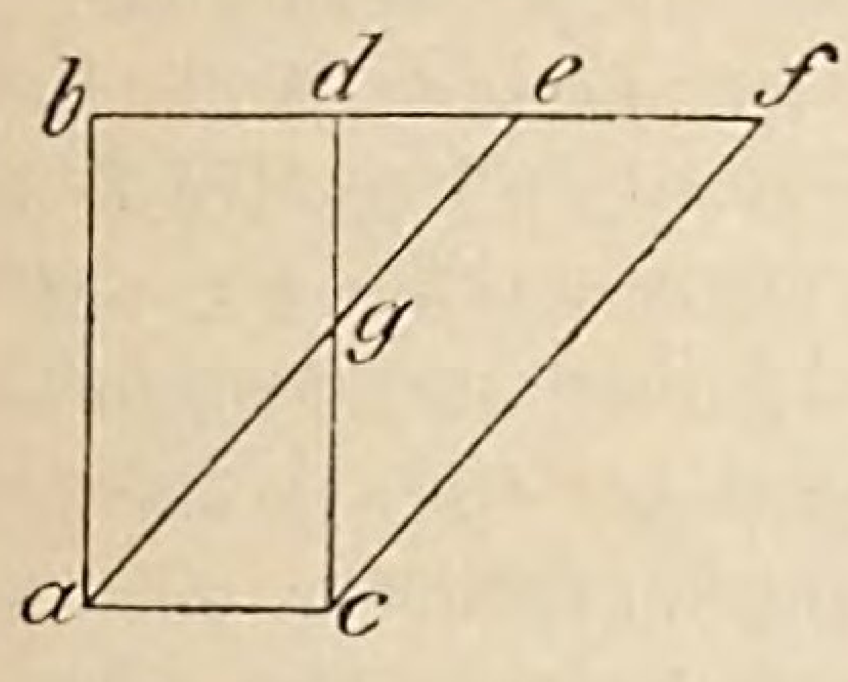
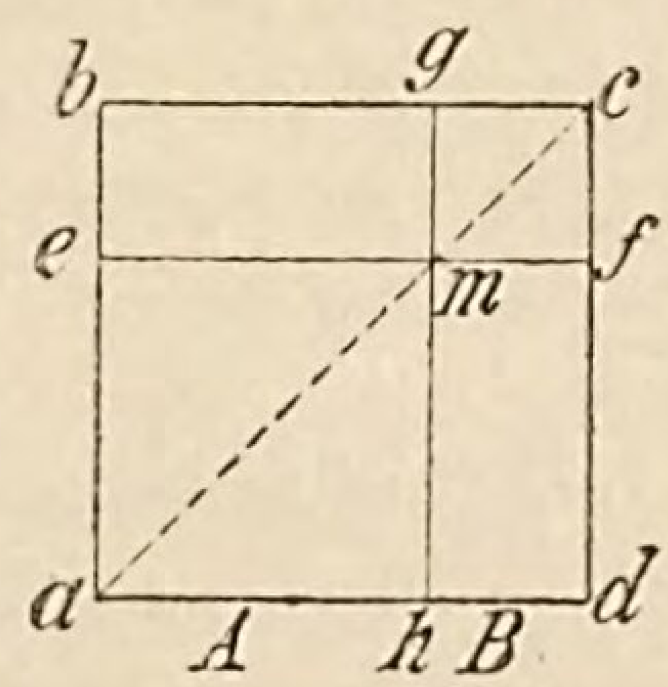



Fig. 8.

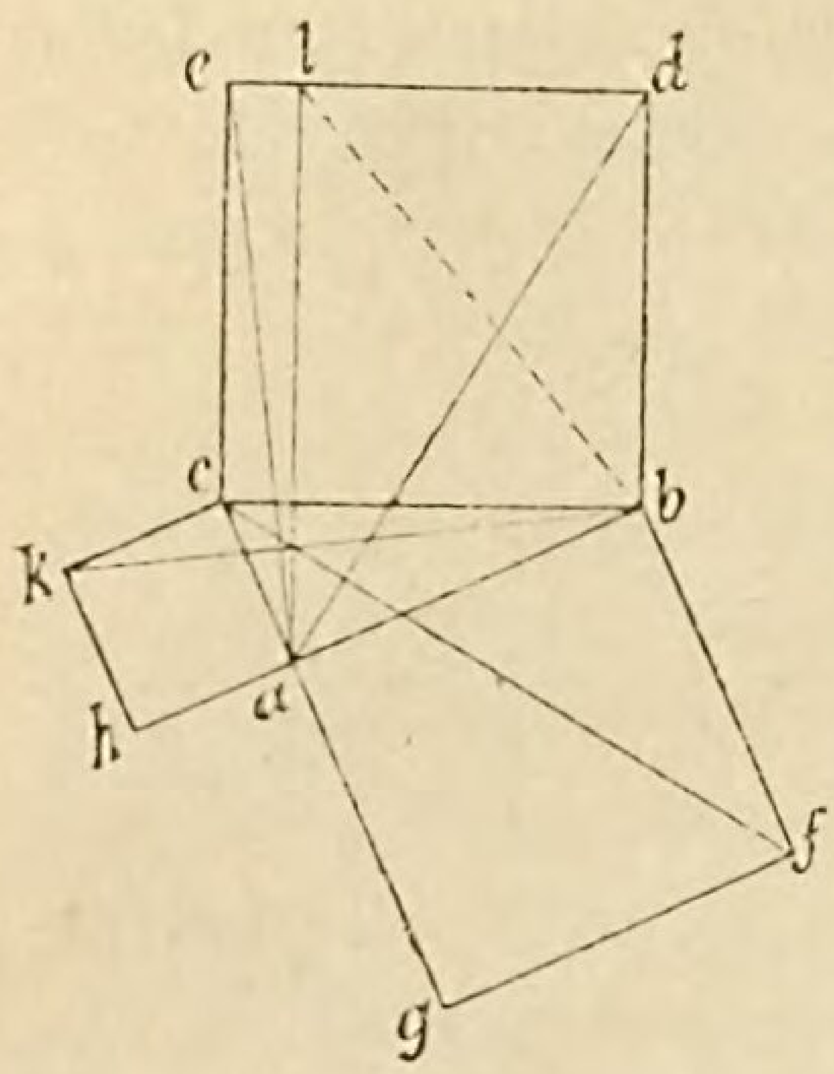



Diesen Fällen reihen sich zunächst solche an, in denen zwar der Inhalt eines Satzes unmittelbar durch die Construction anschaulich wird, aber die logische Führung des Beweises eine hinzutretende Theilung, durch Ziehung einer oder mehrerer Hülfslinien, erforderlich macht. So bedarf die geometrische Versinnlichung des Satzes $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ (Euklid II, 4), um sofort anschaulich zu sein, nur der Ziehung der durch den Satz selbst geforderten Linien e f und g h. Die Reduction auf bereits bewiesene Sätze fordert aber ausserdem die Ziehung der Diagonale a c, welche es möglich macht, auf die Sätze von der Gleichheit der Wechselwinkel und der Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks zurückzugreifen (Fig. 8).

In einer dritten Classe von Fällen ist die Art der vorzunehmenden Theilung weder mit dem Inhalt des Satzes unzweideutig gegeben, noch führt sie zu einer unmittelbaren Veranschaulichung desselben, sondern sie wird zunächst nur durch das Streben nach logischer Zurückführung der Theoreme auf bereits bekannte Sätze bestimmt. Hier erreicht zwar ebenfalls die zerlegende Construction eine grössere Anschaulichkeit, aber es geschieht dies doch nur für ein durch mannigfache geometrische Betrachtungen bereits geübtes Anschauungsvermögen oder unter Zuhülfenahme weiterer, noch mehr ins einzelne gehender Zerlegungen. Als Beispiel kann der Euklidische Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes gelten (I, 47). Auch bei ihm können wir eine durch den Inhalt des Satzes selbst geforderte Construction von denjenigen Constructionen unterscheiden, welche erst durch die Zurückführung auf bekannte Sätze nothwendig werden. Der Inhalt des Satzes macht die Ziehung der Linie a l || c e erforderlich, durch

welche das Quadrat b e in zwei Rechtecke c l = a k und b l = b g getheilt wird. Die weitere Construction, welche aus den Hülfslinien a e, a d, b k und c f besteht, dient dann dem Nachweis, dass wirklich c l = a k und b l = b g ist. Der grosse Unterschied von den vorangegangenen Fällen besteht aber darin, dass diese dem Beweis dienende Hülfsconstruction zugleich die Richtigkeit des Satzes erst einigermassen anschaulich macht. Dies geschieht dadurch, dass die drei genannten Hülfslinien zunächst die Herstellung von zwei Paaren congruenter Dreiecke, c b f und a b d, c k b und a c e, vermitteln. Da nun leicht zu sehen ist, dass a b d die Hälfte des Rechtecks b l und △ c b f die Hälfte des Quadrates a f, so folgt, dass b l = a f, und dass in analoger Weise c l = c h ist. Prägen sich aber auch diese Verhältnisse einer geometrisch geübten Anschauung unmittelbar ein, so lässt sich doch nicht verkennen, dass solches nur vermöge der vorangegangenen Beschäftigung mit den Sätzen über die zwischen Parallellinien construirten Figuren möglich wird, welche von der unmittelbar anschaulichen Identität des Flächeninhalts von Dreiecken oder von Parallelogrammen von gleicher Höhe und Grundlinie und von der nicht minder anschaulichen Halbirung des Parallelogramms durch die Diagonale consequent zu dem Satze übergeführt haben, dass ein Dreieck, welches mit einem Parallelogramm einerlei Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen construirt ist, die Hälfte vom Flächeninhalt des Parallelogramms einnimmt, daher a b d $= \frac{1}{2}$ b l und a c e $= \frac{1}{2}$ c l sein muss. Anschaulicher noch wird dieses Verhältniss, wenn man, die in jenen grundlegenden Sätzen stattfindende Entwicklung reconstruirend, etwa die Diagonale b l zieht, wo sofort die Flächengleichheit der Dreiecke a b d und b l d $= \frac{1}{2}$ b l einleuchtet. Selbst in solchen Fällen, wo das Constructionsverfahren vorwiegend durch logische Motive bestimmt wird, führt demnach die Theilung der Figuren auch immer zugleich eine anschauliche Vergegenwärtigung des Inhaltes der Sätze mindestens als Nebenerfolg herbei. Es hat dies seinen natürlichen Grund darin, dass die durch die Ziehung gerader Linien gewonnenen Theile im allgemeinen von einfacherer Beschaffenheit sind als die ganze Figur und darum in ihren Formverhältnissen leichter sich übersehen lassen.

Fig. 9.



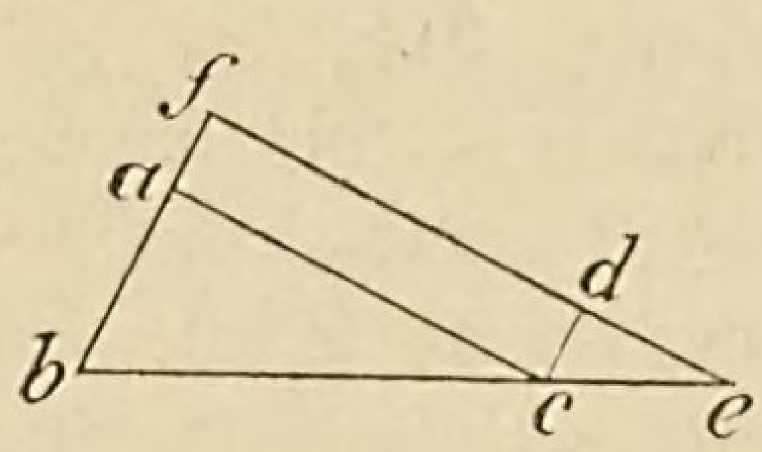
### c. Die ergänzenden Hülfsconstructionen.

Während für Lehrsätze, die sich auf bestimmte Figuren beziehen, die Theilung der letzteren in der Regel als das nächstliegende Hülfsmittel einer anschaulichen Demonstration erscheint, führt die Lösung irgend welcher geometrischer Aufgaben häufiger zur Herbeiziehung von Hülfsconstructionen, welche darauf abzielen, das Raumgebilde, dessen Erzeugung die Aufgabe fordert, als einen Theil eines Ganzen erscheinen zu lassen; die Relationen der verschiedenen Theile dieses Ganzen verbürgen dann die Richtigkeit der gegebenen Lösung. Sehr deutlich ist dieses Verhältniss in Euklid's Elementen zu erkennen, in welchen Lehrsätze und Aufgaben weit mehr von einander geschieden sind, als dies bei der neueren Behandlungsweise der Geometrie zu geschehen pflegt. So löst Euklid die Aufgabe, auf einer geraden Linie a b ein gleichseitiges Dreieck zu errichten, indem er an den Endpunkten a und b mit a b als Halbmesser zwei sich schneidende congruente Kreise zieht, worauf die nach einem der Schnittpunkte c gezogenen Radien a c und b c die geforderte Construction ergeben: diese beruht also auf dem Kunstgriff, dass die gegebene Linie a b zum Radius zweier sich in ihren Mittelpunkten schneidender gleicher Kreise gemacht wird, wodurch dann auch die Linien a c und b c zu Radien, also mit einander und mit a b gleich werden (Elemente I, 1). Die Aufgabe einen Winkel zu halbiren löst Euklid, indem er auf den Winkelschenkeln gleiche Strecken abträgt und an den Endpunkten der letzteren gleiche Radien zieht; die gewonnenen Punkte mit einander verbunden ergeben dann zwei congruente Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie die Halbirungslinie ist: hier besteht der Kunstgriff darin, dass die geforderten Winkel als gleich liegende Winkel congruenter Dreiecke construirt werden (I, 9).

Dieses Verhältniss zwischen Aufgaben und Lehrsätzen beruht darauf, dass im allgemeinen die Lösung von Aufgaben ein synthetisches Verfahren darstellt, welches für die Hülfsconstructionen der Lehrsätze, die den analytischen Gang einzuhalten pflegen, die Hülfsmittel herbeischafft. Die ergänzenden Hülfsconstructionen sind daher ebenfalls vorwiegend synthetischer Art: sie benützen das gegebene Object, um weitere Raumgebilde zu construiren, die mit jenem in einem bestimmten Zusammenhange stehen, worauf dann zuweilen allerdings als Nebenerfolg zugleich eine Theilung des ursprünglichen Objectes auftreten kann, namentlich wenn dieselbe, wie in dem zweiten der obigen Beispiele, durch die Aufgabe selber gefordert ist. Es steht also diese Verwendung ergänzender Hülfsconstructionen in naher Beziehung zu der allgemeinen wissenschaftlichen Bedeutung der Aufgaben, und es ist in dieser Beziehung charakteristisch, dass Euklid's Elemente nicht nur sogleich mit Aufgaben beginnen, sondern dass auch päter neue Lehren wiederum durch solche eingeleitet werden. Von den fundamentalen Aufgaben, wie wir oben in unserem ersten Beispiel eine derartige kennen lernten, scheiden sich dann aber diejenigen, die bestimmten

Lehrsätzen folgen, als Anwendungen der letzteren, welche meistens zugleich auf neue Lehrsätze vorbereiten. So ist das zweite Beispiel eine Anwendung der Congruenzsätze und bereitet anderseits die Sätze über das Verhältniss der Neben- und Aussenwinkel vor, in denen von der Theilung der Winkel Gebrauch gemacht wird. Nichts desto weniger hat auch Euklid Aufgaben und Theoreme nicht vollständig von einander getrennt, sondern, namentlich in denjenigen Fällen, in denen die Lösung einer Aufgabe dem Beweis eines einzelnen Lehrsatzes dient, die erstere mit dem letzteren verschmolzen, oder er hat Sätze in die Form von Theoremen gebracht, die ebenso gut als Aufgaben behandelt werden könnten. Unter diesen Umständen ist es begreiflich, dass auch in der Begründung einer grossen Zahl von Lehrsätzen ergänzende Hülfsconstructionen theils für sich, theils neben der Theilung der Figuren auftreten. So beweist Euklid den Satz, dass Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallellinien gleich sind, indem er die Dreiecke durch Verlängerung der Parallelen, zwischen denen sie construirt sind, und durch Ziehung von Parallelen zu je einer der Seiten eines jeden Dreiecks zu Parallelogrammen ergänzt, wodurch der Satz auf den andern von der Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Höhe und Grundlinie zurückgeführt ist (I, 40). Der Satz, dass in gleichwinkeligen Dreiecken die Seiten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind, wird bewiesen, indem die Dreiecke auf derselben Grundlinie construirt und durch Verlängerung gleich liegender Seiten zu einem grösseren Dreieck, dessen Theile sie sind, ergänzt werden (VI, 4). Es ist dann leicht ersichtlich, dass die Ergänzung a f c d (Fig. 10) ein Parallelogramm, daher f b || c d und a c || f e ist. Mit Hülfe des Satzes, wonach die Parallele zur einen Seite eines Dreiecks die andern Seiten proportional theilt, folgt aber hieraus b a : a f = b c : c e oder b a : c d = b c : c e; ebenso f d : d e = b c : c e oder a c : d e = b c : c e = b a : c d. Offenbar liesse sich dieser Satz ebenso gut in der Form einer Aufgabe behandeln. Um auf derselben Grundlinie zwei Dreiecke zu construiren, deren Seiten proportionirt sind, hat man die beiden andern Seiten paarweise einander parallel zu ziehen und zu verlängern, wodurch das Dreieck b f e entsteht und alles weitere wie oben folgt.

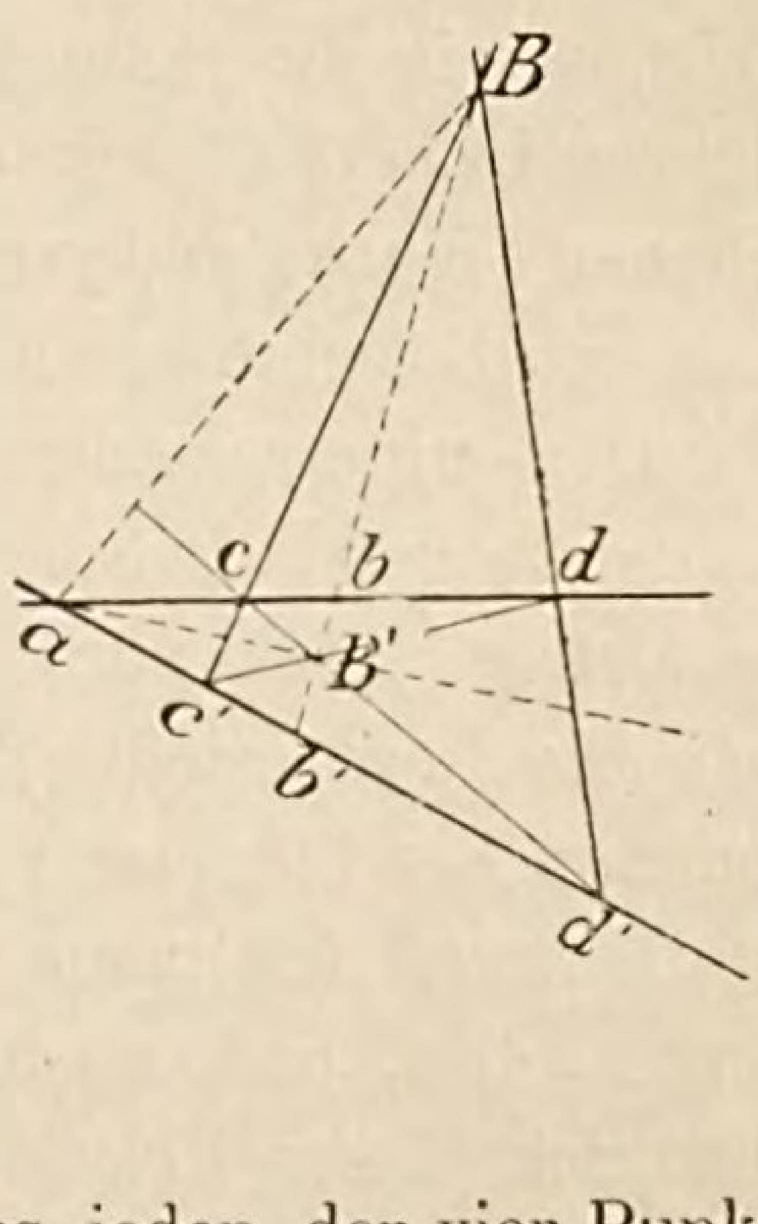
Fig. 10.




In einer noch innigeren Verbindung stehen in der neueren Geometrie die Lösung der Aufgaben und die Aufstellung der Lehrsätze, wie dies häufig schon die durchgängig gewählte Form der äusseren Darstellung mit sich bringt, in der an die Stelle der Zerlegung in eine Reihe scheinbar völlig getrennter Sätze die zusammenhängende Untersuchung getreten ist. Indem aber diese Untersuchung regelmässig von der Lösung bestimmter Aufgaben mittelst der Construction zu der Formulirung der Gesetze fortschreitet, welche sich aus jener ergeben, wird die Constructions-

methode eine vorwiegend synthetische. Die Theilung der Figuren kommt daher nur noch in sehr geringem Masse zur Anwendung; an ihre Stelle tritt überall da, wo sich die Untersuchung auf ein bereits gegebenes Raumgebilde bezieht, wo also das Untersuchungsobject selbst nicht erst durch Construction erzeugt werden soll, die ergänzende Hülfsconstruction. Aber diese unterscheidet sich zugleich in der Art ihrer Durchführung von den Methoden der alten Geometrie. Diese letzteren tragen häufig noch den Charakter des Zufälligen an sich. Dem Stadium inductiver Ermittelungen näher stehend, oft sichtlich aus einer Erprobung verschiedener Mittel hervorgegangen, erscheinen sie leicht als willkürlich bevorzugte Verfahren, für die ebenso gut andere hätten gewählt werden können. Diesen Charakter trägt die Methode der Theilung der Figuren am allermeisten an sich; er fehlt aber auch bei den ergänzenden Hülfsconstructionen der Alten nicht ganz. Im Gegensatze hierzu sucht nun die neuere synthetische Geometrie überall diejenigen Constructionsmethoden anzuwenden, die durch die Natur des Problems unmittelbar gefordert sind, so dass sie den künstlichen Verfahrungsweisen Euklid's gegenüber als natürliche Methoden erscheinen, die sich für Jeden, der das allgemeine Princip der Methoden erfasst hat, von selbst ergeben. Es handle sich z. B. um die Untersuchung des Vierecks oder desjenigen Raumgebildes, welches durch vier Punkte in der Ebene, c d c′ d′, bestimmt wird. Für Euklid war die Untersuchung eines solchen Gebildes erschöpft durch die Ermittelung seines Flächeninhaltes, welche mittelst der Construction eines Parallelogramms von gleichem Flächeninhalte geschah, und wobei der Winkel, welchen die Höhenseite dieses Parallelogramms mit der Grundlinie bildet, willkürlich blieb (Elemente I, 45). Die neuere Geometrie sucht die gesetzmässigen Beziehungen festzustellen, in welchen die aus dem gegebenen Raumgebilde und seinen Elementen von selbst sich ergebenden Raumtheilungen zu einander stehen. Als nächste ergänzende Construction wird so die Verbindung eines jeden der vier Punkte mit jedem der drei andern gefordert sein: auf diese Weise entsteht das aus 6 Linien bestehende vollständige Viereck c′ B d′ B′. Sodann aber kann eine jede dieser 6 Geraden beliebig verlängert werden: diese Verlängerungen sammt den so entstandenen Durchschnittspunkten bilden das vollständige Vierseit. In ihm erscheinen nun die Punkte c′ d′ als Projectionen der Punkte c d, b und b′ als Projectionen von B′ oder B. Daraus aber folgt die fundamentale Beziehung

Fig. 11.




$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a\,c'}{b'\,c'} : \frac{a\,d'}{b'\,d'},$$

eine Beziehung, aus welcher eine Reihe der wichtigsten Folgerungen abge-

leitet wird, die in das Gebiet der später zu betrachtenden geometrischen Analyse gehören*).

Zuweilen gehen solche Constructionen von speciellen Fällen aus, in denen Hülfslinien von fundamentaler Bedeutung für die Auffassung der Mass- oder Lageverhältnisse der Figuren unmittelbar durch die Beschaffenheit der letzteren an die Hand gegeben sind, worauf sie dann durch Verallgemeinerung auf alle andern Fälle ähnlicher Art übertragen werden, um die anschauliche Darstellung eines allgemeinen Gesetzes zu vermitteln. So ist unmittelbar ersichtlich, dass die gemeinsame Sehne zweier sich schneidender Kreise von jedem Punkte ihrer Verlängerungen aus die Ziehung von Tangenten, die einander gleich sind, an die beiden Kreise gestattet. Dies vorausgesetzt ist es leicht nachzuweisen, dass jenes Verhalten der gemeinsamen Sehne eine Eigenschaft ist, welche allgemein einer bestimmten Geraden zukommt, die auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier beliebig in einer Ebene gelegener Kreise senkrecht ist, und die als die Polare der beiden Kreise bezeichnet wird. Es kann dann die nämliche Linie auch für die Lagebeziehung dreier Kreise benützt werden, da offenbar die drei Polaren dieser Kreise in einem Punkte sich schneiden müssen**). Im weiteren Sinne können diesen ergänzenden Hülfsconstructionen auch die Projectionsmethoden der descriptiven Geometrie, durch welche sie wichtige Eigenschaften körperlicher Gebilde mittelst ihrer Projectionen auf einer Ebene nachweist, sowie die mannigfaltigen Verfahrungsweisen der Transformation der Figuren beigezählt werden. Sie alle haben die gemeinsame Eigenschaft zu gegebenen Figuren andere zu construiren, welche, zu jenen in bestimmten gesetzmässigen Beziehungen stehend, deren räumliche Verhältnisse erkennen lassen.

Der unterscheidende Charakter der ergänzenden Hülfsconstructionen in den zuletzt betrachteten Anwendungen gegenüber der Euklidischen Geometrie besteht zunächst darin, dass man nicht bloss die Grösse-, sondern auch die Lagebeziehungen der untersuchten Raumgebilde mittelst der Construction erschöpfend zu bestimmen sucht. Sodann aber ergeben sich die geforderten Hülfslinien unmittelbar aus den Relationen der gegebenen Elemente selbst, und sie führen daher ohne weiteres zu einem angemessenen Ausdruck dieser Relationen. So zeigt z. B. die Hülfsconstruction des vollständigen Vierseits sofort, dass die Lagebeziehung der vier Punkte auf den allgemeineren Fall der projectivischen Beziehung einer Punktreihe a b c d oder a b' c' d' und eines von einem gegebenen Mittelpunkt B ausgehenden ebenen Strahlenbüschels zurückführbar ist. Indem die Construction von dem gewöhnlichen zunächst zu dem vollständigen Viereck und dann von diesem zu dem vollständigen Vierseit überführt, ist sie aber zugleich eine

---

*) Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. 2. Aufl. Bearb. von H. Schröter. S. 17 f.

**) H. Hankel, Die Elemente der projectivischen Geometrie. Leipzig 1875, S. 7 u. 65 f.

Erzeugung dieser Raumgebilde. Die ergänzenden Hülfsconstructionen bilden daher den Uebergang zu den genetischen: sie können, namentlich in der Anwendungsweise, die ihnen die projectivische Geometrie giebt, selbst als genetische Constructionen betrachtet werden, welche in ihrer Ausführung durch bereits vorhandene Raumgebilde bestimmt sind.

### d. Die genetischen Constructionen.

Die genetische Construction ist nothwendiger Weise zu jeder Zeit der Ausgangspunkt geometrischer Untersuchungen gewesen. Die Raumgebilde müssen erzeugt sein, ehe die Betrachtung ihrer Mass- und Lageverhältnisse beginnen kann. Aber nicht immer hat die genetische Construction zugleich die Grundlage der Untersuchungen gebildet. Die Geometrie der Alten betrachtet die mit Lineal und Cirkel hervorgebrachten Figuren als fertige Objecte, die sie für sich und in ihrem gegenseitigen Verhältnisse der Untersuchung unterwirft. Dadurch wird von selbst die Theilung der Figuren, mit gelegentlicher Herbeiziehung ergänzender Hülfsconstructionen, zur herrschenden Methode, und diese Methode führt unvermeidlich zur isolirten Untersuchung der einzelnen Classen von Figuren, wobei verbindende Beziehungen nur zwischen solchen Raumgebilden sich einstellen, bei denen schon die unmittelbare Anschauung dieselben erkennen lässt. Indem hier die genetische Construction nur den Zweck hat, das Material für die nachfolgende Untersuchung zu gewinnen, nicht dieser selbst als vornehmstes Hülfsmittel zu dienen, erscheint die Art, wie die verschiedenen Figuren erzeugt werden, verhältnissmässig gleichgültig. Der gleichzeitige Gebrauch von Cirkel und Lineal lässt überdies von vornherein die einfachsten regelmässigen Figuren bevorzugen, eine Neigung, die durch ästhetische Interessen, durch die Leichtigkeit der Aufgaben und durch die einseitig metrische Richtung der Untersuchung begünstigt wurde. So begreiflich und nothwendig aber auch diese Bevorzugung war, so hinderte doch gerade sie eine allgemeinere Behandlung der Probleme, welche zugleich zu einer planmässigeren und übereinstimmenderen Anwendung genetischer Constructionsmethoden hätte führen können. Es ist charakteristisch für dieses Zurücktreten des genetischen Gesichtspunktes, dass Euklid die Definitionen der Raumgebilde möglichst unabhängig macht von ihrer Erzeugungsweise, und daher erst bei den Körpern mit krummen Oberflächen, Kugel, Cylinder, Kegel, wo offenbar eine blosse Beschreibung allzu weitläufig würde, die descriptive durch eine genetische Definition ersetzt*). Obgleich aber die in diesen Fällen naheliegende Entstehungsweise der Raumgebilde durch Rotation einer ebenen Figur (Halbkreis, Parallelogramm, Dreieck) um ihre Axe darauf hinweisen musste, dass die Bewegung eine überall anwendbare genetische Constructionsmethode sei, so wurde diese doch bei den

*) Euklid's Elemente, Buch XI.

Kegelschnittslinien aus bloss zufälligen Anlässen wieder verlassen, um das Princip der Erzeugung von Figuren mittelst der gegenseitigen Durchschneidung anderer, die bereits gegeben sind, zu benützen. Nur bei gewissen verwickelteren Curven, wie bei der Quadratrix, der Conchoide des Nikomedes, der Archimedischen Spirale u. s. w., kehrte man, veranlasst durch die in der Natur zu beobachtende Entstehung solcher Curven, abermals zu der Bewegung zurück. Auf diese Weise pflegt die antike Geometrie von derjenigen Erzeugungsweise der Formen auszugehen, durch welche dieselben zufällig gefunden wurden, ohne sich darum zu kümmern, dass im einen Fall körperliche Gebilde zur Erzeugung von Curven in der Ebene und in einem andern Fall umgekehrt ebene Figuren zur Erzeugung von Körpern und krummen Oberflächen verwendet werden.

Dagegen ist die neuere Geometrie, in dem Masse als sie die genetische Construction zur herrschenden Methode erhob, zugleich bestrebt gewesen, die einzelnen Constructionen in einen systematischen Zusammenhang zu bringen, welcher durch die gleichförmigen Bedingungen der Erzeugung und die regelmässige Ableitung neuer Constructionen aus den bereits gegebenen bedingt wird. Indem dieser Zusammenhang die Forderung mit sich bringt, dass alle Raumgebilde auf die einfachsten Elemente zurückzuführen sind, aus denen sie erzeugt werden können, werden die äusseren Hülfsmittel, deren sich die Construction bedient, nicht vermehrt, sondern vereinfacht. Das einzige unerlässliche Werkzeug bleibt das Lineal. Nicht der Kreis und die Gerade, sondern der Punkt und die Gerade sind die einfachsten Gebilde; sie dienen zunächst zur Erzeugung der Ebene, worauf dann mittelst dieser drei Elemente alle andern Raumformen entstehen können. Hatte die alte Geometrie, durch zufällige Anlässe bestimmt, bald die Bewegung der Elemente, bald die Durchschneidung gegebener Raumgebilde zur Erzeugung benützt, ohne dass zwischen beiden Methoden eine innere Beziehung ersichtlich geworden wäre, so ist jetzt die wechselseitige Durchdringung beider Methoden zur Herrschaft gelangt. Indem alle Raumgebilde auf gesetzmässig erfolgende Bewegungen von Punkten und Geraden zurückgeführt werden, pflegt nämlich eine solche Bewegung die Entstehung von Durchschnittsfiguren als eine weitere Folge mit sich zu führen. Der Vorgang, welcher diese Durchdringung beider Constructionen unmittelbar verwirklicht, ist die Projection. Hiernach scheiden sich die genetischen Constructionsmethoden im Ganzen in drei Classen: die Erzeugung von Raumgebilden durch Bewegung, die Bildung von Durchschneidungsfiguren und die projectivische Construction. Ausserdem sind zuweilen noch Transformationen der Figuren durch Biegung, Dehnung und Zerschneidung als specielle Hülfsmittel, namentlich im Interesse der geometrischen Versinnlichung analytischer Sätze, angewandt worden. Die Bewegung und die wechselseitige Durchschneidung von Raumgebilden hat schon die alte Geometrie benützt. Die projectivische Methode dagegen ist erst in der neueren synthetischen Geometrie zur Entwicklung gelangt.

Die Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung hat gegenüber andern Methoden hauptsächlich zwei grosse Vorzüge. Der eine besteht in ihrer unbeschränkten Anwendbarkeit: jedes beliebige Raumgebilde lässt sich auf irgend eine Bewegung oder auf ein System von Bewegungen zurückführen, und diese Entstehungsweise giebt regelmässig zugleich über gewisse fundamentale Eigenschaften der Figur unmittelbare Rechenschaft. Der zweite Vorzug besteht in der Möglichkeit, jede, auch die verwickeltste, Form aus sehr einfachen Bedingungen abzuleiten. In doppelter Weise findet bei der Erzeugung der Formen durch Bewegung eine solche Zurückführung auf elementare Bedingungen statt: jede Bewegung zusammengesetzterer Raumgebilde lässt sich in Bewegungen einfacherer, und jede verwickeltere Bewegung lässt sich in eine Anzahl einfacher Bewegungen zerlegen. Als letztes Element des Raumes, aus dessen wiederholten Bewegungen jede noch so complicirte Figur schliesslich abgeleitet werden kann, bleibt so der Punkt; als einfachste Bewegung, auf deren Wiederholung und Zusammensetzung jede beliebige Bewegung zurückzuführen ist, bleibt die einfache geradlinige Bewegung. Die Verwicklung der aus diesen Elementen erzeugbaren Formen kennt aber keine Grenzen, da beliebig viele einfache Bewegungen sich combiniren und die durch vorausgegangene Bewegungen erzeugten Formen als Grundgebilde für eine neue Erzeugungsreihe sich verwenden lassen. Die systematische Erzeugung zusammengesetzter Formen aus einfachen kann daher den Uebergang von den Formen niederer zu solchen höherer Stufe in zweifacher Weise gewinnen: 1) durch gleichzeitige Combination mehrerer Bewegungen von gleicher Einfachheit, und 2) durch successive Anwendung bestimmter Bewegungsgesetze auf die durch vorangegangene Bewegungen erzeugten Raumgebilde. Beide Formen des systematischen Fortschritts erfüllen verschiedene Zwecke, nach denen die Wahl der Methode sich richten muss.

Die gleichzeitige Combination mehrerer einfacher Bewegungen ist das wirksamste Mittel, um Raumgestalten derselben Art, aber von wachsender Verwicklung entstehen zu lassen. Die Zusammensetzung der Bewegungen giebt hier unmittelbar ein anschauliches Mass ab für den Grad der Verwicklung der Form, wie er analytisch durch den Grad der Gleichung gemessen werden kann, welche der arithmetische Ausdruck des betreffenden Raumgebildes ist. So entstehen alle Curven zweiten Grades durch die Bewegung eines Punktes, die im allgemeinen durch eine Gerade und zwei feste Punkte, die Brennpunkte, bestimmt ist: diese Bewegung erzeugt eine Ellipse, wenn die Entfernungssumme, eine Hyperbel, wenn der Entfernungsunterschied von den zwei festen Punkten gleich der gegebenen Geraden ist; Kreis und Parabel sind Grenzfälle, von denen der erste entsteht, wenn die zwei Brennpunkte in einen zusammenfallen, der zweite, wenn der eine der Brennpunkte in unendliche Entfernung rückt. Wie sich auf diese Weise die Kegelschnitte auf Punkte und gerade Linien als die bestimmenden Elemente zurückführen lassen, so ist eine ähnliche Reduction bei jeder

noch so verwickelten Curve immer ausführbar. Man pflegt dabei unter den bestimmenden Elementen zunächst einfachere Curven zu erhalten; da aber diese durch Punkte und Gerade sich bestimmen lassen, so bleibt jene Reduction auch bei den höheren Curven immer möglich, und es nimmt dadurch theils die Zahl der einfachen Elemente, von denen die Bewegung abhängt, theils die Zahl der Bewegungen, die zur Erzeugung der Curve erforderlich sind, fortwährend zu. So erfordert z. B. die Archimedische Spirale an sich nicht mehr Elemente als der Kreis, nur tritt bei ihr an die Stelle des festen Punktes und der Geraden ein fester Kreis und eine Gerade, und die Bewegung selbst wird eine doppelte: während die Gerade als Halbmesser des Kreises bestimmte Bogenlängen beschreibt, legt zugleich auf ihr der erzeugende Punkt Strecken zurück, die jenen Bogenlängen proportional sind. Auf diese Weise verwendet die synthetische Geometrie die Bewegung stets in solcher Weise, dass das bewegte Element durch seine Relationen zu gewissen andern Elementen vollständig bestimmt wird, und dass daher von der relativen Geschwindigkeit der stattfindenden Bewegungen abstrahirt werden kann. Diese Abstraction findet ihren Ausdruck in dem Begriff des geometrischen Ortes. Indem der letztere einen Punkt oder eine Summe von Punkten bezeichnet, welche von andern Raumelementen bestimmt sind, ermöglicht er die vollständige Elimination des Begriffs der Bewegung, während doch alle sonstigen Vortheile der genetischen Construction beibehalten werden. Definirt man z. B. die Hyperbel als den geometrischen Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten einer constanten Geraden gleich kommt, so ist hier nur noch die gesetzmässige Abhängigkeit von den bestimmenden Elementen der Curve zum Ausdruck gelangt. Da der Begriff der Bewegung zur Auffassung eines Raumgebildes nicht erforderlich ist, so ist die Substitution des geometrischen Ortes an ihrer Stelle die vorzüglichere Form der Definition, wenn auch anerkannt werden muss, dass dieser letztere Begriff erst durch die Verwerthung der Bewegung für Erzeugung der Raumgebilde ermöglicht wurde. Die Möglichkeit, den Begriff der Bewegung durch den des geometrischen Ortes zu ersetzen, unterscheidet aber insbesondere auch die Constructionen der synthetischen von denjenigen der Coordinatengeometrie. Die letztere wird durch die analytischen Zwecke, die sie verfolgt, zur Anwendung möglichst gleichförmiger Constructionsmethoden gezwungen. Hierdurch ist sie aber zugleich genöthigt, sich auf die Benützung von bestimmten Elementen einfachster Art zu beschränken. Eine ebene Curve z. B. denkt man sich erzeugt durch die Bewegung eines in der Ebene gelegenen Punktes, welche in zwei Bewegungen nach den Coordinatenaxen zerlegt wird: es ist dann die Form der Curve von der relativen Geschwindigkeit abhängig, welche diese beiden Bewegungen in jedem Momente besitzen. Hier ist eine Elimination des Begriffs der Bewegung zu Gunsten des geometrischen Ortes durchaus unmöglich, da die gleichförmige Art, in welcher jene Reduction auf die Coordinatenaxen bei

Curven der verschiedensten Ordnung vorgenommen wird, dazu zwingt, alle Formeigenthümlichkeiten der Raumgebilde auf Relationen der Geschwindigkeit zurückzuführen. Wo die erzeugenden Elemente nach der besonderen Natur der Gebilde sich nicht richten, da muss selbstverständlich Alles in die Modalitäten der erzeugenden Bewegungen, ihre relativen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsänderungen, verlegt werden. Der Vortheil, der aus dieser Gleichförmigkeit für die analytische Behandlung entspringt, ist aber ein ebenso grosser Nachtheil für die rein geometrische Betrachtung.

Die Forderung, jede Construction durch Bewegung auf möglichst einfache bestimmende Elemente zurückzuführen, geräth nun unvermeidlich bei Aufgaben von verwickelterer Natur mit der andern Forderung, dass die Zahl der bestimmenden Elemente eine möglichst kleine sei, so sehr in Conflict, dass man in der Regel der letzteren nachgeben wird, sofern nicht, wie bei der Coordinatengeometrie oder bei den unten zu besprechenden projectivischen Methoden, specielle Motive die ausschliessliche Wahl gerader Linien fordern. Hiervon abgesehen erscheint es als ein wohlbegründetes Recht, dass man durch die successive Anwendung bestimmter Bewegungsgesetze auf bereits vorhandene Raumgebilde eine Reihe neuer Constructionen gewinnt. Nicht selten wird dieses Verfahren zu einer tieferen Einsicht in die Verwandtschaftsbeziehungen geometrischer Formen führen, als wenn man für jede einzelne Form die einfachste Erzeugungsweise wählt, die für sie möglich ist. So lassen die oben angeführten einfachsten genetischen Constructionen der Kegelschnitte durchaus eine Erkenntniss ihrer Beziehungen vermissen. Diese wird dagegen sofort hergestellt, wenn man jeden Kegelschnitt aus der Bewegung eines Punktes ableitet, welcher von einem festen Punkte und von einem Kreise gleich weit absteht, wenn man also statt zweier Punkte und einer Geraden einen Punkt, einen Kreis und eine Gerade als bestimmende Elemente wählt*). Weist man nun dem erzeugenden Punkte die verschiedenen für ihn möglichen geometrischen Orte an, so erhält man successiv die verschiedenen Formen des Kegelschnitts: dieser ist eine Ellipse, wenn der Punkt innerhalb des bestimmenden Kreises liegt, er wird selbst zu einem Kreis, wenn er in den Mittelpunkt desselben fällt, zu einer Geraden, wenn er in seinen Umfang fällt, zu einer Hyperbel, wenn er ausserhalb des Kreises gelegen ist, und speciell zu einer Parabel, wenn der Mittelpunkt des bestimmenden Kreises in unendliche Ferne rückt, wodurch sich der Umfang desselben in die Leitlinie der Parabel umwandelt. Diese Construction erschöpft also nicht nur vollständig den Begriff des Kegelschnitts, sondern sie zeigt auch, wie die verschiedenen Formen durch stetige Veränderung der Bedingungen in einander übergehen.

Die Bildung von Durchschneidungsfiguren ist eine Construc-

*) Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearbeitet von C. F. Geiser. 2. Aufl., S. 40 f.

tionsmethode, welche zur Erzeugung durch Bewegung insofern im vollen Gegensatze steht, als sie nicht aus dem Einfachen das Zusammengesetzte, sondern aus dem Zusammengesetzten das Einfache ableitet. An sich ist diese Methode ebenso consequent durchführbar wie die entgegengesetzte. Wie man durch Bewegung des Punktes die Linie, durch Bewegung der Linie die Fläche und durch Bewegung der Fläche den Körper erhält, so liesse sich, vom letzteren ausgehend, als sein Durchschneidungsgebilde die Fläche, aus dieser die Linie und aus der Linie der Punkt gewinnen. Auch hat man zuweilen, mit Rücksicht darauf, dass uns in der Erfahrung nur Körper gegeben sind, diese Entwicklung für den naturgemässen Weg zur Erlangung der geometrischen Grundbegriffe gehalten. Dabei wird jedoch übersehen, dass wir durch Abstraction und nicht durch Construction zu den geometrischen Begriffen von Fläche, Linie und Punkt gelangen, und zwar durch eine Abstraction, die schon bei dem Begriff des Körpers wirksam ist, da dem geometrischen Körper zahlreiche Merkmale nicht zukommen, welche bei den physischen Körpern nicht fehlen können. In der That hat daher auch vorzugsweise in einem Fall die Bildung von Durchschneidungsgebilden wichtigere Anwendungen gefunden: bei der Erzeugung von krummen Linien durch Flächen. Gerade hier aber pflegt trotz des Uebergangs von drei Dimensionen auf zwei das erzeugende Gebilde durch einfachere Eigenschaften sich auszuzeichnen. Den augenfälligsten Beleg hierzu liefert diejenige Classe von Curven, die lange Zeit ausschliesslich auf diesem Wege abgeleitet wurde, die Kegelschnitte. Der Kegel, namentlich der gerade Kreiskegel, welchen die Alten allein benützten, wird durch eine viel einfachere Bewegungsconstruction gewonnen als die Kegelschnitte selbst, den Kreis ausgenommen. So leicht es war, durch Drehung eines Dreiecks auf seiner Basis einen Kegel herzustellen, so wenig nahe lag es, durch die Bewegung eines Punktes in der Ebene die Ellipse, Parabel und Hyperbel zu finden. Auch musste die Verschiedenheit der Durchschnittsfläche des abgestumpften Kegels je nach der Lage der schneidenden Ebene frühe schon die Aufmerksamkeit fesseln. Ausserdem bietet diese Construction vor der Erzeugung durch Bewegung eines Punkts in der Ebene den Vortheil, den Zusammenhang der verschiedenen Kegelschnitte unter einander anschaulich zu machen. Dagegen steht sie mit den fundamentalen Eigenschaften der Curven nicht in so unmittelbarer Beziehung, und es muss immerhin als eine Unvollkommenheit anerkannt werden, wenn man genöthigt ist, zur Erzeugung einer ebenen Figur den Raum von drei Dimensionen zu Hülfe zu nehmen.

Diese Unvollkommenheit ist es nun, welche hauptsächlich zur Ausbildung der dritten Form genetischer Methoden, der projectivischen Construction, beigetragen hat. Indem diese aus einer Verbindung der beiden vorigen hervorging, hat sie freilich zur Ueberwindung gerade jener Unvollkommenheit nur allmählich geführt. Die nächste Umgestaltung näm-

lich, welche die Erzeugung von Durchschnittsgebilden im Sinne einfacherer genetischer Methoden zuliess, bestand in der Ausbildung der perspectivischen Projectionsmethode. Wie die sämmtlichen Curven zweiten Grades als Durchschneidungsgebilde der allgemeinsten Oberfläche zweiten Grades, der Kegelfläche, dargestellt werden können, so lassen sie sich auch als perspectivische Projectionen der einfachsten dieser Curven selber, des Kreises, gewinnen. Denkt man sich den Schatten, den ein Kreis entwirft, wenn sich hinter ihm ein leuchtender Punkt befindet, durch eine Ebene von veränderlicher Lage aufgefangen, so erhält man durch Drehung der Ebene die verschiedenen Kegelschnitte als Schattenprojectionen. Aehnlich lassen sich, wie Newton gezeigt hat, die verschiedenen Formen der Curven dritten Grades durch die Schattenprojection von fünf divergirenden Parabeln gewinnen*). Denkt man sich nun aber den Punkt, von welchem die Projectionsstrahlen ausgehen, in unendliche Entfernung gerückt, so verwandelt sich die centrale Projection in die seit Monge von der descriptiven Geometrie vorzugsweise benützte Parallelprojection. Da bei dieser parallele Linien auch nach der Projection parallel bleiben, so werden zwar die Dimensionsverhältnisse, nicht aber die Lageverhältnisse der Figuren verändert. Aus räumlichen Gebilden gehen also Figuren in der Ebene hervor, welche jenen in allen ihren Eigenschaften entsprechen. So eröffnet sich hier eine Reihe theoretisch wie praktisch gleich wichtiger Wechselbeziehungen, indem bald die Eigenschaften der ebenen Figuren aus denjenigen der ihnen entsprechenden körperlichen Formen, bald umgekehrt diese aus jenen genetisch sich entwickeln lassen**).

Diese beiden Anwendungen der Projectionsmethode, die Schattenconstruction wie die Parallelprojectionen der descriptiven Geometrie, setzen jedoch gegebene Raumgebilde voraus, welche nach bestimmten Regeln in andere transformirt werden. Sie stehen auf diese Weise in gewissem Sinne immer noch zwischen der ergänzenden Hülfsconstruction und der genetischen Construction in der Mitte. Nur insofern als das durch die Transformation erzeugte Gebilde entweder den gleichen Werth beansprucht als das ursprüngliche oder sogar den eigentlichen Zweck der Methode ausmacht, überwiegt bereits der genetische Gesichtspunkt. Zur vollen Geltung gelangt aber der letztere bei den projectivischen Constructionen erst dann, wenn nicht bestimmte Raumgebilde, sondern nur die zur Ausführung der Projection unerlässlichen Elemente selbst als gegeben vorausgesetzt werden. Diese Elemente sind der Punkt, als der Ort, von welchem ein Projectionsstrahl ausgeht, die Gerade, welche die Richtung des letzteren angiebt, und die Ebene, welche das zu einem Punkt gehörige Strahlenbüschel enthält, das durch je zwei in dem Punkt sich schneidende

---

*) Neutoni Genesis curvarum per umbras. Lond. 1746.

**) Vgl. hierzu Chasles, Geschichte der Geometrie. Cap. V. Deutsche Ausgabe von Sohncke. Halle 1839. S. 185 f.

Strahlen bestimmt wird. Insofern sich hierbei der Punkt stets als Durchschnittsgebilde von Strahlen ergiebt, können diese Elemente auch auf zwei, auf die Gerade und die Ebene, zurückgeführt werden. Es übernimmt dann die Gerade jene Rolle des erzeugenden Gebildes, welche bei der Construction durch Bewegung dem Punkte zukommt. Wie bei der letzteren der in einer Ebene bewegte Punkt alle ebenen Figuren hervorbringt, so erzeugen bei der projectivischen Construction gerade Linien in der Ebene, indem sie sich kreuzen oder als Tangenten einen Raum umhüllen, alle in der Ebene möglichen Raumformen. Den Namen der synthetischen Geometrie trägt gerade diese Darstellungsweise insofern mit Recht, als sie wirklich durch eine Synthese von ausgedehnten Gebilden der einfachsten Art, von Geraden, alle Formen hervorbringt. Die Bewegungsconstruction dagegen verfährt nicht im eigentlichen Sinne synthetisch, da der Punkt selbst kein ausgedehntes Gebilde ist, also auch die Erzeugung einer Curve durch Bewegung eines Punktes nur die successive Darstellung der geometrischen Orte ist, aus denen die Curve wirklich besteht, nicht aber eine synthetische Erzeugung aus anderen elementaren Raumgebilden.

Die in diesem Sinne angewandte projectivische Construction ist demgemäss auch vom genetischen Gesichtspunkte aus die vollendetste Methode. Nichts weiteres voraussetzend als jene einfachsten zur Construction erforderlichen Elemente, wird es ihr möglich, die verschiedenen Formen in der naturgemässen Reihenfolge hervorzubringen und unmittelbar aus ihrer Erzeugungsweise ihre wesentlichen Eigenschaften und inneren Beziehungen erkennen zu lassen. Um den Charakter dieser Methode zu kennzeichnen, sei hier nur auf einige einfache Beispiele hingewiesen, die an frühere Constructionen sich anschliessen. Wir haben S. 147 bemerkt, dass, wenn durch ein ebenes Strahlenbüschel zwei transversale gerade Linien gelegt werden, auf diesen zwei Reihen von Durchschnittspunkten a, b, c, d und a', b', c', d' entstehen, die zu einander perspectivisch sind, indem die eine Reihe als die perspectivische Abbildung der andern angesehen werden kann. Denkt man sich nun den Träger der einen Punktreihe, z. B. A' (Fig. 12), durch Drehung um den Punkt a' aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, während die Punkte auf ihm unverändert bleiben, so können diese nicht mehr mittelst des Strahlenbüschels S, wohl aber mittelst eines zweiten Strahlenbüschels S' erhalten werden, welches auf der andern Seite von A' so gelegen ist, dass die Strahlen S a und S' a' zusammenfallen. Verlängert man nun aber die von S und S' ausgehenden Strahlen über die zugehörigen Punkte hinaus, so schneiden sie sich in einer Punktreihe $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, deren Träger wiederum eine gerade Linie ist. Da nämlich (S. 147)

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a'\,c'}{b'\,c'} : \frac{a'\,d'}{b'\,d'}$$

und jedes dieser Doppelverhältnisse nach der Construction $= \frac{\alpha\,\gamma}{\beta\,\gamma} : \frac{\alpha\,\delta}{\beta\,\delta}$ ist,

so muss auch der Träger G der Punktreihe α β γ δ wiederum eine Gerade sein. Umgekehrt lässt es sich daher als die Bedingung für die Erzeugung einer Geraden ansehen, dass die einander zugeordneten oder homologen Strahlen von perspectivisch gelegenen Mittelpunkten S und S′ ausgehen müssen, wobei die perspectivische Lage dieser Mittelpunkte dadurch charakterisirt ist, dass ein Paar homologer Strahlen zusammenfällt. Wir

Fig. 12.

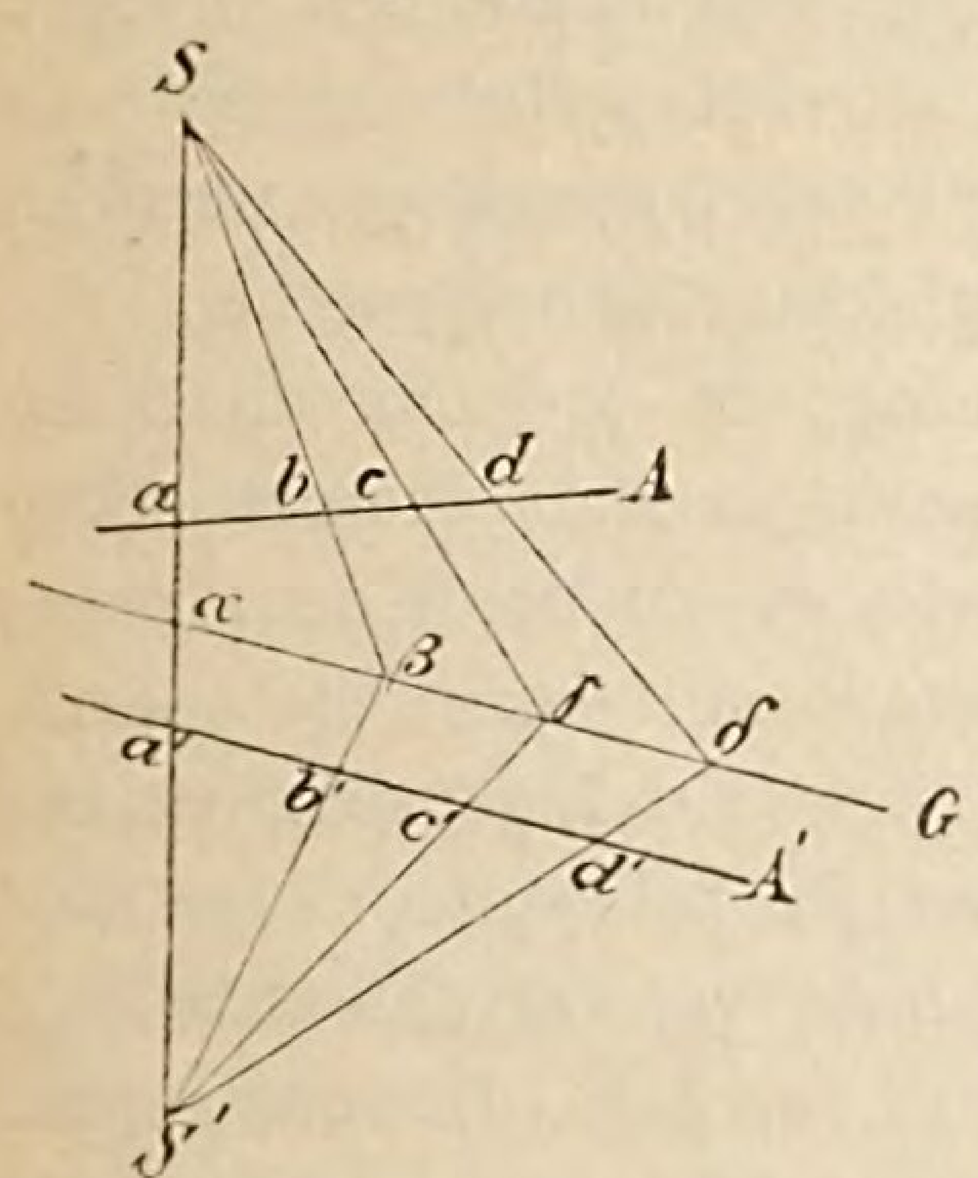
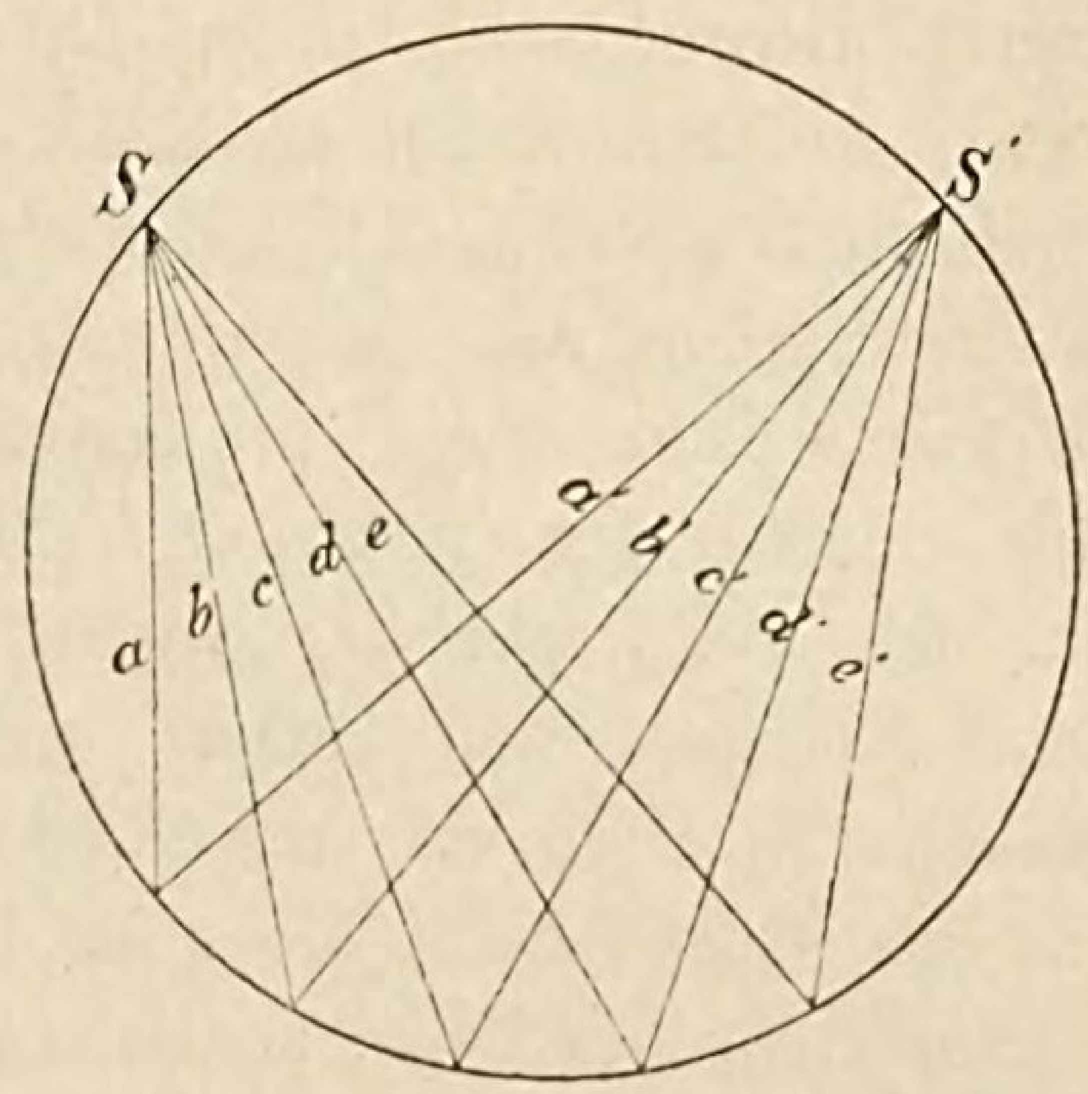


Fig. 13.

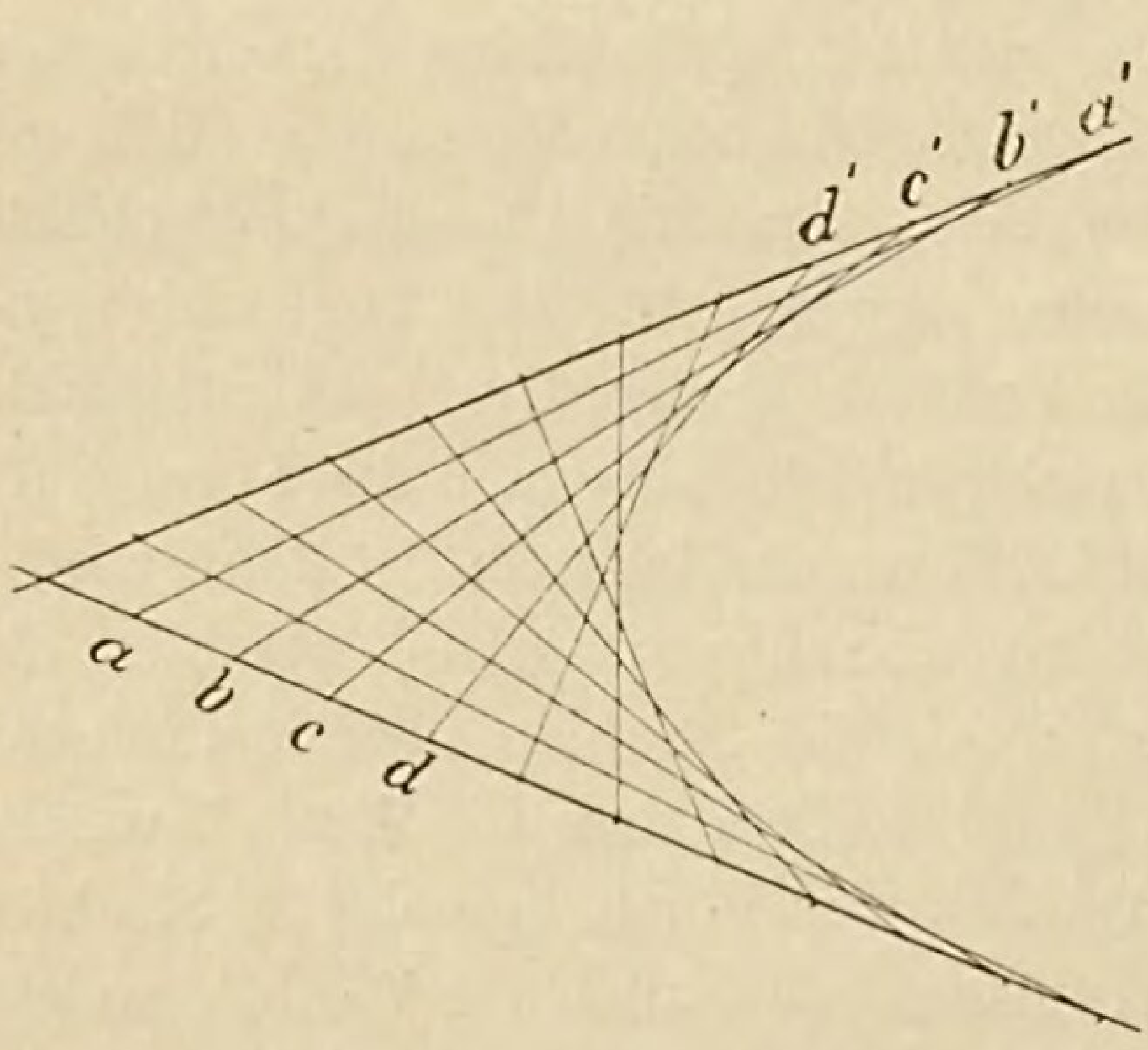


können uns nun aber auch den Träger A′ so aus seiner ursprünglichen Lage gebracht denken, dass diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Ist dies der Fall, befinden sich also die beiden ursprünglich perspectivischen Punktreihen in irgend einer nicht perspectivischen oder schiefen Lage, so wird auch nicht mehr zu erwarten sein, dass die Durchschnittspunkte homologer Strahlen auf einer Geraden liegen. In der That zeigt die nähere Untersuchung, dass hier die Verbindung der Durchschnittspunkte eine regelmässig gekrümmte Linie ergiebt, welche allgemein die Form eines Kegelschnitts besitzt. Die specielle Form des letzteren ist dann wieder von den Lagerungsverhältnissen der zu einander gehörigen Strahlen abhängig. So erhält man einen Kreis, wenn die Strahlen übereinstimmend gelegen sind und überdies die Bedingung erfüllen, dass die Winkel, welche je zwei Strahlen bei S bilden, den Winkeln der ihnen homologen Strahlen bei S′ gleich sind. In Folge dessen müssen dann auch die Winkel, welche die von jedem Curvenpunkt nach S und S′ gezogenen Geraden bilden, sämmtlich einander gleich sein (Fig. 13). Ist die zweite der obigen Bedingungen nicht erfüllt, so entsteht je nach der Lage, die man den Strahlbüscheln (bez. den ihnen entsprechenden perspectivischen Punktreihen) zu einander giebt, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wobei sich als specielle Fälle ein Punkt, eine Gerade oder zwei Gerade ergeben können. So lange die Strahlen nicht nur übereinstimmend laufen, sondern auch alle homologen Strahlen sich durchschneiden, entsteht eine Ellipse, da diese ausser dem

Kreis der einzige Kegelschnitt ist, welcher keinen unendlich entfernten Punkt hat. Ist nur ein einziges homologes Strahlenpaar parallel, so entsteht die Parabel, die nur einen unendlich entfernten Punkt hat. Sind endlich zwei Strahlenpaare parallel, so entsteht die Hyperbel mit ihren beiden zwei unendlich entfernten Punkten entsprechenden Zweigen. Dieser Fall kann auch dann sich ereignen, wenn die homologen Strahlen der beiden Strahlenbüschel nicht übereinstimmende Lage haben (nicht gleichlaufend sind). Hier gehören dann die Mittelpunkte derselben verschiedenen Zweigen der Hyperbel an. Der Durchschnitt nicht gleichlaufender Strahlen erzeugt darum auch unter allen Umständen eine Hyperbel. Theilt die letztere mit dem Kreise die Eigenschaft, dass die Winkel homologer Strahlen gleich sind, so entsteht der specielle Fall der gleichseitigen Hyperbel.

Abgesehen von der unmittelbaren Beziehung, in welcher diese Erzeugungsweisen durch projectivische Construction zu den geometrischen Eigenschaften der erzeugten Gebilde stehen, bietet die Methode den Vorzug dar, dass sie wegen der Einfachheit der Elemente, mit denen sie operirt, leicht Modificationen zulässt, welche geeignet sind, die Eigenschaften der erzeugten Gebilde von verschiedenen Seiten her zu beleuchten. So lässt sich eine Curve nicht bloss als Durchschnittsgebilde von Strahlenbüscheln in projectivischer Lage, sondern auch als Tangentengebilde construiren. Die Parabel z. B. hat die Eigenschaft, dass die zwischen äquidistanten Punkten irgend zweier Tangenten gezogenen Strahlen ebenfalls Tangenten sind. Demnach lässt sie sich als Umhüllungsgebilde zweier Strahlbüschel betrachten, die von zwei projectivisch-ähnlichen Punktreihen in nicht-perspectivischer Lage erzeugt werden (Fig. 14).

Fig. 14.




Aehnlich umhüllt aber überhaupt die Gesammtheit der Projectionsstrahlen zweier projectivischer Punktreihen eine Curve, welche mit jedem Projectionsstrahl nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat. Diese Curve ist ein Kegelschnitt, und die specielle Form desselben hängt von dem Lageverhältniss der beiden erzeugenden Punktreihen ab*). In dem Verhältniss dieser Erzeugungsweise zu der vorhin besprochenen tritt zugleich ein ergänzendes Verhältniss der constructiven Elemente zu einander hervor. Die nämliche Curve kann

*) Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, S. 91 f.

entweder als eine continuirliche Reihe von Punkten oder als eine continuirliche Reihe berührender Strahlen (Tangenten) betrachtet werden. Dort entsteht sie als Durchschnittsgebilde, hier als Umhüllungsgebilde. Im ersten Fall aber ist das ursprünglich erzeugende Gebilde das projectivische Strahlbüschel, im zweiten die projectivische Punktreihe. Diese ergänzende Beziehung, welche man auch als das Princip der Dualität der Gebilde bezeichnet, tritt in verschiedenen Gestaltungen auf. Wie in der Ebene die Punktreihe und das Strahlenbüschel sich ergänzen, so treten im Raum Punkt und Ebene als reciproke Gebilde einander gegenüber. Die Lage einer Geraden kann ebensowohl durch zwei Punkte wie durch zwei sich schneidende Ebenen bestimmt werden; im ersten Fall entsteht aber die Gerade als Bewegungsgebilde, im zweiten als Durchschneidungsgebilde. Ferner kann sowohl die Ebene wie der Punkt durch zwei Gerade oder die erstere durch eine Gerade und einen ausserhalb liegenden Punkt, der letztere durch eine Gerade und eine sie kreuzende Ebene oder endlich jene durch drei Punkte, dieser durch drei Ebenen bestimmt werden. Diese Constructionen zeigen zugleich die nahe Beziehung zwischen der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung und ihrer Erzeugung durch Durchschneidung. Einer Erzeugungsweise der ersten Art steht immer eine solche der zweiten dual gegenüber, und die eine wandelt sich in die andere um, wenn an die Stelle der erzeugenden Elemente andere treten, die zu ihnen in einem reciproken Verhältnisse stehen, bei Constructionen in der Ebene an die Stelle des Punktes die Gerade, bei Constructionen im Raum an die Stelle des Punktes die Ebene.

Insoweit die projectivischen Constructionen für sich selbst zur Entwicklung der Eigenschaften der betreffenden Raumgebilde nicht zureichen, pflegen sie unmittelbar auf gewisse Hülfsconstructionen hinzuweisen, welche auch hier ihre ergänzenden Dienste leisten. So lässt z. B. die Construction der Kegelschnitte als Durchschnittsgebilde projectivischer Strahlenbüschel unmittelbar ersehen, dass jeder Kegelschnitt durch fünf Punkte seines Umfangs vollständig bestimmt ist. Es gehören nämlich die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlenbüschel stets der Curve an, und ausserdem sind alle Strahlen durch das Doppelverhältniss bestimmt, sobald zu drei Strahlen $a\ b\ c$ die ihnen homologen $a'\ b'\ c'$ gegeben sind. Sucht man zu irgend welchen fünf Punkten eines Kegelschnitts durch Construction einen sechsten auf, so erhält man durch Verbindung dieser Punkte ein Sechseck, von dem schon Pascal die charakteristische Eigenschaft entdeckt hat, dass die gegenüberliegenden Seiten desselben in drei Punkten sich schneiden, welche in einer Geraden liegen. Es ist nun aber durch jene 6 Punkte zunächst nur die Form des vollständigen Sechsecks bestimmt, welches man (nach der Analogie des vollständigen Vierecks S. 147) erhält, wenn jeder Punkt mit jedem andern verbunden wird, und welches, da irgend ein Punkt $a$ mit jedem der 5 andern Punkte verbunden werden kann, mit jeder Verbindung aber die entgegengesetzt gerichtete

zusammenfällt, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Seiten hat. Aus diesem vollständigen Sechseck lässt sich wieder aus ähnlichen Gründen auf $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 60$ verschiedene Arten ein gewöhnliches Sechseck herstellen. Jedem dieser 60 Sechsecke entspricht aber eine Pascal'sche Gerade, und je drei solcher Geraden schneiden sich, wie Steiner gezeigt hat, in einem Punkt. So führt diese Hülfsconstruction, die selbst durch die Erzeugung der Curve an die Hand gegeben ist, in völlig naturgemässer Weise, ohne irgendwie zufällig entdeckte Kunstgriffe in Anspruch zu nehmen, zu einer Fülle charakteristischer Linien und Punkte, durch welche zusammengenommen mit den verschiedenen Erzeugungsformen die Eigenschaften der Curve erschöpfend bestimmt werden.

## 2. Die Anwendungen algebraischer Methoden auf die geometrische Untersuchung.

### a. Die algebraische und die analytische Geometrie.

Der Mangel einer algebraischen Symbolik hatte die antike Geometrie über ihr eigentliches Gebiet hinaus zu einer Vertreterin der allgemeinen Arithmetik erhoben. Die ausschliesslich metrische Richtung jener Geometrie, die hierin zum Theil ihre Quelle hatte, war ihrerseits wieder geeignet, diese Verbindung aufrecht zu erhalten und die Aufmerksamkeit von den besonderen Bedingungen abzulenken, welche die geometrischen Objecte den arithmetischen Verfahrungsweisen entgegenbringen. Hierdurch geschah es, dass bestimmte Zahlverknüpfungen stets auf fest bestimmte Raumverhältnisse bezogen wurden, indem man bei demjenigen geometrischen Bilde stehen blieb, welches die ursprünglichste Darstellung einer arithmetischen Operation gewesen war. Demgemäss betrachtete man allgemein die einfache Zahl als Mass einer linearen Strecke, das Product und die Quadratzahl repräsentirten eine ebene Fläche, das dreifache Product und die Cubikzahl einen Körper. Mehrfache Producte und höhere Potenzen als die dritte verloren überhaupt jede geometrische Bedeutung. Erst durch die freiere Bewegung, welche die Arithmetik in Folge der Erfindung der algebraischen Symbolik gewann, wurde diese Beschränkung beseitigt. Die entscheidende Leistung war hier Descartes' Geometrie. Der Titel derselben bezeichnet nur unzureichend ihren Inhalt. Denn indem sich der letztere gleichzeitig auf die allgemeine Untersuchung der algebraischen Gleichungen erstreckt, ist es einerseits die freiere geometrische Verwendung der arithmetischen Operationen, anderseits die synthetische Ableitung und analytische Untersuchung der algebraischen Formen, die sich der Verfasser zum Ziel setzt. So wurde dieses Werk gleichzeitig die Grundlage

der neueren Geometrie und der Analysis*). Den Weg zu seiner Behandlung der Geometrie bahnt sich aber Descartes, indem er den arithmetischen Fundamentaloperationen eine solche geometrische Deutung giebt, dass nicht bloss die ursprünglichen Grössen gerade Linien sind, sondern dass auch die Ergebnisse der mit denselben vorgenommenen Operationen wiederum als gerade Linien erscheinen. So verwendet er zur Darstellung der Multiplication und Division die Construction ähnlicher Dreiecke. In diesen lässt sich, sobald man eine der Seiten der Einheit gleich setzt, eine Proportion bilden von der Form $a : b = c : 1$, welche algebraisch den Gleichungen $a = b \cdot c$ und $b = \frac{a}{c}$, also einer Muliplication und Division entspricht. Construirt man mit Zuhülfenahme des Kreises die mittlere Proportionale zwischen der Einheit und einer anderen Geraden, welche die Einheit zum Durchmesser ergänzt, so erhält die mittlere Proportionale die Bedeutung der Quadratwurzel aus der zweiten Geraden, oder diese ist gleich dem Quadrate der ersteren. Da nun dies Verfahren von den so gefundenen Linien ausgehend beliebig oft wiederholt werden kann, so steht nichts im Wege, eine dritte, vierte oder höhere Potenz in der Form einer Geraden zu construiren. Hatten die Alten alle Curven höherer Grade als »mechanische Linien« (weil sie durch gewisse mechanische Vorrichtungen und Bewegungen erzeugt werden konnten) von den geometrischen unterschieden, so gewinnt nun der Begriff der geometrischen Curven bei Descartes einen grösseren Umfang und zugleich eine analytische Bedeutung. Eine geometrische Curve ist ihm jede, die sich schliesslich auf bestimmte Relationen einer begrenzten Anzahl gerader Linien zurückführen lässt. Wo dies nicht mehr der Fall ist, wo also die Relationen der Geraden, die als die Erzeuger der Curven angesehen werden können, irgendwie veränderlich sind, da ist auch für Descartes die Linie keine geometrische mehr. Der Begriff der geometrischen Curve geht also nun vollständig parallel demjenigen der algebraischen Gleichung, und in dem Gebiet der »mechanischen Curven« verbleiben alle diejenigen Gebilde, deren Untersuchung nicht durch die einfachen arithmetischen Operationen und ihre Wiederholungen erledigt werden kann, sondern auf eine unbegrenzte Zahl solcher Operationen, d. h. auf transscendente Functionen zurückführt. Auf diese Weise tritt hier zum ersten Mal die Unterscheidung der algebraischen und der transscendenten Curven in die Entwicklung der Geometrie ein, freilich in noch unvollkommener Gestalt und nur mit sicherer Abgrenzung der ersteren. Jene noch heute gebrauchte Bezeichnung rührt erst von Leibniz her, welcher damit zugleich die Beschränkung der Cartesianischen Geometrie endgültig beseitigte. Ihrem Ausgangspunkte gemäss

*) Die letztere Bedeutung hat, der in den historischen Darstellungen herkömmlichen Auffassung gegenüber, mit Recht schon L. Liard hervorgehoben. Revue philos., Déc. 1880, p. 586.

war die letztere noch durchaus eine algebraische Geometrie gewesen. Als solche benützte sie die Algebra für die Geometrie, behandelte aber diese nur insoweit, als die elementaren algebraischen Methoden verwendbar sind; anderseits machte sie nicht minder die Geometrie der Algebra dienstbar, indem einer ihrer wesentlichsten Zwecke darin bestand, die anschauliche Bedeutung algebraischer Gleichungen nachzuweisen und dadurch über deren Entstehungsbedingungen Rechenschaft zu geben. Diesem algebraischen Charakter entspricht es, dass die Constructionen überall dem einzelnen Fall angepasst sind. Bei der Untersuchung einer Curve werden diejenigen Hülfslinien gezogen, welche am einfachsten zu einem algebraischen Ausdruck für dieselbe führen. Solche Hülfslinien sind aber naturgemäss wechselnder Art, und es existiren daher, abgesehen von den Fällen, in denen sich ein einzelnes Problem selbst schon auf mehrere Curven bezieht, keine zwingenden Gründe zu einer gleichförmigen Rückbeziehung der untersuchten Gebilde auf ein System gerader Linien von unveränderlicher Lage.

Der Uebergang von der algebraischen zur analytischen Geometrie vollzog sich theils in Folge der Ausdehnung der analytischen Behandlung auf transscendente Curven und auf den Raum von drei Dimensionen, theils unter dem Einfluss der Anwendungen der Geometrie auf die Mechanik. Die hier sich ergebenden Aufgaben machten einen festen Ausgangspunkt für die bestimmenden Geraden wünschenswerth. Die analytische Geometrie wurde daher zur Coordinatengeometrie. Indem die letztere die Geraden, durch deren Relationen die Eigenschaften der Raumgebilde gemessen werden, mit bestimmten Richtungen des Raumes zusammenfallen lässt, legt sie ihren Entwicklungen den mathematischen Raumbegriff in seiner abstractesten Form zu Grunde. Die Gleichungen, die als analytische Ausdrücke bestimmter Raumgebilde auftreten, besitzen darum den logischen Charakter von Definitionen, welche die einzelnen geometrischen Begriffe mit dem allgemeinen Raumbegriff in unmittelbare Beziehung bringen. Durch die Gleichung einer Raumcurve wird diese nach drei von einem festen Anfangspunkt ausgehenden Richtungen, die meist senkrecht zu einander gewählt werden, zerlegt, indem man feststellt, wie gross der einem bestimmten Fortschritt in der Richtung X entsprechende Fortschritt in den zwei andern Richtungen Y und Z ist. Das Verfahren ist also auch im logischen Sinne ein analytisches, und zugleich ist in demselben die Vorstellung der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung enthalten. Gerade desshalb liegt hier der Uebergang von der Geometrie zur Mechanik so nahe. In der That kommt es häufig nur auf die Interpretation der Symbole einer Gleichung an, ob man ihr eine geometrische oder eine mechanische Deutung geben will. Die Mechanik erscheint dabei als ein der Geometrie untergeordnetes Gebiet, insofern unter den zahllosen Raumgebilden, die überhaupt möglich sind, einzelne durch die in der Natur wirksamen Bewegungsgesetze erzeugt werden. Von den Methoden der

antiken Geometrie entfernt sich aber die analytische Behandlung weit mehr als die algebraische Geometrie Descartes', da die Beziehung auf ein festes Coordinatensystem die Anwendung besonderer, nach der Natur der untersuchten Gebilde wechselnder Constructionen völlig entbehrlich macht. Darum kann nun auch hier die Untersuchung in völlig abstracter Weise geführt werden. Weil die Hülfsconstructionen bei der Untersuchung entbehrlich sind, so werden schliesslich die geometrischen Objecte selber entbehrlich. An ihre Stelle treten die Gleichungen, an die Stelle der Hülfsconstructionen die passenden Transformationen der Gleichungen. Den Vortheilen, welche diese Verwerthung der analytischen Hülfsmittel bietet, stehen die geringe Anschaulichkeit der Resultate und nicht selten, wegen des Verzichts auf Constructionen, die den besonderen Erfordernissen des Falles entsprechen, die Schwerfälligkeit der Rechnung als Nachtheile gegenüber. Diese letzteren sind es denn auch, die in der neueren Zeit zu einer weiteren Form der Verwerthung algebraischer Methoden geführt haben, welche wir als die Methode der geometrischen Analysis bezeichnen wollen.

### b. Die geometrische Analysis.

Die geometrische Analysis, die einen wesentlichen Bestandtheil der synthetischen Geometrie bildet, sucht — wie ihr Name dies andeutet — das Verhältniss umzukehren, in welches innerhalb der analytischen Geometrie Analysis und Geometrie zu einander getreten sind. Während in dieser das analytische Verfahren vollständig die geometrische Anschauung beherrscht, sucht jene die Ausübung der algebraischen Methoden den specifischen Verhältnissen räumlicher Objecte anzupassen, ebenso wie in ihr die geometrischen Constructionsmethoden den concreten Objecten angepasst sind. Auf der innigen Verwebung naturgemässer Constructionen und algebraischer Betrachtungen beruht daher der eigenthümliche Charakter dieser Geometrie. Auch sie will der Verwerthung algebraischer Methoden keineswegs verlustig gehen; aber sie sucht diese Verwerthung fruchtbarer zu machen, indem sie an der algebraischen Symbolik diejenigen Veränderungen vornimmt, die den Eigenthümlichkeiten der Raumanschauung entsprechen. Die Berechtigung eines solchen Verfahrens ergiebt sich einfach daraus, dass die algebraische Symbolik in ihrer allgemein gebrauchten Form auf rein arithmetischem Boden ruht. Sowohl die algebraische wie die analytische Geometrie haben dieses Verhältniss unverändert gelassen, da bei beiden Formen noch immer der metrische Gesichtspunkt vorwaltet. Dies musste von selbst anders werden, als die Lagebeziehungen der geometrischen Objecte in den Vordergrund traten. Denn es musste hier sogleich die Frage entstehen, ob nicht die arithmetischen Fundamentaloperationen, angewandt auf eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, nothwendig Aenderungen erfahren, sobald man nicht bloss auf die Grösse,

sondern auch auf die Lage und Richtung des Ausgedehnten Rücksicht nimmt.

Da bei jeder Art geometrischer Untersuchung ausgedehnte Gebilde von verschiedener Form auf die Gerade zurückgeführt werden können, so bietet sie sich auch bei der geometrischen Analyse als nächstes Object dar. Rein metrisch betrachtet sind zwei Gerade einander gleich, wenn sie gleich lang sind. Auf dieser Voraussetzung ruht daher sowohl die antike wie die analytische Geometrie, und so betrachtet unterscheidet sich die Gerade nicht von beliebigen andern durch Zahlen messbaren Objecten. Nehmen wir dagegen bei der Definition der Gleichheit auf die specifischen Eigenthümlichkeiten des Raumes Rücksicht, so werden wir gleich zwei Gerade nur dann nennen, wenn sie nicht nur gleiche Länge, sondern auch gleiche Lage und Richtung haben. Von gleicher Lage sind sie aber, wenn sie einander parallel sind (worin zugleich der Specialfall, dass die eine in der Verlängerung der andern liegt, eingeschlossen ist). Gleiche Richtung haben sie, wenn alle entsprechenden Punkte der einen von den entsprechenden Punkten der andern gleich weit entfernt sind, wenn also z. B. zwischen den Anfangspunkten A und A′ der Geraden A B und A′ B′ die Distanz die gleiche ist wie zwischen den um eine je gleiche Strecke von ihnen entfernten Punkten B und B′. Diese Definition der Gleichheit vorausgesetzt ergeben sich nun die Modificationen, welche die vier arithmetischen Elementaroperationen in ihrer Anwendung auf gerade Strecken erfahren müssen, mit logischer Nothwendigkeit. Bezeichnen wir nämlich in gewohnter Weise die Geraden durch ihre Anfangs- und Endpunkte, also durch A B, B C die Strecken zwischen den Punkten A und B, B und C, so gelten für die Addition von Strecken gleicher Lage folgende Gesetze:

$$AB = -BA, \quad AB + BA = 0,$$
$$AB + BC = AC, \quad AB + BC + CA = 0.$$

Haben zwei Strecken A B und B′ C irgend eine andere Lage, so lässt sich die zweite B′ C ohne Aenderung der Gleichheit sich selbst parallel verschieben, bis B′ mit B zusammenfällt, und es ist dann

$$AB + BC = AC \text{ und } AB - BC = CA = -AC,$$

d. h. sowohl die Summe wie die Differenz zweier Geraden, die einen Winkel mit einander bilden, wird durch eine dritte Gerade dargestellt, welche beide zu einem Dreieck ergänzt; diese dritte Gerade erhält aber im zweiten Fall eine entgegengesetzte Richtung.

Eine Multiplication und Division von Geraden werden nun dann entstehen, wenn Strecken in ihrem Verhältnisse zu einander betrachtet werden, wobei unter diesem Verhältniss wiederum nicht bloss das der Länge, sondern auch das der Lage und Richtung zu verstehen ist. Sind z. B. vier Strecken a, b, c, d so zu einander gelagert und gerichtet, dass die Proportion besteht

$$a : b = c : d,$$

so wird, wenn man d zur Einheit nimmt, $a = b \, . \, c$, oder, wenn man $c = 1$ setzt, $a = \frac{b}{d}$. Dort wird also die Strecke a gleich dem Product, hier gleich dem Quotienten zweier anderen. Diese Multiplication und Division ist der von Descartes angewandten durchaus ähnlich: hier wie dort wird auf eine Proportion zwischen Strecken zurückgegangen, von denen eine der Einheit gleich gesetzt ist. In beiden Fällen lässt sich daher durch zwei ähnliche Dreiecke der Gleichung Genüge leisten. Aber während es bei Descartes nur auf die Länge der Strecken ankam, bezieht sich hier die Proportion zugleich auf die Richtung und Lage derselben, und es vermehren sich auf diese Weise, entsprechend der mit dem Begriff der Gleichheit vorgenommenen Veränderung, die Elemente, welche den Begriff der Aehnlichkeit zusammensetzen.

Der Gesichtspunkt der geometrischen Analyse, der diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, gestattet es jedoch nicht, bei der Geraden stehen zu bleiben, sondern er fordert die Anwendung auf das letzte Element aller Raumconstructionen, auf den Punkt. Lässt dieser für eine rein metrische Betrachtung keine weitere Bestimmung zu, so ist dagegen eine Bestimmung der Lage desselben immer möglich. Da auf Lagebeziehungen von Punkten schliesslich alle andern geometrischen Verhältnisse sich zurückführen lassen, so muss dann von den in Bezug auf Punkte ausführbaren Operationen auch ein Uebergang zur Geraden, zur Ebene und zum dreifach ausgedehnten Raumgebilde zu gewinnen sein. Denken wir uns demgemäss, die für irgend zwei von einander entfernte Punkte gewählten Symbole $\alpha$ und $\beta$ bezeichneten gleichzeitig die Lage dieser Punkte, so wird ein genau in der Mitte zwischen $\alpha$ und $\beta$ gelegener Punkt $\gamma$ hinsichtlich seiner Lage in Bezug auf die ersteren bestimmt sein durch die Gleichung

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ oder } \alpha + \beta = 2\gamma.$$

Als die Summe zweier Punkte erscheint also deren doppelt genommener Mittelpunkt. Diese Relation wird auch für Verbände von Punkten, z. B. für m Punkte $\alpha$ und für n Punkte $\beta$ gelten, indem

$$m\,\alpha + n\,\beta = (m + n)\,\gamma$$

ist, eine Beziehung, in welcher der Mittelpunkt zweier Punktsysteme einem Schwerpunkt analog erscheint*). Von dem der Addition zu Grunde liegenden Princip aus lässt sich aber offenbar auch die Addition eines Punktes und einer geradlinigen Strecke vollziehen. Denken wir uns den Punkt $\beta$ von $\alpha$ um die Strecke a entfernt, so wird sich $\beta$ als hervorgegangen aus einer Addition von a zu $\alpha$ betrachten lassen:

---

*) Die erste fruchtbare Verwerthung dieses Gedankens hat Moebius gegeben in seinem Werke: Der barycentrische Calcül, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827.

$$\alpha + a = \beta \text{ oder } \alpha - \beta = a \text{ und } \beta - \alpha = - a.$$

Als Differenz zweier Punkte erscheint demnach in Bezug auf Grösse, Lage und Richtung die zwischen beiden gelegene geradlinige Strecke*). Die nämliche Strecke entspricht aber dem Product der beiden Endpunkte. Es ist also

$$\alpha . \beta = - \beta . \alpha = \beta - \alpha.$$

Man übersieht leicht, dass in Verfolgung dieses Satzes das Product dreier Punkte zu einem ebenen Gebilde wird, welches nach Grösse und Lage dem doppelten Flächeninhalt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks gleichkommt. In ähnlicher Weise wird das Product von vier Punkten ein dreifach ausgedehntes Raumgebilde, nämlich das durch die drei Punkte als Eckpunkte bestimmte Parallelepiped.

Es versteht sich von selbst, dass diese Betrachtungen noch erweitert werden können, wenn man an Stelle des Raumes den allgemeinen Begriff der Ausdehnung setzt, wie solches von Grassmann geschehen ist. Anderseits lassen sich die hier festgestellten Gesetze der Elementaroperationen ohne Rücksicht auf ihren geometrischen Ursprung als abstracte Zahlgesetze behandeln, wobei man dann den Begriff der betreffenden Zahlsysteme durch diese Gesetze selbst erst bestimmt sein lässt. So ersieht man unmittelbar, dass die oben besprochene geometrische Addition von Strecken vollkommen der Addition complexer Zahlen entspricht, und ähnlich lassen sich die übrigen Elementaroperationen aus der geometrischen Analyse auf das System der gewöhnlichen complexen Zahlen übertragen. Wenn aber die Multiplication incommutativ wird, so nehmen die Zahlen die Eigenschaften der Quaternionen an, welche ebenfalls, unabhängig von ihrer geometrischen Bedeutung, als reine Zahlenbegriffe, definirt durch die Beziehungen der drei imaginären Einheiten, betrachtet werden können (S. 124). Es wiederholt sich darin nur eine Entwicklung, die schon dem gewöhnlichen Zahlbegriff zu Grunde liegt. Die Zahl ist stets die letzte, abstracteste Form der mathematischen Auffassung. Wir abstrahiren bei ihr völlig von den realen Objecten und ihren Verhältnissen. Gerade der Fall der geometrischen Analyse zeigt aber deutlich, dass neue fruchtbringende Umgestaltungen des Zahlbegriffs stets gebunden sind an die wirkliche Anschauung. In dieser Beziehung treffen darum auch die complexen Zahlsysteme und die Methoden der geometrischen Analyse von entgegengesetzten Seiten her beim nämlichen Ziel zusammen. Dort findet es sich, dass Ergebnisse, zu denen man in der consequenten Verfolgung der arithmetischen Operationen gelangt, eine Bedeutung nur gewinnen können, wenn man den Begriff der Zahl in dem Sinne erweitert, dass sie nicht bloss die Grösse, sondern auch die Richtung und Lage der Objecte zu messen im Stande ist. Hier zeigt es sich, dass für die arithmetischen Operationen in ihrer Anwendung

---

*) H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844, 2. Aufl., S. 131 f.

auf ausgedehnte Gebilde, d. h. auf Objecte von verschiedener Grösse, Richtung und Lage, Modificationen erforderlich werden, welche sie selbst und damit auch die zu Grunde liegenden Zahlbegriffe verändern. Auf solche Weise begegnen sich beide Begriffserweiterungen, und dieses Zusammentreffen zeigt deutlich, dass es sich hier nicht um willkürliche Erfindungen, sondern um eine naturgemässe Entwicklung handelt, die aus den dem Zahlbegriff wie der geometrischen Anschauung immanenten Eigenschaften heraus sich vollzogen hat.

---

## Viertes Capitel.

# Der Functionsbegriff und die Infinitesimalmethode.

## 1. Die analytischen Functionen.

### a. Die Entwicklung des Begriffs der Function.

Der Begriff der Function ist der älteren Mathematik unbekannt; in der neueren aber hat er eine immer umfassendere Bedeutung gewonnen: er ist der herrschende Begriff der Analysis und durch sie der ganzen Mathematik geworden. Aus der Erfindung der algebraischen Symbolik in naturgemässer Entwicklung hervorgegangen, hat er in der Anwendung der algebraischen Methoden auf die Geometrie seine nächste Quelle. Indem Descartes' Geometrie die Untersuchung der geometrischen Objecte auf die Massbeziehungen gerader Linien zurückführte, deren Zahl für die Ebene gleich zwei und für den Raum gleich drei ist, operirt sie mit dem Begriff der Function, wenn ihr auch dieser Name noch mangelt. In die Gleichung einer ebenen Curve gehen neben constanten Grössen die beiden bestimmenden Geraden x und y als veränderliche ein. Da aber jedem Werthe der einen Veränderlichen x ein bestimmter Werth oder eine Anzahl bestimmter Werthe der andern Veränderlichen y entspricht, so erscheint hier y als Function von x. Der Begriff der Function hat also in dieser seiner nächsten Anwendung die Bedeutung, dass er die Abhängigkeit einer Grösse von einer andern oder von einer Mehrheit anderer Grössen bezeichnet, deren Veränderungen nach einem vorgezeichneten Gesetze erfolgen. Dieses Gesetz findet geometrisch in einer Curve, analytisch in der zugehörigen Gleichung seinen Ausdruck. Stets wird dabei die abhängig Veränderliche y selbst als Function aufgefasst, und die unabhängig Veränderlichen x, z, bei deren Variation y alle für dasselbe möglichen Werthe durchläuft, sind die Argumente dieser Function. Vermöge des beschränkten Gesichtskreises der Cartesianischen

Geometrie kamen aber in ihr zunächst nur solche Gleichungen in Frage, in welchen alle Grössenverbindungen aus einer begrenzten Zahl und Reihenfolge der vier arithmetischen Fundamentaloperationen hervorgehen, und es war überdies stillschweigend vorausgesetzt, dass zwar jede beliebige andere Grösse, niemals aber ein Divisor gleich Null werden könne. Auf diese Weise verengte sich der Begriff der Function zu demjenigen der algebraischen Function.

Erst Leibniz führte in die analytische Geometrie den Namen transscendente Curven ausdrücklich desshalb ein, weil die Probleme, die sich auf solche Curven beziehen, die Hülfsmittel der Algebra übersteigen, oder weil mit andern Worten die in den Gleichungen derselben darzustellenden Grössenbeziehungen nicht durch eine beschränkte Anzahl von Additionen, Multiplicationen, Subtractionen und Divisionen sich erledigen lassen*). Hat z. B. die Function die Form $y = a^x$, so gestattet dieser Ausdruck nur dann eine genaue Berechnung von y durch eine beschränkte Zahl von Anwendungen der arithmetischen Elementaroperationen, wenn für x ein bestimmter rationaler Zahlenwerth angenommen wird. Da dies aber bei der allgemeinen Form der Function nicht der Fall ist, sondern hier für x jede beliebige irrationale Zahl eintreten kann, so ist es klar, dass eine allgemeingültige Beziehung der beiden Veränderlichen x und y auf algebraischem Wege nicht herzustellen ist. Aehnlich verhält es sich mit den Functionen

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tang} x,\ y = \operatorname{cotang} x.$$

Bei der Function $y = \sin x$ nimmt x von null an stetig zu, indem es die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$ u. s. w. durchläuft, während dessen wechselt aber y periodisch und stetig zwischen $0, +1, 0, -1, 0$. Bei der Function $y = \operatorname{tang} x$ wechselt bei stetig wachsendem x der Werth von y zwischen $0, +\infty, 0, -\infty, 0$. Auch hier lässt sich die Beziehung zwischen x und y nicht in allgemeingültiger Weise durch eine begrenzte Zahl arithmetischer Operationen zum Ausdruck bringen. Nichts desto weniger entsprechen nicht nur allen diesen Gleichungen geometrische Gebilde von ebenso strenger Gesetzmässigkeit wie die algebraischen Curven, sondern es verändern sich auch die in Beziehung gesetzten Grössen, abgesehen von den speciellen Fällen, wo die Function unendlich wird, in gleicher Weise mit einander.

Es können nun aber ausserdem bei jeder derartigen Beziehung Eigenschaften der veränderlichen Grössen vorausgesetzt werden, vermöge deren eine Stetigkeit der Veränderung nicht mehr möglich ist, und also auch die geometrische Darstellbarkeit der Function mittelst einer zusammenhängenden Curve hinwegfällt. Dies geschieht, sobald man annimmt, dass die ursprünglich veränderlichen Grössen, die in irgend einem algebraischen

*) Leibniz, Mathematische Werke, herausg. von Gerhardt, V, S. 228.

oder transscendenten Ausdruck vorkommen, die Bedeutung ganzer Zahlen besitzen. Es werden sich dann offenbar die einzelnen Werthe von y, die in dem Ausdruck y = f (x) den einzelnen Zahlwerthen von x correspondiren, nicht mehr continuirlich, sondern sprungweise ändern. Der Begriff der Function gewinnt hier die Bedeutung eines Zahlengesetzes, und es kann daher der so verengte Begriff speciell als der zahlentheoretische Functionsbegriff bezeichnet werden. Hat dagegen die Unstetigkeit nicht in der Voraussetzung eines unstetigen Wachsthums der Veränderlichen, sondern in der Natur der Function selbst ihren Grund, indem plötzliche Sprünge für beliebig kleine Veränderungen des Arguments vorkommen, so ist an denjenigen Stellen, an welchen der Verlauf der Function durch solche Unstetigkeiten unterbrochen ist, eine nähere Untersuchung derselben unmöglich. Denn diese Untersuchung kann sich immer nur darauf beziehen, dass man zu einer gegebenen Veränderung des Argumentes die zugehörige Veränderung der Function nachweist; in demjenigen Intervall, in welchem der Verlauf der Function ein unstetiger, ist aber ein solcher Nachweis offenbar nicht möglich. Aus diesem Grunde ist die Stetigkeit der Veränderung ein nothwendiges Kriterium der analytischen Function. Zugleich ist es klar, dass der allgemeine Begriff der letzteren auch den zahlentheoretischen Begriff der Function, in welchem die Stetigkeit nicht vorausgesetzt wird, insofern in sich schliesst, als die Annahme, dass die Veränderlichen ganze Zahlen bedeuten sollen, eine willkürlich eingeführte Beschränkung ist. Die zahlentheoretische Function geht im allgemeinen in eine analytische Function über, welche statt des Zahlengesetzes eine Beziehung zwischen stetig veränderlichen Grössen darstellt, sobald man jene beschränkende Voraussetzung aufgiebt und an die Stelle des engeren den allgemeineren Zahlbegriff treten lässt, welcher mit dem Begriff der stetigen Grösse identisch ist.

In logischer Beziehung lässt sich demnach der Begriff der Function als diejenige Umgestaltung betrachten, welche der Begriff der logischen Abhängigkeit in der Anwendung auf den allgemeinen Grössenbegriff erfahren muss. Bei dem allgemeinen Verhältniss von Bedingung und Folge bleibt es völlig dahingestellt, ob die Glieder desselben überhaupt sich begleitenden Veränderungen unterworfen sind, und ob solche, wenn sie erfolgen, einen stetigen Charakter besitzen. Wo die logische Symbolik das Functionszeichen anwendet, da giebt sie daher ihrerseits demselben eine erweiterte Bedeutung. Die algebraische Symbolik dagegen, welche unter ihren Zahlsymbolen gerade dann, wenn sie ihnen die allgemeinste Bedeutung giebt, continuirliche Grössen denkt, muss in die Abhängigkeitsbeziehung einerseits den Begriff der Veränderung und anderseits den der Stetigkeit aufnehmen. Denn die Abhängigkeit zweier Zahlen kann überhaupt nur darin bestehen, dass die Veränderungen der einen von den Veränderungen der andern bedingt sind, und eine feste Beziehung zwischen diesen Veränderungen lässt sich nur dann erkennen,

wenn im allgemeinen (von einzelnen Unstetigkeiten abgesehen) der stetigen Veränderung der ursprünglich veränderlichen Grösse eine stetige Veränderung der abhängig veränderlichen entspricht. Wenn daher Johann Bernoulli, der Urheber des Ausdrucks »Function«, dieselbe allgemein als eine Abhängigkeit zwischen Grössen definirte, so war dieser Begriff zu weit und unbestimmt*). Denn es fehlte darin jenes Merkmal der Stetigkeit, durch welches der mathematische Begriff der Function sich scheidet von dem allgemeineren der logischen Folge. Wir nennen aber eine Grösse x stetig veränderlich, wenn sie bei der Zunahme um einen Werth $+ \delta$, sowie bei der Abnahme um einen Werth $- \delta$ stets Werthe durchläuft, die zwischen x und $x + \delta$ und zwischen x und $x - \delta$ in der Mitte liegen, auch wenn man $\delta$ so klein wählt als man will. (Vgl. oben S. 120.) Demgemäss werden wir eine Function $y = f(x)$ dann eine stetige nennen, wenn nicht nur für jede der Grössen x und y an und für sich die obige Bedingung zutrifft, sondern wenn auch ausserdem die abhängige Variable y nur dann um ein messbares Intervall sich verändert, wenn auch x sich um ein messbares Intervall verändert, während für jede Veränderung von x, die kleiner ist als irgend eine messbare Zahl $\delta$, die beliebig klein gewählt werden mag, auch y keine Veränderung erfährt, die irgend einer messbaren Zahl gleichkommt. Diese Definition der Stetigkeit einer Function führt unmittelbar zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung, bei deren Erörterung wir daher den Begriff der stetig veränderlichen Grösse nach seinen verschiedenen Richtungen weiter verfolgen werden**).

Während so der Begriff der Function durch die Bedingung der Stetigkeit enger begrenzt wird, erfährt er dagegen in Folge der Anwendungen auf complexe Grössen und die damit verbundene Unterscheidung ein- und vieldeutiger Functionen eine bemerkenswerthe Erweiterung. In der Gleichung $y = f(x)$ kann jedem einzelnen Werthe des Argumentes x ein einzelner oder eine fest bestimmte Anzahl einzelner Werthe von y entsprechen: dann nennt man die Function eine eindeutige. In dieser Weise eindeutig sind stets die Functionen reeller Grössen. Eine algebraische Gleichung nten Grades liefert zwar zu jedem Werthe von x n Werthe von y, aber diese bezeichnen hier n von einander isolirte Punkte, welche zusammengehörigen Werthen von x und y entsprechen, und die Function selbst bleibt immer durch eine einzige Curve darstellbar. Mehrdeutig dagegen kann eine Function nur dann genannt werden, wenn dem Ausdruck $y = f(x)$ innerhalb gewisser Grenzen ein ganz verschiedener

*) Joh. Bernoulli, Opera omnia, t. II, p. 241.

**) Als äusseres Kriterium der Stetigkeit einer Function betrachtet man in der That im allgemeinen ihre Differenzirbarkeit. Doch hat Weierstrass gezeigt, dass gewisse zusammengesetzte Sinus- und Cosinusfunctionen zwar stetig, aber nicht differenzirbar sind. Vgl. P. du Bois Reymond, Crelle's Journ. f. Math., Bd. 29, S. 21.

Verlauf der zu einer continuirlichen Aenderung von x gehörigen Werthe von y entspricht, wenn also jene Gleichung durch zwei oder mehr aus einander fallende Curven dargestellt werden kann. Dieser Fall tritt nun im allgemeinen stets dann ein, wenn die Argumente der Function complexe Zahlen sind. Eine reelle Variable x findet, wie wir sahen, ihre Darstellung in einer geraden Linie. Zwischen zwei von einander entfernten Punkten a und b einer Geraden liegt aber immer nur eine Reihe stetig auf einander folgender Punkte. Wenn a und b gegeben sind, so ist darum auch der ganze Verlauf der Linie x gegeben, und in der Gleichung $y = f(x)$ sind die Werthe von y den correspondirenden Werthen von x eindeutig zugeordnet. Hat dagegen die Function die Form

$$z = f(x + iy),$$

so entspricht zwar hier ebenfalls jeder einzelne Werth des complexen Argumentes einem Punkt in der Ebene; die Gesammtheit der stetig auf einander folgenden Punkte, welche das Wachsthum des Argumentes versinnlichen, braucht aber nicht in einer Geraden zu liegen, sondern da jeder Punkt durch die zwei zu einander senkrechten Geraden x und y als Coordinaten bestimmt ist, so kann das Wachsthum des Argumentes einer beliebig veränderlichen Curve oder einer aus geraden und gekrümmten Theilen beliebig zusammengesetzten Linie entsprechen. Zwischen zwei bestimmten Werthen a und b eines complexen Argumentes sind demnach auch unendlich viele Uebergänge möglich, und jedem dieser Uebergänge wird im allgemeinen ein anderer Verlauf der Function z entsprechen. Sind a und b als Anfangs- und Endpunkt der Function gegeben, so werden dieselben Verzweigungspunkte darstellen, zwischen denen der Uebergang durch eine unendliche Schaar stetiger oder gebrochener Linien vermittelt werden kann. Geometrisch lässt aber offenbar das Verhältniss der Functionen mit complexen zu solchen mit reellen Argumenten auch so sich auffassen, dass an die Stelle der Geraden, welche hier stets das bestimmende Grundelement ist, dort eine veränderliche Linie tritt, dass also das geradlinige durch ein anderes Coordinatensystem ersetzt wird. Das letzte Element, von dem man irgend ein krummliniges Coordinatensystem abhängig denkt, muss freilich auch hier die Gerade bleiben, da jede Richtung und Richtungsänderung immer wieder durch die Rückbeziehung auf gerade Linien von gegebener Richtung bestimmt werden muss. In der That hat ja jeder einzelne der beiden Theile x und iy, aus denen ein complexes Argument besteht, die Bedeutung einer stetig veränderlichen Geraden. In dieser Beziehung sind also die Functionen complexer Variabeln im eigentlichsten Sinne Functionen höherer Ordnung. Sie setzen eine Functionsbeziehung zwischen den Theilen ihrer complexen Argumente bereits voraus. Aber indem der allgemeine Ausdruck einer Function complexer Variabler jene Beziehung zunächst unbestimmt lässt, entspricht jedem einzelnen Werthe von x eine unendliche Menge von Werthen iy; auch die Function $z = f(x + iy)$ hat daher zu ihrem geometrischen Bilde nicht eine

Curve, sondern eine Fläche, welche von der Ebene, auf der sich der Punkt $x + iy$ bewegt, abhängig ist, und es kommt nun auf besondere Bedingungen an, ob zwischen gewissen Grenzen zu jedem Werthe von x auch nur ein Werth von $iy$ gehört oder nicht. Ist ersteres der Fall, so wird die Function eindeutig, und es entspricht ihr nur noch eine einzige unter der unendlichen Zahl von Curven, die in der Fläche der mehrdeutigen Function zwischen deren Grenzwerthen a und b möglich sind.

Die mathematischen Umgestaltungen des Zahlbegriffs haben hiernach einerseits eine Verengerung, anderseits eine Erweiterung des Begriffs der Function herbeigeführt: die erstere, insofern der allgemeinste Begriff der Zahl durch die in ihn aufgenommene Stetigeit diese auch auf die Function übertragen liess; die letztere, insofern der Begriff der complexen Zahl zur Function zwischen complexen Grössen und damit zur vieldeutigen Function führte. Wenn diese auch immer erst durch die Umwandlung in eine eindeutige Form mathemathisch fruchtbar wird, so muss sie gleichwohl als eine logisch nothwendige Entwicklung des Functionsbegriffs anerkannt werden. Dem gegenüber ist nun eine fernere Erweiterung des Functionsbegriffs zunächst aus physikalischen Anwendungen hervorgegangen. Während die rein mathematische Aufstellung einer Function stets voraussetzt, dass durch die beschränkte oder unbeschränkte Anwendung der algebraischen Operationen gewisse Grössenbeziehungen entstehen, welche in einer Gleichung sich ausdrücken lassen, können in andern Fällen solche Beziehungen auch rein empirisch gegeben sein oder vollkommen willkürlich von uns vorausgesetzt werden. Wenn man z. B. die Temperaturen misst, die ein prismatischer oder cylindrischer Stab in verschiedenen Theilen seiner Länge besitzt, so wird man zwei Reihen correspondirender Zahlen erhalten, von denen die einen die Längen des Stabes von einem willkürlich angenommenen Nullpunkte an, die anderen die zugehörigen Temperaturen angeben. Mittelst beider Zahlenreihen lässt sich eine Curve construiren, die im allgemeinen einen stetigen Verlauf haben wird, da alle Temperaturunterschiede allmählich sich auszugleichen streben. Ueber die sonstige Beschaffenheit dieser Curve lässt sich aber a priori gar nichts aussagen, wenn, wie wir voraussetzen, die Bedingungen, denen der Stab unterworfen war, unbekannt sind. Nichts desto weniger kann die Temperaturhöhe y als Function der Länge x des Stabes angesehen werden, und es ist daher eine Gleichung $y = f(x)$ denkbar, welche die Temperaturvertheilung in mathematischer Form darstellt. Die empirische Beobachtung giebt vielfache Gelegenheit zur Aufstellung solcher Functionsbeziehungen, die sich von den auf mathematischem Wege gewonnenen Functionen offenbar dadurch unterscheiden, dass die Curve, welche den Gang der Function darstellt, nicht aus bestimmten algebraischen Operationen abgeleitet, sondern direct durch Construction der einander entsprechenden Werthe der Variabeln gewonnen wird. Der Mathematik steht es nun frei, ganz beliebige willkürlich angenommene Zahlenreihen in ähnliche

Beziehungen zu einander zu bringen, wie sie hier durch die empirische Beobachtung dargeboten werden. Vom mathematischen Standpunkte aus ist zwischen diesen beiden Fällen kein Unterschied: jede Zuordnung stetig veränderlicher Grössen, welche nicht aus bestimmten Operationen hervorgegangen ist, erscheint um so mehr als eine willkürliche, da in der Regel auch bei den durch Beobachtung aufgefundenen Zahlenreihen eine unmittelbare logische oder causale Beziehung zwischen der Function und ihrem Argumente nicht existirt. So sind z. B. die Entfernungen der Punkte eines Stabes von irgend einem Nullpunkte nicht die Ursachen der Temperaturvertheilung, sondern beide Veränderungen sind auch in physikalischem Sinne bloss coexistirende Thatsachen. Wenn man hier die eine Veränderung als Function der andern betrachtet, so beruht dies also auf einer willkürlichen Annahme. Demgemäss werden überhaupt derartige Functionen als willkürliche bezeichnet. Unter den mathematischen Functionen sind es die transscendenten, namentlich die trigonometrischen, welche in der Form von Reihenentwicklungen die Hülfsmittel zur Darstellung derselben abgeben. Natürlich aber hat ein solcher Functionsausdruck niemals über die Grenzen der Zahlenreihen hinaus Gültigkeit, für welche er speciell gefunden worden ist.

In logischer Beziehung bieten nun die willkürlichen Functionen, deren Aufstellung erst der neueren mathematischen Physik seit d'Alembert und Euler angehört*), ein mehrfaches Interesse dar. Zunächst sind sie es, durch welche der Functionsbegriff seine grösste Allgemeinheit erreicht, insofern es keinerlei Art der Abhängigkeit mehr giebt, mag dieselbe auch ganz beliebig von uns angenommen sein, welche nicht dem Begriff der Function sich unterordnen lässt und in dieser Form der mathematischen Behandlung zugänglich ist. Für die letztere gewinnt darum auch das scheinbar Gesetzloseste den Charakter des Gesetzmässigen; denn jede, selbst die irregulärste Beziehung lässt sich auf die Form einer willkürlichen Function zurückführen. Es findet darin der logische Trieb unseres Geistes, der für das Zufällige keinen Raum lässt, seinen vollendetsten Ausdruck. Denn hier wird nicht nur allem objectiven Geschehen, sondern auch jeder Beziehung verschiedener Reihen von Denkobjecten, die aus irgend einer willkürlichen Laune entstehen mag, der Charakter der Gesetzmässigkeit zugesprochen. Das Causalgesetz bleibt für viele Gebiete ein Postulat, das sich unserer sicheren Nachweisung entzieht; das mathematische Gesetz der Function beherrscht alle Grössenbeziehungen, weil seine Anwendung vollkommen in unserer Wahl steht.

Sodann aber hat in der willkürlichen Function der allgemeine Begriff der Function selbst von den besonderen, an sich zufälligen Eigenschaften sich losgelöst, die vermöge seiner mathematischen Entstehungsbedingungen

---

*) Zur Geschichte derselben vgl. Riemann, ges. mathematische Werke, S. 213 f.

ihm anhafteten. Die rein mathematische Function bleibt stets eine Beziehung zwischen Grössen, die aus den mit denselben vorgenommenen Operationen hervorgegangen ist. Diese erscheinen hier als die Bedingungen, welche zur Erzeugung der Function erforderlich sind und daher auch die Form derselben bestimmen. Bei der willkürlichen Function dagegen tritt die Function als der primäre Begriff auf. Zunächst wird hier die Abhängigkeit gewisser Reihen von Grössen von einander festgestellt, und dann erst sucht man die Frage zu beantworten, welche Operationen ausgeführt werden müssen, um diese Abhängigkeit mathematisch auszudrücken. Darum behält der Begriff der Function vollständig seine Bedeutung bei, wenn man zu jener zweiten Frage gar nicht übergeht, sondern sich etwa damit begnügt, die gegebene Abhängigkeit in der Form einer Curve zu construiren, oder in einem ganz abstracten symbolischen Ausdruck, wie $y = f(x)$, darzustellen. Auf diese Weise hat erst die Behandlung der willkürlichen Functionen das Bewusstsein von der allgemeineren, den mathematischen Operationen nicht bloss gleichwerthigen, sondern übergeordneten Bedeutung des Begriffs der Function erweckt. Die Ausführbarkeit der Operationen ist an die Bedingung quantitativer Beziehungen gebunden, welche sich nicht überall verwirklicht finden. Verhältnisse der Abhängigkeit dagegen bestehen auch zwischen solchen Begriffen, bei denen eine quantitative Vergleichung unmöglich ist. Da es übrigens, sobald die Abhängigkeitsverhältnisse mathematischer Art sind, für den Ausdruck der Function keinen Unterschied macht, ob derselbe aus vorangegangenen Grössenoperationen hervorgegangen ist oder nicht, so besteht vom rein mathematischen Standpunkte aus zwischen den willkürlichen und den übrigen Functionen kein Unterschied. Der Ausdruck einer willkürlichen Function muss naturgemäss stets ein solcher sein, dass man sich denken könnte, er sei aus einer Reihe von Grössenoperationen hervorgegangen, wie ja auch jede noch so willkürlich und unregelmässig gezogene Curve irgend einem complicirten Gesetze gehorcht. Der Unterschied bezieht sich also einzig und allein auf die Entstehungsweise des für die Darstellung der Function gewonnenen Ausdrucks. Bei den mathematischen Functionen geht dieser unmittelbar aus der Operationsverknüpfung der Elemente hervor, welche den gesetzmässigen Gang der gegebenen Curve bestimmen. Bei den willkürlichen Functionen wird für diese Curve ein Ausdruck von hinreichend allgemeiner Beschaffenheit gewählt, damit durch die Beibehaltung einer genügenden Anzahl von Gliedern und durch die Wahl geeigneter Werthe für die zunächst unbestimmt gelassenen Coëfficienten dieser Glieder der Ausdruck der gegebenen Curve conform wird. Im ersten Fall wird also der untersuchte Begriff direct bestimmt, im zweiten wird ein allgemeiner Begriff aufgestellt, den man nun erst auf den speciellen Fall anwendet. Die Nöthigung zu dem letzteren Verfahren wird naturgemäss dann eintreten, wenn die Function zu verwickelt ist, als dass sie durch Operationsverknüpfung ihrer Elemente sich finden liesse. Hier bietet die

Mathematik die Möglichkeit dar, Functionsausdrücke aufzustellen, welche allgemein genug sind, dass sie alle nöthigen Verhältnisse der Abhängigkeit umfassen, und welche anderseits doch vermöge der Bestimmtheit, die jedem einzelnen in sie eingehenden Grössenbegriff zukommt, die speciellste Determination gestatten. Auch hierin bewährt es sich wiederum, dass die Function der allgemeinere Begriff ist, welcher die einzelnen Grössenoperationen als die speciellen Beziehungen, aus denen die besonderen Formen mathematischer Functionen hervorgehen, einschliesst.

Der Erkenntniss dieser Bedeutung entspricht der zunehmende Gebrauch der allgemeinen Functionssymbole in der neueren Mathematik. Nicht nur in solchen Fällen, wo die specielle Form der Function noch unbekannt ist oder unbestimmt bleiben soll, wendet man dieselben an, sondern nicht selten auch bedient man sich ihrer der Kürze halber, indem man durch die Wahl verschiedener Functionszeichen, wie F, f, $f_1$, $\varphi$, $\psi$, die in einem gegebenen Zusammenhang vorkommenden Functionsformen trennt. Hieran schliesst sich dann unmittelbar der Gebrauch stehender Zeichen für gewisse in der höheren Mathematik öfter vorkommende Functionsformen an. Diese Anwendung der Functionssymbole gestattet es ausserdem leicht, die Wahl der abhängig Variabeln und des Argumentes unbestimmt zu lassen, indem man statt der Beziehungen $y = f(x)$, $y = f(x, z \ldots)$ die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y, z \ldots) = 0$$

aufstellt. Diese impliciten Functionen repräsentiren den Begriff der Function in der allgemeinsten Form, die für ihn möglich ist, insofern sie lediglich angeben, dass eine Abhängigkeit zwischen gewissen Variabeln besteht. Der Uebergang zu der expliciten Function oder zu der Voraussetzung, dass irgend welche Variabeln als die ursprünglich Veränderlichen angesehen werden, von denen dann die andern abhängen, ist offenbar schon eine Specialisirung dieses allgemeinsten Begriffs.

### b. Die Hauptformen der analytischen Functionen.

Der Begriff der analytischen Function ist aus den algebraischen Operationen hervorgegangen. Die algebraische Gleichung, als Ausdruck einer Relation zwischen gegebenen völlig bestimmten Grössen, verwandelte sich in einen Functionsausdruck, sobald zwei oder mehrere dieser Grössen veränderlich angenommen wurden. Der Gesichtspunkt, den Descartes für die Untersuchung der Gleichungen einführte, ihre Zerlegung in einfache lineare Factoren und die Reconstruction der höheren Gleichungen durch Multiplication dieser Factoren, ist daher auch für die Auffassung der Functionen bestimmend geworden. (Vgl. S. 136.) Jede noch so verwickelte Function lässt sich als hervorgegangen aus der Verbindung linearer Functionen betrachten, die in begrenzter oder in unbegrenzter Anzahl zusammentreten. Die allgemeine Form, auf welche alle Gleichungen zurückgeführt werden können, wird daher zur allgemeinen Grundform der analytischen

Functionen, sobald man mindestens zwei von einander abhängige Variabeln in sie einführt. Auf diese Weise ist die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots Px^{n-1} + Qx^n + \ldots$$

die Grundform einer entwickelten Function mit einem Argumente. Diese Reihe kann je nach der Beschaffenheit der Function entweder bei einem bestimmten Gliede abbrechen, oder sie kann ohne Ende fortschreiten, in welchem Fall aber ihr Werth nur dann sich bestimmen lässt, wenn die Glieder immer kleiner werden und sich schliesslich der Null nähern. Während nun die Algebra von der einfachsten Form jener Function ausging und auf sie allmählich die verwickelteren zurückführte, wobei sie jedoch stets an der Voraussetzung einer begrenzten Zahl von Gliedern festhielt, legt umgekehrt die Analysis sofort jene allgemeinste Form, die sie ausserdem als nicht nothwendig begrenzt voraussetzt, ihren Untersuchungen zu Grunde, um durch Einführung specieller Bedingungen aus ihr die einzelnen Hauptformen analytischer Functionen abzuleiten. Diese ihre erste Voraussetzung entnimmt somit die Analysis der Algebra. Sie fügt nur noch die weitere Annahme hinzu, dass die angegebene Reihe zur Darstellung jeder beliebigen Function sich eigne, sobald man eine unbegrenzte Zahl von Gliedern zulasse. Diese Annahme stützt sich auf die Erwägung, dass eine algebraische Gleichung nur desshalb ein geschlossener Ausdruck ist, weil sie aus einer begrenzten Anwendung der arithmetischen Fundamentaloperationen hervorging, dass aber anderseits keine irgendwie beschaffene Function denkbar ist, welche nicht durch eine successive Anwendung jener vier Operationen entstehen könnte. Wenn es demnach Functionen giebt, welche nicht in der geschlossenen Form einer algebraischen Gleichung ausgedrückt werden können, so kann dies nur darin seinen Grund haben, dass die Zahl der Operationen, die zur Bildung jener Functionen geführt haben, keine bestimmt begrenzte gewesen ist. Denkt man sich nun die Operationen, aus denen eine algebraische Gleichung beliebigen Grades hervorgeht, ins unbegrenzte fortgesetzt, so entsteht jene Grundform der Analysis, welche dann als speciellen Fall auch jede algebraische Gleichung in sich enthält.

Die Möglichkeit der Anwendung der angegebenen Grundform auf alle einzelnen Functionen beruht zunächst auf der Unbestimmtheit der Coëfficienten A, B, C . . . Die Umwandlung der allgemeinen Form in eine besondere Functionsform geschieht daher stets auf solche Weise, dass aus den für die Function geltenden Voraussetzungen Specialgleichungen entwickelt werden, aus denen die Coëfficienten A, B, C . . . gefunden werden können. Auf das in dieser Methode der unbestimmten Coëfficienten zur höchsten Ausbildung gelangte logische Fundamentalprincip der Analysis, dass ein gegebenes Problem zum Zweck seiner Lösung als bereits gelöst vorausgesetzt wird, wurde schon hingewiesen. (S. 139). Die Anwendbarkeit desselben im vorliegenden Fall beruht aber gerade darauf, dass in jener Reihe wirklich der oberste Begriff einer analytischen Function

enthalten ist, der demnach auch durch geeignete Determinationen in jeden unter ihm enthaltenen besonderen Functionsbegriff übergeführt werden kann. Die Herstellung der Grundform liefert überdies ein einfaches Kriterium für die Entscheidung der Frage, ob zwei gegebene Functionen mit einer gleichen Anzahl von Veränderlichen einander gleich sind oder nicht. Dieses Kriterium besteht in der Identität der Coëfficienten, welche einander entsprechenden Gliedern der beiden Reihen zugehören. Zugleich liegt hierin ein neuer Fall vor, in welchem der allgemeine arithmetische Begriff der Gleichheit durch die Bedingungen, unter denen er Anwendung findet, näher determinirt wird. Wie früher die Geometrie durch die Herbeiziehung des Begriffs der Lage, so sehen wir hier die Analysis durch die Eigenschaften des Functionsbegriffs zu einer solchen Umgestaltung der ursprünglich bloss auf das numerische Mass gegründeten arithmetischen Gleichheit gelangen. Alle diese Umgestaltungen sind einig in der Tendenz, den für viele Zwecke allzu unbestimmten Begriff der numerischen Gleichheit in denjenigen der logischen Identität überzuführen. Bei ihrem ursprünglichen Gleichheitsbegriff musste die Arithmetik von allen denjenigen Momenten der Identität abstrahiren, welche einer unmittelbaren messenden Vergleichung getrennter Gebilde im Wege stehen. Bei der weiteren Ausbildung ihrer Methoden wird sie ebenso unvermeidlich zu einer immer umfassenderen Berücksichtigung der Eigenthümlichkeiten der verglichenen Gebilde und auf diese Weise zu einer Wiederannäherung an die logische Identität getrieben.

Die Entwicklung der Hauptformen, in welche der Functionsbegriff zerfällt, lässt sich nunmehr unmittelbar an die Betrachtungen anschliessen, welche zur Aufstellung der analytischen Grundform geführt haben. Ist diese aus einer zunächst unbeschränkt gedachten Anwendung der vier arithmetischen Operationen hervorgegangen, so werden sich die einzelnen Hauptformen gewinnen lassen, wenn man für die Anwendung der Operationen besondere Bedingungen einführt. Solche können sich beziehen 1) auf die Zahl der Operationen, 2) auf die Zahl ihrer Anwendungen und 3) auf die Reihenfolge der letzteren. Die Einführung dieser Bedingungen zeigt, dass die so entstehenden Hauptformen der Functionen continuirlich mit einander zusammenhängen, insofern die Operationen, aus deren Hinzunahme eine neue Form entspringt, bei einer vorangegangenen immer bereits vorbereitet sind.

Die Einführung der ersten unter den drei genannten Bedingungen lässt zunächst verschiedene Formen algebraischer Functionen entstehen. Da alle Functionen, welche einer begrenzten Anwendung der vier arithmetischen Operationen entsprechen, algebraische genannt werden, so kann eine weitere Eintheilung derselben nur darauf beruhen, ob jene vier Operationen sämmtlich bei der Bildung der Function mitgewirkt haben oder nicht. Logisch würden sich demgemäss unterscheiden lassen Functionen, die aus blossen Additionen, solche, die aus Additionen und Subtractionen entstanden sind, andere, bei denen die Multiplication mitgewirkt

hat, und endlich diejenigen, bei denen auch noch die Division herbeigezogen wird. Nur der letztere Fall begründet aber wesentliche Unterschiede in der Beschaffenheit der Functionen. Aus ihr entspringt die wichtige Eintheilung in ganze und in gebrochene algebraische Functionen.

Die ganzen Functionen bestehen immer aus einer begrenzten Anzahl von Gliedern; denn die entwickelte Function mit einer Variabeln lässt sich stets entstanden denken aus der Multiplication einer beschränkten Anzahl von Factoren von der Form $(x \pm \alpha) . (x \pm \beta) . (x \pm \gamma) \ldots$, wobei einzelne Grössen null, niemals aber Brüche sein können. Die Zahl dieser Factoren und der Glieder, welche in der aus ihnen gewonnenen geschlossenen Grundform

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots Qx^n$$

stehen bleiben, bestimmt den Grad der Function. Bleibt bloss das erste Glied, so ist die Function nullten Grades; die weiteren Grade entsprechen den Potenzen der Veränderlichen x. Vermöge ihrer Entstehungsweise kann eine gegebene ganze Function im allgemeinen auf algebraischem Wege auch wieder in ihre Theile, in Factoren des ersten Grades, zerlegt werden; nur bedarf es zu diesem Zweck stets der Hinzuziehung der vierten Operation, der Division. Auch giebt es einen Specialfall, wo diese Zerlegung innerhalb der realen Einheiten nicht möglich ist. Er ergiebt sich überall da, wo eine Summe von Potenzen von der Form $a^2 + b^2$ in die Function eingeht. Diese Summe kann nur in die complexen linearen Factoren $(a + bi) . (a - bi)$ zerlegt werden. Auf diese Weise führt schon die ganze Function auf den Begriff der complexen Grösse, durch den sie, wie wir unten sehen werden, im Zusammenhang steht mit den transscendenten Functionen.

Wenn ausser den drei ersten arithmetischen Operationen auch noch die Division bei der Bildung einer algebraischen Function mitwirkt, so gewinnt diese die Beschaffenheit einer gebrochenen Function. Denkt man sich die letztere, ähnlich wie die ganze Function, aus linearen Factoren hervorgegangen, so wird man demgemäss eine Anzahl von Factoren erhalten, die den Zähler, und eine andere Anzahl von Factoren, die den Nenner der gebrochenen Function bilden. Damit aber die Division wirklich ausgeführt werden könne, muss die Anzahl der das Argument x enthaltenden Glieder im Nenner mindestens um eines kleiner sein als im Zähler. Die linearen Factoren der gebrochenen Function werden also im allgemeinen die Beschaffenheit besitzen

$$\frac{(x \pm \alpha) . (x \pm \beta) . (x \pm \gamma) \ldots (x \pm \rho)}{(x \pm \alpha') . (x \pm \beta') . (x \pm \gamma') \ldots (x \pm \nu')}$$

mit der Bedingung, dass diese Form ein unechter Bruch sei, und dass keiner der Factoren des Nenners gleich Null werde, da in diesem Fall der Werth der Function unendlich und also unbestimmbar wird. Demgemäss lässt sich eine gebrochene Function $y = F(x)$ als Quotient zweier ganzer Functionen

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ betrachten, von denen die im Nenner stehende mindestens um einen Grad niedriger ist als die des Zählers. Denkt man sich die Division wirklich ausgeführt, so wird als Resultat eine neue Function $\psi(x)$ und überdies ein Rest erscheinen, welcher die Form einer niedrigeren Function von x hat, die abermals durch den Nenner $\varphi(x)$ getheilt werden muss. Mittelst der Einführung negativer Potenzen von x lässt sich nun aber auch der so gewonnene echte Bruch $\frac{r(x)}{\varphi(x)}$ in eine neue ganze Function und in einen Rest zerlegen. Auf diese Weise erhält man schliesslich eine Reihe von der Form

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots,$$

welche ins unendliche forschreitet, deren Glieder aber kleiner und kleiner werden. Somit lässt sich auch eine gebrochene Function mittelst der Einführung unbestimmter Coëfficienten auf die allgemeine analytische Grundform, eine Reihe mit steigenden Potenzen der Variabeln, zurückführen; die Zahl der Glieder einer solchen Reihe ist aber in diesem Falle unbegrenzt. Hierdurch überschreiten die gebrochenen Functionen das Gebiet der Algebra, auf welchem sie entstanden sind. Hervorgegangen aus einer begrenzten Anzahl von Anwendungen der vier arithmetischen Operationen, sind sie dem Begriff der algebraischen Function unterzuordnen. Aber sobald es sich darum handelt, ihren Werth durch Summation der Reihe, in welche sie entwickelt worden sind, zu bestimmen, so übersteigt dies die Hülfsmittel der algebraischen Operationen, da die Glieder jener Reihe an Zahl unbeschränkt sind. Nur unter der Voraussetzung, dass schon eine begrenzte Anzahl von Gliedern eine zureichende Werthbestimmung gestattet, reichen hier die algebraischen Methoden noch aus. Wie demnach der Begriff der ganzen Function zu dem der gebrochenen überführt, sobald man annimmt, dass die bei der Zerlegung einer ganzen Function erforderlichen Operationen sämmtlich auch bei der Bildung einer Function verwendet werden, so führt eine ähnliche Umkehrung von den gebrochenen zu den transscendenten Functionen über.

Die Zerlegung einer gebrochenen Function lässt sich nämlich nicht mehr in allgemeingültiger Weise auf algebraischem Wege vornehmen, weil diese Zerlegung eine unbegrenzte Anzahl in bestimmter Reihenfolge auszuführender arithmetischer Operationen erfordern würde. Sobald man nun voraussetzt, dass auf eben diesem Wege eine Function entstehe, so gewinnt man damit den Begriff der transscendenten Function, die von dieser unbegrenzten Zahl von Operationen, die für sie erforderlich sind, ihren Namen führt. Wir kommen damit auf den zweiten der oben für die Eintheilung der Functionen geltend gemachten Gesichtspunkte, auf die Zahl der Anwendungen, welche die arithmetischen Operationen erfahren müssen, um eine Function hervorzubringen. Den Fall,

wo diese Zahl eine beschränkte ist, haben wir in den algebraischen Functionen kennen gelernt; so bleiben uns nur diejenigen Fälle übrig, wo dieselbe eine **unbeschränkte** wird. Die einfachste Form, die hier möglich ist, lehnt sich an die einfachste Form einer algebraischen Function an. Diese letztere ist in Bezug auf zwei Variabeln gegeben in einer Gleichung

$$y = x^a,$$

in welcher das Argument x alle möglichen rationalen und irrationalen Werthe durchlaufen kann, der Exponent a aber constant ist und zwar eine rationale positive Zahl bedeutet. Kehrt man nun auf der rechten Seite dieser Gleichung das Verhältniss der Variabeln und Constanten um, indem man den Exponenten zum Argument der Function nimmt, so entsteht die **Exponentialfunction**

$$y = a^x.$$

Es ist klar, dass hier der genaue Werth von y im allgemeinen nicht mehr durch eine begrenzte Zahl von Operationen gewonnen werden kann. Denn sobald x bei seiner Veränderung irrationale Werthe durchläuft, so können solche zunächst mit beliebiger Annäherung durch einen unechten Bruch dargestellt werden, der, wenn die Division wirklich ausgeführt wird, in eine rationale Zahl und eine unbegrenzte Reihe echter Brüche, die sich immer mehr der Null nähern, zerfällt. Die Bildung der Function führt also hier auf eine ähnliche unendliche Reihe, wie sie bei der Zerlegung einer gebrochenen Function sich ergiebt. Demnach kann auch die Function $a^x$ auf die analytische Grundform $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ zurückgeführt werden, wenn die Zahl der Glieder derselben unbegrenzt angenommen wird.

Die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunction, die sich unmittelbar aus dem Wesen der Multiplication ergeben, sind ausgedrückt in den zwei für alle Fälle, in denen $a > 1$ ist, gültigen Gleichungen

$$a^x \cdot a^{x_1} = a^{x + x_1} \text{ und } \frac{a^x}{a^{x_1}} = a^{x - x_1}.$$

Diese Eigenschaften liefern die Bedingungen, durch welche die allgemeine Grundform der analytischen Functionen in einen Ausdruck für die Exponentialfunction übergeht. Sie bestehen darin, dass der erste der unbestimmten Coëfficienten = 1 und die übrigen den Potenzen der Veränderlichen conform werden. Man gewinnt nämlich

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots,$$

und für den Specialfall, dass die Constante $A = 1$ wird,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

welche Reihe schliesslich für $x = 1$ den Werth von $e = 2{,}71828\ldots$ ergiebt. Der analytische Werth der Exponentialfunction beruht nun auf

den in der Beschaffenheit dieser Reihen ausgedrückten Beziehungen der Veränderungen der Function zu den Veränderungen ihres Argumentes. In der Gleichung $y = a^x$ hat für jeden reellen positiven oder negativen Werth von x, unter der Voraussetzung, dass a grösser als die Einheit ist, die Function y nur positive Werthe, sie ist für jedes negative x kleiner als die Einheit, für jedes positive x grösser als die Einheit und für $x = 0$ der Einheit gleich; dabei entspricht übrigens jeder stetigen Aenderung des Argumentes eine stetige Aenderung der Function. Diese bietet demnach die Möglichkeit, jedes beliebige System von Zahlen in ein positives Zahlensystem zu übertragen, wobei die Beziehung zwischen beiden Systemen nur abhängig ist von der Constanten a, welche darum die Basis der Exponentialfunction genannt wird.

Die Eigenschaft der Exponentialfunction, dass sie als die Repräsentantin eines neuen Zahlensystems angesehen werden kann, welches dem durch das Argument x dargestellten ursprünglichen Zahlensystem eindeutig zugeordnet ist, enthält nun aber ausserdem die Möglichkeit zu einer weiteren wichtigen Anwendung. Es lässt sich nämlich diese Zuordnung umkehren, indem man x als Function und y als das zugehörige Argument auffasst: dann geht die Exponentialfunction in die logarithmische Function $x = \log y$ über. Vermöge der oben festgestellten Beziehungen entspricht hier jedem unter der Einheit liegenden Werthe der Zahl x ein negativer Logarithmus, einem über der Einheit liegenden ein positiver, und der Logarithmus der Einheit ist die Null. Die oben gefundenen Gleichungen $a^x \cdot a^{x_1} = a^{x + x_1}$ und $\frac{a_x}{a^{x_1}} = a^{x - x_1}$ ergeben aber die Beziehungen

$$\log (x \cdot x_1) = \log x + \log x_1, \ \log \left(\frac{x}{x_1}\right) = \log x - \log x_1,$$
$$\log (x^{x_1}) = x_1 \log x,$$

in welchen die grosse praktische Bedeutung der logarithmischen Function ausgesprochen ist, dass sie jede arithmetische Operation von der Multiplication an um eine Stufe zu erniedrigen gestattet. Theoretisch ist diese Umwandlung der Exponentialfunction in die logarithmische desshalb von Interesse, weil in ihr zum ersten Mal eine Umkehrbarkeit der Function auftritt, welche weiterhin bei allen höheren transscendenten Functionen sich wiederholt, und welche vollständig der Umkehrbarkeit der arithmetischen Operationen entspricht, die bei den algebraischen Functionen zur Anwendung kommt.

Die Entwicklung der Zahl e, der Basis der natürlichen Logarithmen, welche in der Ableitung der Exponentialfunction eine so grosse Rolle spielt, bietet zugleich ein bemerkenswerthes Beispiel für eine in der Analysis vielfach geübte Methode der Begriffsentwicklung. Durch successive Determination wurde e erhalten, indem man in der für $a^x$ gewonnenen Reihe zuerst die Constante A und dann auch die Veränderliche x gleich der Einheit annahm. Gleichwohl lässt sich die so erhaltene Reihe

$1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$, welche die Zahl e darstellt, ihrerseits als die arithmetische Grundform ansehen, welche in der Entwicklung einer Function von der Form $a^x$ schon vorausgesetzt ist. Denn unter einer Reihe von Zahlgesetzen von übereinstimmender Form ist dasjenige das einfachste und darum allgemeinste, dessen Factoren der Einheit gleich sind, da man sich die übrigen Formen durch successive Multiplication der Einheit mit anderen Zahlen kann entstanden denken. So bietet sich hier die Möglichkeit dar, eine und dieselbe analytische Form unter ganz entgegengesetzten Gesichtspunkten zu betrachten. Der Grund dieses Verhältnisses liegt in der Eigenthümlichkeit der logischen Determination. An sich ist diese stets eine Operation, welche eine Einschränkung des Begriffs ergiebt. Aber der Begriff, welcher als Determinator gewählt wird, kann so beschaffen sein, dass er diese Einschränkung wieder aufhebt und in ihr Gegentheil verkehrt. In der That werden wir noch manche Fälle kennen lernen, in denen gerade die Analysis Begriffserweiterungen auf dem Wege der Determination zu Stande bringt. Der vorliegende ist aber dadurch ausgezeichnet, dass bei ihm die Auffassung wechseln kann, je nachdem man von dem analytischen oder vom rein arithmetischen Standpunkte ausgeht. Analytisch ist die Reihe e ein Specialfall der Function $a^x$; arithmetisch aber ist e die Grundform, welche bei jeder Function $a^x$ vorausgesetzt wird.

Die Bildung der Exponentialfunction beruht auf der Annahme, dass die zur Anwendung kommenden arithmetischen Operationen zwar an Zahl unbegrenzt sind, dass sie aber stets in einer und derselben Richtung fortschreiten. Diese letztere Bedingung findet in der Reihe $a^x = 1 + A\,x + \frac{A^2\,x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ unmittelbar ihren Ausdruck, denn die Glieder dieser Reihe sind sämmtlich in der gleichen Weise additiv verbunden, und sie ändern sich successiv um $A\,x$, $\frac{A\,x}{2}$, $\frac{A\,x}{3}$ u. s. w. Die Exponentialfunction lässt sich also durch successive Multiplication der Einheit mit diesen immer kleiner werdenden Factoren und durch Addition der so gebildeten Glieder entstanden denken. Nur unter der Bedingung einer solchen stetig in der nämlichen Richtung vollzogenen Bildung ist es auch möglich, dass Function und Argument durch ihre stetige Veränderung einander eindeutig zugeordnete Zahlensysteme erzeugen, die mit einander zu- und abnehmen. Es lässt sich nun aber die unbeschränkte Anwendung der arithmetischen Operationen noch in einer andern Weise vollzogen denken, so nämlich, dass der gleichförmigen Aenderung des Argumentes periodisch zu- und abnehmende Aenderungen der Function entsprechen. Solche Functionen werden im allgemeinen aus einer wechselnden Anwendung der arithmetischen Operationen hervorgehen, und die Reihe, die der Ausdruck der Function ist, wird daher niemals aus lauter positiven oder aus lauter negativen Gliedern bestehen können. Wir sind hiermit bei der dritten

der oben (S. 177) unterschiedenen Bedingungen angelangt, wonach die Reihenfolge, in welcher die zur Bildung der Function erforderlichen Operationen angewandt werden, eine wechselnde ist. An sich kann dieser Wechsel ein beliebiger sein. Die hier sich eröffnende Classe von Functionen umfasst daher alle Functionsbeziehungen, die ausser den oben erörterten noch denkbar sind. Dabei bilden aber die einfachsten periodischen Functionen, d. h. diejenigen, bei denen die periodischen Veränderungen in der einfachsten und regelmässigsten Weise erfolgen, die Grundlagen für alle andern.

Der Begriff der periodischen Function hat, wie fast jeder fundamentale Functionsbegriff, ursprünglich in einer speciellen Anwendung sich entwickelt, in der Anwendung auf die Länge des Kreisbogens und die Seiten des ihm entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecks im Kreise. Ist der Radius des Kreises der Einheit gleich, so erscheint der Sinus eines Winkels zwischen zwei Radien als die senkrechte Gerade, welche von dem Endpunkt des einen der beiden Einheitsradien auf den andern gezogen wird, der Cosinus als die Strecke, welche auf dem letzteren durch jene Senkrechte abgetrennt wird, und welche dem Sinus des Ergänzungswinkels gleich ist, u. s. w. Der geometrische Nutzen dieser trigonometrischen Functionen, durch welchen man zugleich auf deren Gebrauch geführt wurde, besteht darin, dass dieselben es gestatten, den Winkeln im rechtwinkeligen Dreieck überall, wo dieselben in die Rechnung eingehen, gerade Linien zu substituiren, wodurch die nothwendige Gleichförmigkeit zwischen den der Rechnung unterworfenen Grössen hergestellt wird. Die trigonometrischen Functionen haben also hier, ähnlich den Logarithmen, die Bedeutung von Hülfsfunctionen, welche es leicht gestatten, am Ende der Rechnung wieder zu den ursprünglichen Grössen, zu denen sie gehören, zurückzukehren. Während aber bei der Einführung der Logarithmen die Vereinfachung der arithmetischen Operationen der einzige Zweck ist, wird man zur Einführung der trigonometrischen Functionen durch die incommensurable Beschaffenheit der Winkelgrössen oder Bogenlängen gegenüber dem allgemeinen Messungshülfsmittel der Geometrie, der Geraden, genöthigt.

Nun ist die Beziehung, die zwischen den Mittelpunktswinkeln des Kreises und ihren trigonometrischen Functionen besteht, ein Specialfall, der sich in ganz abstracter Weise verallgemeinern lässt, indem man unter Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. Functionen versteht, die sich periodisch verändern, während ihr Argument stetig zunimmt. Zählt man die Winkel oder die ihnen entsprechenden Bogen über 360° hinaus, so lassen sich dieselben als ein ins unbegrenzte gleichförmig wachsendes Argument betrachten, dessen Functionen sich zwischen bestimmten Grenzen hin- und herbewegen. Dabei gestattet dann die Verschiedenheit der trigonometrischen Functionen die Wahl solcher Functionen, welche für die darzustellende Abhängigkeit die geeigneten Grenzen abgeben. Denn die Functionen Sinus und Cosinus bewegen sich stets zwischen den Grenzen — 1 und + 1. Wenn das Argu-

ment von null an wachsend die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$ erreicht, so durchläuft der Sinus ebenfalls von null an die Werthe $+1, 0, -1, 0$ u. s. w., während der Cosinus gleichzeitig von $+1$ anfangend die parallel gehenden Werthe $0, -1, 0, +1$ annimmt. Die Functionen Tangente und Cotangente dagegen bewegen sich ebenso periodisch zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$, wie die Beziehungen $\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$ und $\text{cotang} = \frac{\cos}{\sin}$ dies andeuten. Irgend eine dieser vier Functionen eignet sich daher unmittelbar zur Darstellung einer periodischen Veränderung, sofern dieselbe nur wie beim Kreise eine gleichförmig zu- und abnehmende ist. Bewegt sich die Function zwischen der positiven und negativen Einheit, so wird sie durch den Sinus oder Cosinus dargestellt, durch den ersteren, wenn sie mit null, durch den zweiten, wenn sie mit der Einheit beginnt. Bewegt sie sich zwischen entgegengesetzten unendlichen Werthen, so entspricht sie der Tangente oder Cotangente, der ersten, wenn sie mit null, der zweiten, wenn sie im Unendlichen beginnt. Da nun die Einheit mit jedem beliebigen endlichen Werthe multiplicirt werden kann, so sind die vier genannten trigonometrischen Functionen überhaupt als die Repräsentanten aller gleichförmig veränderlichen periodischen Functionen zu betrachten, die sich zwischen beliebigen endlichen oder unendlichen Werthen bewegen.

Wie nun die Exponentialfunction bei den Veränderungen des Argumentes x ein neues Zahlensystem liefert, welches dem durch die einzelnen Werthe von x repräsentirten zugeordnet ist, so stellt jede der trigonometrischen Functionen ein der stetig veränderlichen Bogenlänge x zugeordnetes Zahlensystem dar. Auch die trigonometrischen Functionen lassen daher, wenn man Argument und abhängig Variable vertauscht denkt, eine Umkehrung zu: es entstehen so die cyklometrischen Functionen, welche die Eigenschaft haben, dass, während das Argument zwischen endlichen oder unendlichen Werthen hin- und hergeht, die Function stetig in einer Richtung veränderlich ist. In Folge dessen können aber einem und demselben Werth des Argumentes unendlich verschiedene Werthe der Function entsprechen. So kann z. B. $\text{arc} \sin 0 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$, $\text{arc} \sin 1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ sein. Die cyklometrischen Functionen sind also im allgemeinen vieldeutige Functionen. Hierdurch sind sie geeignet, überhaupt den Begriff der Vieldeutigkeit einer Function zum Ausdruck zu bringen. Es hängt aber dieser Begriff, wie aus der soeben gegebenen Entwicklung hervorgeht, mit dem der Periodicität unmittelbar zusammen. Vieldeutig kann eine Function überhaupt nur dann sein, wenn sie in irgend einer Weise mit einer periodischen Veränderung zusammenhängt. So haben wir früher gesehen, dass die Functionen complexer Variabeln den Charakter vieldeutiger Functionen besitzen (S. 171). Nun kann aber diese

Vieldeutigkeit auch so dargestellt werden, dass man sich die complexe Variable $z = x + iy$ zwischen ihren beiden Endpunkten a und b hin- und hergehend denkt, wodurch sie successiv alle hier möglichen Wege beschreibt. Bei einem solchen Hin- und Hergehen findet nur eine wichtige Abweichung von der Beziehung der cyklometrischen Functionen zu ihren Argumenten statt: die Curven, welche zwischen den Punkten a und b beschrieben werden, fallen nicht zusammen, sondern sie wechseln fortwährend; ausserdem können diese Curven beliebig gekrümmt sein, mit andern Worten: das Problem der gleichförmigen verwandelt sich hier in dasjenige einer beliebigen ungleichförmigen Veränderung. Es ist aber klar, dass dieses Problem, abgesehen von dem hier besprochenen Specialfall, eine ganz allgemeine Bedeutung besitzt, da die gleichförmige Veränderung in gegebenen Perioden nur die einfachste Form unter den unendlich vielen überhaupt möglichen periodischen Veränderungen ist. Hier bietet nun der Umstand, dass jeder trigonometrischen Function eine andere von entgegengesetzter Periode zugeordnet ist, ein Hülfsmittel dar, um eine in beliebiger Weise ungleichförmige Veränderung darzustellen. In der einfachsten Weise kommt diese Ergänzung einander zugeordneter Functionen bei der Darstellung complexer Variabeln zum Ausdruck. Hier macht es die Einführung der trigonometrischen Functionen unmittelbar möglich, den Ausdruck $z = x + iy$ in die Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ überzuführen. Denkt man sich in dieser Gleichung sowohl den Radiusvector r wie den Winkel $\varphi$ stetig veränderlich, so kann durch sie jeder beliebige Weg des Punktes z zwischen zwei gegebenen Endpunkten a und b dargestellt werden. Nun zeichnet sich aber die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vor der ursprünglichen $x + iy$ offenbar dadurch aus, dass in ihr die beiden Bestandtheile der complexen Variabeln nicht mehr völlig unabhängig von einander, sondern Functionen der nämlichen Grössen r und $\varphi$ sind. Hierin tritt daher eine directe Beziehung der trigonometrischen Functionen zu den complexen Grössen zu Tage. Die Anwendung dieser Functionen macht es möglich, den imaginären Bestandtheil einer complexen Grösse durch eine Function der nämlichen Grösse auszudrücken, von welcher auch der reelle Bestandtheil eine Function ist. Der Grund dieses Verhältnisses liegt aber darin, dass die Beziehung einer trigonometrischen Function zu ihrer Ergänzungsfunction genau dieselbe ist wie die Beziehung des imaginären zum reellen Bestandtheil einer complexen Grösse, wenn die letztere geometrisch gedeutet wird. Geben wir dem Cosinus alle möglichen Werthe von + 1 bis — 1, so nimmt indessen der Sinus die hierzu gehörigen lateralen Werthe an. Setzt man daher den Radius r, von dessen Centriwinkeln die trigonometrischen Functionen abhängen, veränderlich, so stellt jeder beliebige Punkt der complexen Zahlenebene in Bezug auf seinen reellen Theil eine Cosinusfunction, in Bezug auf seinen imaginären Theil eine Sinusfunction dar. Vermöge der Beziehung der trigonometrischen Functionen zu den complexen Grössen führt nun auch die Betrachtung der algebraischen Func-

tionen überall da zu dieser Form der transscendenten Functionen, wo sich als Factoren algebraischer Ausdrücke complexe Grössen ergeben. Solche treten z. B. immer dann auf, wenn in einer Function eine Summe von der Form $a^2 + b^2$ vorkommt, welche nur in die complexen Factoren $(a + bi) . (a - bi)$ zerlegbar ist (S. 178). Jeder solche Factor lässt sich leicht in einer Form darstellen, welche den Bedingungen der trigonometrischen Functionen entspricht. Denn es ist offenbar

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i\right),$$

worin der in der Klammer enthaltene Theil, abgesehen von der imaginären Einheit i, die Eigenschaft hat, dass sein Quadrat der Einheit gleich ist, entsprechend der Gleichung $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Demnach lassen beide Glieder als Cosinus und Sinus eines Winkels $\varphi$ sich auffassen; nicht minder entsprechen a und b den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Radiusvector r ist, und man erhält daher die oben allgemein für den Ausdruck einer complexen Grösse mittelst trigonometrischer Functionen festgestellte Beziehung

$$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Der tiefere Grund dieses Zusammenhangs liegt darin, dass die algebraischen Functionen eben insoweit den Charakter periodischer Functionen gewinnen, als sie complexe Factoren enthalten. Sobald die Wurzeln einer Function $n$ ten Grades complex werden, so wird die Function periodisch, indem sie ebenso viele periodisch auf einander folgende Werthe annimmt, als ihr Grad beträgt. Diese Eigenschaft ist eine naturgemässe Folge der schon oben berührten Vieldeutigkeit der Functionen complexer Variabeln. Zu irgend einer reellen Zahl x kann man, wenn ihr Vorzeichen bestimmt ist, nur in e i n e r Weise und, wenn ihr Vorzeichen unbestimmt gelassen ist, nur auf z w e i Weisen gelangen, da das System der reellen Zahlen nach zwei entgegengesetzten Richtungen einfach ausgedehnt ist. Zu einer complexen Zahl $x + iy$ dagegen kann man auf vielfältige Weise gelangen, und die sämmtlichen Wege lassen sich, da ein und derselbe Punkt ihren Anfangs- und Endpunkt bildet, immer als Perioden einer zusammengesetzten Bewegung ansehen. In der Gleichung $x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ist dies unmittelbar ausgedrückt, da $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ wegen der Beziehungen $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi + 4\pi) \ldots$, $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2\pi) \ldots$ u. s. w. vieldeutige Grössen sind.

Wenn auf diese Weise die trigonometrischen Functionen sich unter bestimmten Bedingungen aus den algebraischen entwickeln, so ist es nun eine naheliegende Folgerung, dass sie auch mit ihnen auf die allgemeine analytische Form sich zurückführen lassen. Nur ist dabei wegen der Periodicität der Functionen vorauszusetzen, dass die Glieder der Reihe abwechselnde Vorzeichen annehmen. In der That erhält man, wenn man erwägt, dass $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ist, und wenn man aus den be-

kannten Beziehungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin 2x = 2 \sin x \,.\, \cos x$ Bedingungsgleichungen für die Coëfficienten entwickelt, für die beiden Grundfunctionen Sinus und Cosinus die Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \dots$$

Diese Reihen lassen sofort eine nahe Beziehung erkennen zwischen den trigonometrischen Functionen und der Exponentialfunction. Entwickelt man die letztere für ein imaginäres Argument $ix$, so erhält man

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} - \frac{ix^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \dots,$$

woraus sich die Beziehung ergiebt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Der letztere Ausdruck stimmt mit dem allgemein für eine complexe Grösse gefundenen Functionsausdruck $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ überein, wenn in dem letzteren der Radiusvector $r$ gleich der Einheit angenommen wird. Demnach lassen sich die trigonometrischen Functionen als Exponentialfunctionen imaginärer Argumente betrachten, und complexe Grössen sowie periodische Functionen können ebensowohl in der Form der trigonometrischen Function wie in derjenigen der Exponentialfunction dargestellt werden. Wie wir die trigonometrische Function aus der algebraischen sich entwickeln sahen, sobald sich diese auf complexe Werthe bezieht, so geht sie aus der Exponentialfunction dann hervor, wenn in der letzteren die willkürlich Veränderliche imaginär wird.

Auf diesen periodischen Eigenschaften beruht schliesslich auch die Möglichkeit der Anwendung der trigonometrischen Functionen zum Ausdruck ganz beliebiger und beliebig wechselnder Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen. Denn wenn man die trigonometrischen Functionen in solcher Weise combinirt, dass sie unregelmässig wechselnde und veränderliche Perioden darstellen, so wird auf die Form derselben jede willkürliche Function gebracht werden können. In dieser Hinsicht kann die Darstellung einer complexen Grösse durch die Verbindung einer Sinus- und Cosinusfunction als einfaches Vorbild gelten, nach welchem das Princip der Entwicklung der Functionen in Reihen auf willkürliche Functionen anwendbar wird. In der von Fourier für eine willkürliche Function $f(x)$ aufgestellten unendlichen Reihe

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots$$
$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \dots$$

kommt es bloss auf die geeignete Bestimmung der Coëfficienten an, um

dieselbe auf beliebige Reihen zu einander gehöriger oder willkürlich mit einander verbundener Zahlen anwendbar zu machen. Diesem Umstand verdankt jene Reihe, von der unter besonderen Bedingungen die erste oder zweite Hälfte allein benützt werden kann, ihre fruchtbare Anwendung in der mathematischen Physik.

Wenn jedoch die periodischen Abhängigkeitsbeziehungen, die der mathematischen Untersuchung unterworfen werden, nicht willkürlicher Art sind, sondern Gesetzen gehorchen, die sich aus bestimmten analytischen Operationen ableiten lassen, und wenn dabei doch die Bedingung einer gleichförmigen periodischen Veränderung, wie sie den einfachen trigonometrischen Functionen zu Grunde liegt, nicht verwirklicht ist, so ergiebt sich eine neue mathematische Aufgabe: sie besteht in der Aufstellung periodischer Functionen von zusammengesetzterer Art, welche zu den einfachen trigonometrischen Functionen sich ähnlich verhalten, wie sich eine nach einem verwickelteren Gesetz erfolgende periodische Veränderung verhält zu der einfachen Veränderung der Bogen und Dreiecksseiten im Kreise. Die Lösung dieser Aufgabe setzt aber in ihren ersten Grundbedingungen schon die Hülfsmittel der Infinitesimalmethode voraus. Wir sind daher genöthigt, zu der Erörterung dieser letzteren fortzuschreiten, auf die überdies bereits der allgemeine Functionsbegriff bei der Untersuchung der Kriterien der Stetigkeit hinführte.

## 2. Der Differentialbegriff.

### a. Allgemeine Entwicklung des Differentialbegriffs.

Aus der Anwendung der Zahl auf stetige Grössen ist zunächst, wie wir sahen, die irrationale Zahl, aus dieser die algebraische Verallgemeinerung der arithmetischen Methoden und aus der letzteren endlich der Begriff der analytischen Function als der Abhängigkeitsbeziehung zwischen stetig veränderlichen Grössen hervorgegangen. So lange es sich nun allein darum handelt, aus einer durch ein bestimmtes Gesetz vorgeschriebenen Abhängigkeitsbeziehung diejenigen Werthe einer Veränderlichen abzuleiten, welche bestimmten Werthen anderer willkürlich veränderlicher Grössen entsprechen, so überschreitet diese Aufgabe im allgemeinen nicht die bisher eingehaltenen Grenzen der Analysis. Ist nur die Gleichung gegeben, welche die Function ausdrückt, so kann durch Einführung der speciellen Werthe des Argumentes auch die Aufgabe gelöst werden. Ebenso kann man zu der Aufstellung von Gleichungen für die Functionsbeziehungen mittelst der wiederholten Ausführung der gewöhnlichen arithmetischen Operationen gelangen, wenn sich eine zusammengesetzte Function in eine begrenzte Anzahl linearer Functionen zerlegen lässt, was bei den algebraischen Functionen immer zutrifft, oder wenn die Abhängigkeitsbeziehung

für alle Werthe der Function einer bestimmten durch eine einfache Exponential- oder Kreisfunction gegebenen Regel folgt, wie dies bei den elementaren Formen der transscendenten Functionen der Fall ist. Hier überall hat man es zwar nicht bloss mit veränderlichen Grössen, sondern auch mit veränderlichen Beziehungen zwischen ihnen zu thun; aber die Constanz des Gesetzes, welchem die Function folgt, gestattet für einen weiten Bereich von Aufgaben, von dieser Veränderlichkeit zu abstrahiren.

Dagegen ist dies nicht mehr möglich, sobald die constanten Beziehungen, welche der analytische Ausdruck einer Function enthält, nicht ausreichen, um mit ihrer Hülfe auch veränderliche Beziehungen aufzufinden. So ist es zwar für einfachere algebraische Curven leicht, die Richtung der Tangente zu ermitteln, welche an irgend einen durch gegebene Coordinaten bestimmten Punkt gelegt werden kann, indem man aus der Gleichung der Curve analytisch die Gleichung derjenigen Geraden ableitet, welche der Tangente entspricht. Bei den höheren algebraischen Curven wird aber diese Aufgabe sehr verwickelt, und bei den transscendenten ist sie auf algebraischem Wege gar nicht mehr zu lösen. Da die Richtung der Tangente stetig von Punkt zu Punkt sich verändert, so kann eine allgemeingültige Methode zur Lösung des Tangentenproblems in der That nur aufgefunden werden, wenn es gelingt, der stetig veränderlichen Richtung einer Curve in dem allgemeinen Ausdruck für die Tangente Rechnung zu tragen. Ebenso ist es in der Regel nicht möglich, durch die gewöhnlichen arithmetischen Hülfsmittel zu ermitteln, welche Werthe von y in einer Function $y = f(x)$ Maximal- oder Minimalwerthe sind, die zwischen Aenderungen von entgegengesetzter Richtung liegen. Da solche ausgezeichnete Werthe der Function Wendepunkte zwischen vollkommen stetigen Aenderungen darstellen, so setzt ihre Ermittelung im allgemeinen ebenfalls die Berücksichtigung dieser stetigen Aenderungen voraus. Die nämliche Forderung pflegt sich endlich dann einzustellen, wenn es sich darum handelt, den gesammten Betrag aller der Werthe zu bestimmen, welche eine Function annimmt, wenn ihre Argumente sich stetig zwischen gewissen Grenzen verändern. Hierher gehört also z. B. die Bestimmung der Länge einer Curve, des Flächeninhalts einer von einer Curve begrenzten ebenen Fläche, einer krummen Oberfläche, u. s. w. Gerade hier übersteigen schon verhältnissmässig elementare Aufgaben, wie die Messung der Kreisperipherie, die Hülfsmittel der niederen Arithmetik. Aufgaben dieser Art sind es daher, durch welche der Begriff der stetig veränderlichen Function Eingang in die analytische Untersuchung gefunden hat. Da aber unsere Vorstellungen ebenso wie die Dinge ausser uns in einem stetigen Flusse von Veränderungen begriffen sind, so hat durch diese letzte Erweiterung erst der Functionsbegriff diejenige Form angenommen, in welcher er den Objecten seiner Anwendung vollkommen adäquat geworden ist. So schliesst mit den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode der Kreis von Entwicklungen ab, welcher mit dem primitiven Begriff der positiven ganzen Zahl begonnen

hat, und aus dem wir alle fundamentalen Methoden der Mathematik allmählich entspringen sahen.

Der Begriff der stetigen Aenderung einer Function bedarf jedoch einer angemessenen Fixirung, wenn er eine arithmetische Verwendung soll finden können. Eine solche kann nur darin bestehen, dass man sich die veränderliche Beziehung, die an sich die numerische Messung ausschliesst, in Elemente zerlegt denkt, in denen die Veränderung aufgehoben ist. So entsteht der Grundbegriff der Infinitesimalmethode, der Differentialbegriff. Zur näheren Begründung desselben kann man aber auf verschiedenen Wegen gelangen. Einerseits erwächst er mit innerer Nothwendigkeit aus den einzelnen Gebieten seiner Anwendung; anderseits ergiebt er sich als eine unerlässliche Weiterbildung des allgemeinen Functionsbegriffs. Geht man von den in der Anschauung gegebenen Beziehungen aus, so verknüpft sich der Begriff der stetigen Aenderung am unmittelbarsten mit der Vorstellung der Bewegung: sie liegt der Fluxionsmethode Newton's zu Grunde. Eine zweite Quelle desselben von noch allgemeinerer Anwendbarkeit ist in der Betrachtung geometrischer Objecte gegeben: hieraus ist der Leibniz'sche Differentialbegriff hervorgegangen. Sodann führt der Grundbegriff der Arithmetik, die Zahl, auf einem allgemeineren Wege zu der nämlichen Auffassung. Der so entstandene Differentialbegriff Euler's nöthigt aber, sobald man das Differential in seinem Verhältniss zu den ursprünglichen Grössen unter dem Gesichtspunkte der Function auffasst, zu dem letzten und allgemeinsten Infinitesimalbegriff, zu Lagrange's derivirter Function.

Diese verschiedenen Begründungen des Differentialbegriffs sind an sich vollkommen mit einander vereinbar. Aber bei der Aufstellung derselben sind ausserdem Gegensätze der Anschauungen wirksam gewesen, die theils mit den Schwierigkeiten des unteren und oberen Grenzbegriffs, theils mit der verschiedenen Auffassung der mathematischen Grundbegriffe zusammenhängen. (Vgl. oben S. 85 und 126.) Indem der mathematische Realismus das Element einer veränderlichen Beziehung als ein wirklich existirendes denkt, ist er geneigt, in dem Differential eine elementare Grösse zu sehen, die einen ebenso fest bestimmten Werth besitze wie die endliche Grösse, von der sie sich nur dadurch unterscheide, dass sie nicht messbar sei. Diesem unteren steht das Unendliche als der obere absolute Grenzbegriff gegenüber. Dem mathematischen Nominalismus dagegen gilt das Differential lediglich als ein Hülfsbegriff des rechnenden Denkens. Eine wirklich momentane Veränderung giebt es nicht; denn jede noch so kleine Zeit-, Raum- oder Zahlgrösse lässt sich weiter getheilt denken. Wir begnügen uns daher, eine derartige Theilung als Forderung aufzustellen und in der weiteren Rechnung so zu verfahren, als wenn die Forderung erfüllt wäre. Diesem Postulat einer unteren Grenze wird dann das Unendliche als eine ähnliche Fiction einer oberen Grenze, die in beliebigen Annäherungen erreicht werden könne, gegenübergestellt. Auf diese Weise

bemächtigen sich hier die entgegengesetzten mathematischen Anschauungen der verschiedenen Gestaltungen der beiden Grenzbegriffe. Der Realismus behandelt das Differential als eine transfinite, der Nominalismus als eine infinite Grösse. Dabei werden aber freilich die Standpunkte nicht immer folgerichtig festgehalten. So schwankt schon Leibniz zwischen beiden, obgleich ursprünglich sein philosophischer Gegensatz zu Newton gerade darin besteht, dass dieser den infiniten, jener den transfiniten Begriff vertritt. Unter den Nachfolgenden machte Euler den Versuch, den letzteren festzuhalten, während hauptsächlich d'Alembert und Lagrange die mathematische Folgerichtigkeit und Fruchtbarkeit des infiniten Grenzbegriffs ins Licht setzten. Trotzdem hat man noch in neuerer Zeit die Gleichberechtigung beider Standpunkte vertheidigt*). Nun haben wir in der That gesehen, dass die beiden Formen der Grenzbegriffe, die diesem Streit zu Grunde liegen, ihre logische Berechtigung besitzen. Aber es ist zugleich aus den für beide Begriffe gewonnenen Bestimmungen ersichtlich, dass innerhalb der Infinitesimalmethode nur die infiniten Grenzbegriffe zulässig und verwerthbar sind. Denn diese Methode ist aus der Untersuchung stetig veränderlicher Functionen hervorgegangen. Innerhalb dieser Untersuchung kann es sich aber immer nur um denjenigen Grenzbegriff handeln, welcher die Grenze einer veränderlichen Grösse bezeichnet. Wenn es hierfür noch eines Beweises bedarf, so wird derselbe durch die Entwicklung der Infinitesimalbegriffe geliefert. Denn so wenig man sich bei derselben auch des verborgenen Kampfes bewusst gewesen ist, welchen hier die beiden Unendlichkeitsbegriffe mit einander führten, so kann es doch keinem Zweifel unterliegen, dass die Auffassungen, die Newton in seiner Grenzmethode und Lagrange in seinem Functionencalcül zur Geltung gebracht, den Sieg behauptet haben. Dieser Sieg kann aber nicht als ein ephemerer Erfolg angesehen werden, sondern er ist daraus entsprungen, dass jene Auffassungen theils die naturgemässen Grundlagen für die allgemeine Anwendung der Methode abgeben, theils diese in die unmittelbarste Verbindung mit den sonstigen Entwicklungen des Zahl- und Functionsbegriffs bringen.

---

*) P. du Bois-Reymond, Allgemeine Functionentheorie, I, S. 58 f. Der Verf. ist, wie ich glaube, zu seiner Auffassung nicht bloss durch die Verkennung der beiden Formen des Unendlichkeitsbegriffs, sondern auch durch den Umstand geführt worden, dass er die Ansichten des Realismus und des Nominalismus über das Wesen der mathematischen Begriffe überhaupt für gleich berechtigt hält. Wir haben aber gesehen, dass in dieser Beziehung beide Standpunkte unhaltbar sind, weil sie die Natur der mathematischen Abstraction entweder übersehen oder unrichtig auffassen Vgl. hierzu oben S. 95 f.

### b. Der phoronomische Differentialbegriff.

Die Vorstellung der Bewegung reicht zwar nicht aus, um den Differentialbegriff in seiner ganzen Allgemeinheit zu erschöpfen; aber für seine einfachsten Anwendungen liefert sie die anschaulichste Darstellung. Um den Begriff der Bewegung loszulösen von allem, was für ihn unwesentlich ist, müssen wir ihn beschränken auf die abstracte Auffassung einer Ortsveränderung in der Zeit, dagegen von der Form des zurückgelegten Weges vollkommen absehen. In dieser abstracten Auffassung enthält der Begriff der Bewegung Zeit und Raum als fortwährend fliessende Grössen oder Fluenten nach dem Ausdrucke Newton's, und zwar die Zeit als eine gleichförmig wachsende Grösse, den Raum als eine Grösse, die nach den verschiedensten Gesetzen mit dem Wachsthum der Zeit sich verändern kann. Denkt man sich die Zeitgrössen auf einer Abscissenlinie, die Ortsveränderungen als zu ihr senkrechte Ordinaten aufgetragen, so liefert die durch die Verbindung der letzteren gewonnene Curve ein Bild der Geschwindigkeit und ihres Wechsels in jedem Momente der Bewegung. Indem man nun jede beliebige Grössenänderung als eine Bewegung auffasst, die in einer gewissen Zeit sich vollzieht, gewinnt man in dem einzelnen Zeitmoment und in der demselben entsprechenden momentanen Geschwindigkeit oder in den von Newton so genannten Fluxionen elementare Begriffe, welchen die dem Begriff der Veränderung mangelnde Constanz zukommt, während die Vorstellung eines stetigen Flusses, ohne welche keine Veränderung möglich ist, in ihnen erhalten blieb*). Die Schwierigkeiten des Differentialbegriffs sind dadurch nicht beseitigt, aber sie sind in den fundamentaleren Begriff der Bewegung zurückverlegt, und sie müssen darum auch zunächst durch die Zergliederung dieses Begriffes gelöst werden.

Nun ist es bekanntlich von dem Eleaten Zeno bereits als ein Widerspruch in dem Begriff der Bewegung angesehen worden, dass dieselbe in fortwährendem Flusse begriffen und doch in einzelne Momente zerlegbar sei, in denen der bewegte Körper bestimmte Orte im Raume einnehme. Herbart hat hier den Ausweg eingeschlagen, dass er die Zeit aus unveränderlichen Zeitpunkten bestehen lässt, so dass der Zenonische Satz wirklich seine Gültigkeit behält: das Bewegte ruht in jedem Punkte seiner Bahn. Die Bewegung selbst wird dann zu einem objectiven Schein, und der angebliche Widerspruch, der im Begriff der Bewegung liegt, verschwindet, weil es in der Welt des Realen weder eine stetige Aenderung noch überhaupt ein Continuum giebt**). Uns ist mit dieser Auskunft wenig geholfen. Denn der Differentialbegriff bezieht sich gerade auf jenen objectiven Schein Herbart's, in welchem nur stetige Aenderungen vor-

*) Newtoni Methodus Fluxionum, Opuscula I, p. 54.

**) Herbart, Metaphysik, II, §. 284 f. (Werke Bd. 4, S. 233.)

kommen. In Wahrheit fällt aber dem Eleatischen Widerspruch nicht eine Vermengung des Intelligibeln und Sinnlichen, sondern zunächst nur eine Verwechslung jener beiden Grenzbegriffe zur Last, denen wir arithmetisch den gleichen Werth null beilegen, obgleich wir jedesmal mit diesem Werth einen verschiedenen Begriff verbinden. (Vgl. S. 126.) Die Bewegung des Pfeils in jedem Punkt seiner Bahn ist wirklich gleich null, aber diese Null ist nicht die aufgehobene, sondern die verschwindende Grösse. Jene würde, auch wenn wir sie unendlich oft wiederholt dächten, immer gleich null bleiben; diese ist das Resultat einer Zerlegung, die man sich ins unendliche fortgesetzt denkt, und aus der, wenn der Zerlegungsprocess umgekehrt wird, nothwendig wieder endliche Grössen entstehen müssen. Diese Vertauschung der beiden Formen des Grenzbegriffs wird bei dem Zenonischen Beweis noch unterstützt durch den Schein der Wahrnehmung. Wenn man sich den einzelnen Moment der Bewegung für sich isolirt vorstellt, so entsteht das Bild des ruhenden Pfeils. Doch der Begriff der objectiven Bewegung verlangt, dass die einzelne Wahrnehmung mittelst der Ergebnisse der ihr vorangehenden und nachfolgenden Wahrnehmungen ergänzt werde. Nur auf diesem Wege lässt sich entscheiden, ob der momentane Ort des bewegten Körpers constant bleibt oder sich stetig verändert. So erweist sich der Unterschied der wirklichen und scheinbaren Ruhe nur als ein anschauliches Beispiel für den Unterschied der beiden Formen des Nullbegriffs. Da aber die Fluxionsmethode der Auffassung der veränderlichen Functionsbeziehung den Begriff der continuirlichen Bewegung substituirt, so hat in ihr selbstverständlich der absolute Nullbegriff keine Stelle, sondern sie denkt sich die beiden Fluenten, welche den Begriff der Bewegung zusammensetzen, die Zeit und den Raum, in ihre Elemente, in Zeitmomente und geometrische Punkte, zerlegt. In charakteristischer Weise bezeichnet daher Newton die zu den Fluenten x und y gehörigen Fluxionen durch einen über die Buchstabensymbole gesetzten Punkt: $\dot{x}$ bedeutet zunächst den nach dem Ablauf der Zeit x eintretenden Zeitpunkt, $\dot{y}$ den nach dem Durchlaufen des Raumes y erreichten Raumpunkt. Aber da Zeit und Raum bei der Bewegung fliessende Grössen sind, so gewinnen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zugleich die Bedeutung der dem Zeitpunkt $\dot{x}$ entsprechenden Geschwindigkeit des Abflusses der Zeit und der dem Raumpunkt y entsprechenden Geschwindigkeit der Ortsveränderung. Statt immerwährend auf die Grundbedeutung von x und y zurückzugehen, zieht Newton überdies im allgemeinen es vor, die Fluxionen unmittelbar als die momentanen Geschwindigkeiten des Wachsthums der beiden Coordinaten einzuführen, eine Uebertragung, durch welche die geometrische Verwendung der Methode erleichtert wird. Jene ursprüngliche Bedeutung der beiden Fluxionen kommt aber darin zur Geltung, dass stets die Geschwindigkeit $\dot{x}$ für alle Werthe der Fluenten x als constant angesehen wird, während die zugehörige Geschwindigkeit $\dot{y}$ eine wechselnde sein kann. Da nun aber $\dot{x}$ und $\dot{y}$ momentane Geschwindigkeiten bedeuten, so muss, wenn man

die Werthe des Verhältnisses $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ bestimmen will, die in einem gegebenen Moment stattfindende Bewegung mit der vorangegangenen und nachfolgenden in Beziehung gesetzt werden, wozu ja ohnehin die stetige Natur der Bewegung herausfordert. Zu diesem Zweck bedient sich Newton eines Umweges, um den Fluxionsbegriff in grösserer Strenge festhalten zu können. Er sondert nämlich die Begriffe des Zeitverlaufs und der Ortsveränderung wieder in je zwei Begriffe, indem er die Fluxionssymbole $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bloss Geschwindigkeiten bedeuten lässt und die Zeit- und Raumwerthe, auf welche sich diese Geschwindigkeiten beziehen, welche aber beide gleich null sind, besonders bezeichnet. Insofern nun Geschwindigkeiten bestimmter Zeit- und Raumgrössen zu ihrer Messung bedürfen, behandelt dann Newton $\dot{x}$ und $\dot{y}$ als messbare Zahlgrössen, welche erst dadurch gleich null werden, dass man die Zeit und den Raum, innerhalb deren diese Geschwindigkeiten angenommen werden, gleich null setzt. Die so entstehenden Producte $\dot{x} \,.\, 0$ und $\dot{y} \,.\, 0$ nennt er die Momente der Zeit- und der Raumgeschwindigkeit. Seine Methode, um zu den Differentialien bestimmter Functionen zu gelangen, besteht dann darin, dass er die Veränderlichen um diese Momente zunehmen lässt, in der Rechnung die Nullen wie wirkliche Zahlen behandelt, schliesslich aber alle Glieder hinweghebt, welche die Null als Factor enthalten. Ist z. B. die einfache Function $y = x^2$ gegeben, so setzt Newton $y + \dot{y}0 = (x + \dot{x}0)^2 = x^2 + 2x\dot{x}0 + \dot{x}^2 0^2$, und schliesst daraus, da $(y + \dot{y}0) - y = (x + \dot{x}0)^2 - x^2$ sein muss:

$$\dot{y}0 = 2x\dot{x}0 + \dot{x}^2 0^2, \quad \dot{y} = 2x\dot{x} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Man sieht deutlich, dass diese Einführung der Momente $\dot{x}0$ und $\dot{y}0$ nur ein Kunstgriff ist, welcher dazu dienen soll, in der Gleichung $\dot{y}0 = 2x\dot{x}0 + \dot{x}^2 0^2$ das zweite Glied hinwegzuschaffen. In Wahrheit operirt man nur mit den Begriffen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, der momentanen Zeitgeschwindigkeit und der momentanen Ortsveränderung. Der Hervorhebung, dass hier die Ausdehnung der Zeit und des Raumes gleich null sei, bedarf es gar nicht: dies liegt in den Begriffen von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ schon eingeschlossen, daher auch in dem endlichen Ergebnisse die letzteren allein genügend sind. Hätte Newton einfach bemerkt, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ gleich null sind und desshalb, wo sie einzeln oder mit einander multiplicirt vorkommen, hinwegfallen, dass dagegen das Verhältniss $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ darum doch einen bestimmten Werth haben könne, so würde er ohne die Zwischenrechnung mit der Null zu seiner Fluxionsgleichung gelangt sein. Aber es wäre dazu allerdings ein Hinausgehen über den Begriff der momentanen Bewegung erforderlich gewesen; denn der Nachweis, dass der Quotient $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ im allgemeinen einen bestimmten

Werth besitzt, fordert eine Berücksichtigung des ganzen Verlaufs der Bewegung. Eine solche liegt nun zwar schon in der Natur der Aufgaben, welche die Fluxionenrechnung behandelt. Eine gegebene Gleichung $y = f(x)$ ist ja stets ein Ausdruck für den ganzen Verlauf der Function, und die Differentialgleichung, welche für einen bestimmten Moment das Wachsthum der Veränderlichen bestimmt, kann eben darum nur aus der ursprünglichen Functionsgleichung abgeleitet werden. Sobald man aber bei der Ableitung des Fluxionsbegriffs sogleich auf die Beziehung der momentanen Veränderung zu der vorangehenden und nachfolgenden Rücksicht nimmt, so führt dies zur geometrischen Darstellung der Bewegung und damit zum geometrischen Differentialbegriff.

Noch in andern Beziehungen zeigt sich die Vorstellung der Bewegung ungenügend. Ein Mangel derselben liegt namentlich darin, dass sie, da der Begriff der Bewegung nur zwei Fluenten, die Zeit und den Raum, enthält, auf Functionen zwischen mehr als zwei Veränderlichen nicht anwendbar ist. Newton selbst hat daher für solche Zwecke zu geometrischen Veranschaulichungen gegriffen, welche dem Geist der Fluxionsmethode eigentlich fremd sind. So nöthigt der phoronomische Differentialbegriff von verschiedenen Seiten her zu einer Weiterbildung, welche ihn in den geometrischen überführt.

### c. Der geometrische Differentialbegriff.

Eine Function von der Form $y = f(x)$ wird geometrisch dargestellt durch eine Curve, in welcher einem gleichförmigen Wachsthum der Abscissen ein Wachsthum der Ordinaten entspricht, dessen Gesetz durch jene Gleichung bestimmt ist. Wenn die Differenz $x_2 - x_1$ constant bleibt, so kann daher die zugehörige Differenz $y_2 - y_1$ im allgemeinen sehr verschiedene Werthe annehmen. Nur in einem Fall bleibt auch $y_2 - y_1$ constant, dann nämlich, wenn die Function $y = f(x)$ eine lineare ist. Auf diesen einfachsten Fall lässt sich nun eine jede Function zurückführen, wenn man die Voraussetzung macht, dass die Differenzen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ unendlich kleine Grössen bedeuten. Denn ein unendlich kleines Stück einer beliebigen Curve kann immer als eine gerade Linie angesehen werden. Das betreffende Curvenstück fällt dann seiner Richtung nach vollständig mit der Tangente der Curve zusammen. Auf diesen Begriff unendlich kleiner Differenzen der Coordinaten gründete Leibniz die Bezeichnungen $dx$, $dy$ für die Differentiale der Veränderlichen. Geometrisch aber bedeuten $dx$ und $dy$ die Katheten eines unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Tangente ist. Die Seiten dieses »Triangulum characteristicum«, wie Leibniz es nannte, sind, ebenso wie dessen Flächeninhalt, unendlich klein; dennoch besteht zwischen denselben ein bestimmtes Verhältniss, welches durch Zahlen ausgedrückt werden kann, und welches

ungeändert bleibt, wenn man sich durch ein stetiges und gleichförmiges Wachsthum das unendlich kleine Dreieck in ein ihm ähnliches Dreieck von endlicher Grösse übergeführt denkt. Da nun die Tangente als Hypotenuse trigonometrisch durch das Verhältniss der beiden andern Seiten bestimmt wird, so misst dieses oder der Quotient $\frac{dy}{dx}$ die Richtung der Curve an dem betreffenden Punkte, und die nächste Aufgabe der Differentialrechnung ist gelöst, wenn es gelingt, aus der aufgestellten Functionsgleichung $y = f(x)$ den Werth jenes Quotienten in allgemeingültiger Weise zu gewinnen.

Man sieht sofort, dass der wesentliche Unterschied dieses geometrischen Differentialbegriffs von dem Fluxionsbegriff in der Einführung der unendlich kleinen Grösse besteht. Die Fluxion wurde als eine momentane Bewegung angesehen. Hier dagegen macht es der geometrische Ausgangspunkt unmöglich, von der Ausdehnung ganz zu abstrahiren. Die Seiten des charakteristischen Dreiecks verschwinden zwar im Vergleich mit jeder gegebenen Grösse, aber sie können niemals gleich null werden. Dadurch hat man den Vortheil, dass die Beziehung der momentanen Aenderung zu der vorangegangenen und nachfolgenden, die bei der Fluxionsmethode Schwierigkeiten bereitet, hier von Anfang an schon in den Differentialbegriff aufgenommen ist. Dafür aber büsst dieser selbst seine Strenge ein. Die Annahme, dass ein unendlich kleines Stück einer Curve einer geraden Linie gleichkommt, genügt zwar vollkommen, um praktisch zu richtigen Resultaten zu gelangen, aber diese Resultate erscheinen nur als Annäherungen, ähnlich wie bei der in dieser Beziehung auf gleichem Boden stehenden so genannten Exhaustionsmethode des Archimedes. Leibniz selbst suchte dieser Schwierigkeit gelegentlich zu entgehen, indem er das Differential als das letzte untheilbare Element einer Grösse auffasste und erklärte, eine Differenz $x_2 - x_1$ sei $dx$, wenn $x_2$ und $x_1$ die zwei »einander nächsten« Werthe von $x$ bezeichneten. In gleicher Absicht verglich er das Verhältniss der Differentialien zu den ursprünglichen Grössen mit dem Verhältniss arithmetischer Reihen von verschiedener Ordnung. Auf diese Weise hob er eben den Begriff der Stetigkeit, dessen Bedeutung für die Infinitesimalmethode er sonst mit Recht betonte, gerade bei dem Grundbegriff derselben wieder auf. Zugleich ist es ersichtlich, dass dieser Versuch, aus absolut untheilbaren und darum eigentlich discontinuirlichen Elementen die stetige Grösse entstehen zu lassen, mit dem metaphysischen Begriff der Monade in einer gewissen Beziehung steht. Bekanntlich sind aber die Grundgedanken der Differentialrechnung älter als die Ausbildung der monadologischen Vorstellungen. Es mag sein, dass gerade die Widersprüche, in die sich Leibniz durch den Begriff der Stetigkeit zu verwickeln meinte, wenn er nicht letzte untheilbare Elemente voraussetzte, bei der Bildung des Monadebegriffs mitgewirkt haben. Dass jene Schwierigkeiten nicht durch eine solche absolute Bedeutung, die man dem Diffe-

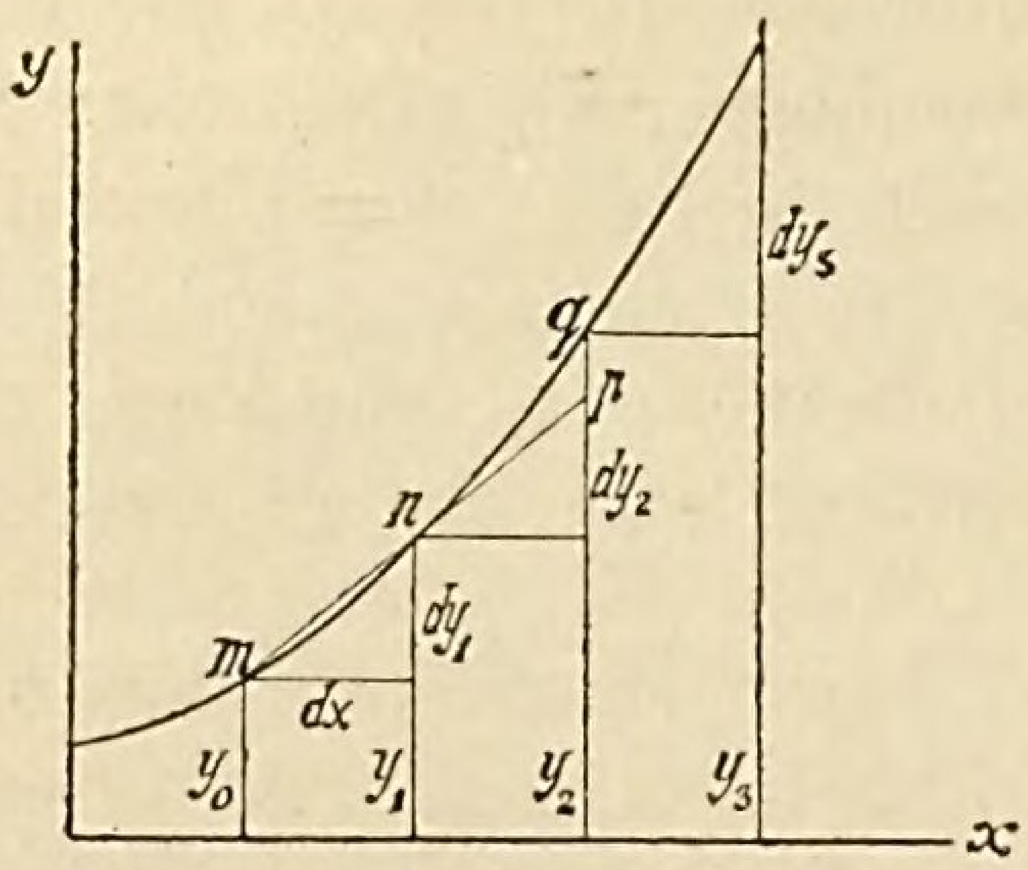
rential beilegt, gelöst werden können, dies zeigt nun aber sofort die Unterscheidung unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnung, zu der Leibniz selbst schon veranlasst wurde. In der That wird man auf rein arithmetischem Wege zu dieser Unterscheidung geführt, wenn man die Differentialausdrücke für bestimmte Functionen entwickelt; denn das Verfahren besteht hier immer darin, dass man die unendlich kleinen Grössen zweiter und höherer Ordnung gegen diejenigen erster Ordnung verschwinden lässt. So gewinnt man z. B. aus der Function $y = x^n$ das Differential $dy = nx^{n-1}\,dx$, indem man in dem Ausdruck $(x + dx)^n - x^n$ das Binomium in eine Reihe entwickelt, alle Glieder, welche eine höhere als die erste Potenz von $dx$ enthalten, weghebt, und dann $x^n$ subtrahirt. Nimmt man hier an, dass $dx$ aus einer Theilung $\frac{1}{\infty}$ hervorgegangen sei, so würden die höheren Potenzen $dx^2$, $dx^3$ ... durch die Brüche $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ ... dargestellt werden können. Bei der Motivirung des Verschwindens dieser höheren Differentialien schwankt aber Leibniz selbst noch zwischen zwei verschiedenen Auffassungen. Einerseits nämlich meint er, dieselben hätten, ähnlich den imaginären Grössen, eine bloss formale Bedeutung, da das Element $dx = \frac{1}{\infty}$ nicht mehr weiter getheilt werden könne; anderseits gesteht er zu, dass zwischen den unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung eine ähnliche Relation angenommen werden könne wie zwischen einem unendlich Kleinen erster Ordnung und einer endlichen Grösse*). Erst in der Folgezeit ist diese letztere Auffassung und damit überhaupt die Anschauung, dass das unendlich Kleine keine absolute, sondern nur eine relative Bedeutung besitze, zur Herrschaft gelangt. Es mochte dabei wohl hauptsächlich die bereits von Leibniz erkannte geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten mitwirken.

Im Sinne der Theorie des unendlich Kleinen bedeutet nun $dy$ die Differenz zweier einander unendlich nahe gelegener Ordinaten $y_1$ und $y_2$, und der Quotient $\frac{dy}{dx}$ als trigonometrische Tangente des Winkels, welchen das unendlich kleine Curvenstück mit der Abscissenlinie bildet, bestimmt die Richtung der Curve an der gegebenen Stelle. Bleiben für eine Reihe auf einander folgender unendlich kleiner Ordinatenunterschiede $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$ die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ die nämlichen, so ist die Richtung der Curve an der betreffenden Stelle constant, d. h. die Curve selbst ist hier eine gerade Linie. Sind dagegen jene unendlich kleinen Differenzen

*) Leibniz' mathematische Werke, herausgegeben von Gerhardt, V, S. 389.

von einander verschieden, so erhält man auch für den ersten Differentialquotienten eine Reihe von einander verschiedener Werthe $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx} \ldots$ Die Geschwindigkeit der Richtungsänderung wird dann offenbar gemessen durch die Differenzen $dy_2 - dy_1$, $dy_3 - dy_2 \ldots$, welche je nach dem Sinn der Richtungsänderung positiv oder negativ sein können. Geometrisch lässt sich aber eine Differenz $dy_2 - dy_1$ darstellen, wenn man die Endpunkte der beiden Ordinaten $y_0$ und $y_1$ durch die Gerade m n verbindet und diese Gerade bis zum Punkte p der nächsten Ordinate $y_2$ verlängert. Es entspricht dann das Stück p q der unendlich kleinen Differenz $dy_2 - dy_1$, welche symbolisch durch $d^2y$ bezeichnet wird. Führt man statt der absoluten Werthe $dy_2$, $dy_1$ ihre Verhältnisse zu den unendlich kleinen Zuwüchsen dx ein, so erhält man

Fig. 15.




$$d^2y = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) dx.$$

Nun besteht die Bedeutung der Richtungsänderung darin, dass das Verhältniss der Differenz dieser Quotienten zu dem unendlich kleinen Zuwachs dx aufgefasst wird. Die Gleichung geht also über in die folgende:

$$d^2y = \frac{\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}}{dx} \cdot dx^2 = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} dx^2,$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx},$$

welche letztere Gleichung eben nichts anderes aussagt, als dass zur Bestimmung der Richtungsänderung einer Curve an einem gegebenen Punkte der erste Differentialquotient, welcher die Richtung bestimmt, noch einmal der Operation der Differentiation in Bezug auf die unabhängig Veränderliche unterworfen werden muss. Die nothwendige Folge davon ist, dass im Nenner des zweiten Differentialquotienten der Zuwachs des Argumentes im Quadrat erscheint. Es ist klar, dass sich diese geometrischen sofort in phoronomische Vorstellungen übertragen lassen. Wie die Richtung oder der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Geschwindigkeit, so entspricht hier die Richtungsänderung oder der zweite Differentialquotient $\frac{d^2x}{dx^2}$ der Geschwindigkeitsänderung. Unter Befolgung des Permanenzprincips kann nun aber

die nämliche Operation, durch welche aus dem ersten der zweite Differentialquotient hervorgegangen ist, beliebig wiederholt werden, und man gewinnt so die unbegrenzte Reihe der höheren Differentialquotienten $\frac{d^3 y}{d x^3}, \frac{d^4 y}{d x^4} \cdots \frac{d^n y}{d x^n}$. Kann für dieselben auch eine anschauliche geometrische oder mechanische Bedeutung nicht mehr gefunden werden, so haben sie doch jedenfalls eine arithmetische Bedeutung, da, sobald man die Differentiation als eine reine Zahlenoperation auffasst, ihrer beliebigen Wiederholung keine Schranken gesetzt sind.

Mit dem so erweiterten Begriff des Differentials ist nun aber jene absolute Bedeutung, welche Leibniz demselben beizulegen geneigt war, nicht mehr zu vereinigen, sondern auf dem Boden der bisherigen geometrischen Betrachtungen bleibt nur noch der Begriff eines relativ unendlich Kleinen möglich, welcher zugleich die arithmetisch postulirte beliebige Wiederholung der Differentiation gestattet, da die Reihe der relativen Unendlichkeiten an und für sich keine Grenzen hat. Aber es gewinnt damit auch die Infinitesimalmethode jenen schon oben berührten Charakter eines blossen Annäherungsverfahrens, welcher um so unbefriedigender ist, als die Voraussetzungen, aus denen er entspringt, offenbar der Richtigkeit entbehren. Denn eine Curve ist in Wirklichkeit nicht aus geraden Linien, eine veränderliche Bewegung nicht aus gleichförmigen Bewegungen von irgend einer wenn auch noch so geringen Ausdehnung zusammengesetzt. Dazu kommt, dass die Auffassung des zweiten und der höheren Differentialquotienten als unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung brauchbar ist, so lange es sich darum handelt, dieselben bloss gegen den ersten Differentialquotienten verschwinden zu lassen, dass aber diese Deutung ungenügend wird, sobald dieselben eine reale Bedeutung gewinnen. Denn der Begriff der Richtungsänderung setzt zwar denjenigen der Richtung voraus, sicherlich aber wird durch die Annahme unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnung das Verhältniss beider Begriffe nicht zureichend bestimmt.

Diese Schwierigkeiten, welche die geometrische Deutung des unendlich Kleinen herbeiführt, sind nun auf das glücklichste vermieden in der eigenthümlichen Umgestaltung, welche der geometrische Differentialbegriff in der in ihren Grundgedanken zuerst von Newton in seinen »mathematischen Principien der Naturphilosophie« angegebenen und dann hauptsächlich durch Maclaurin und d'Alembert ausgebildeten so genannten Grenzmethode erfahren hat*). Der glückliche Griff dieser Umgestaltung des Leibniz'schen Verfahrens besteht darin, dass man bei ihr von einer beliebigen (endlichen) Differenz der Veränderlichen durch continuirliche Abnahme derselben auf den Grenzfall zurückgeht, wo die Differenz null wird, und dass man das Differential eben als diesen Grenzfall betrachtet. Geo-

*) Newton, Principia, liber I, sect. 1. Uebersetzung von Wolfers, S. 46.

metrisch lässt sich auch dieser Betrachtung das charakteristische Dreieck zu Grunde legen; aber die Hypotenuse desselben ist die zwischen den Punkten m und n der Curve gezogene Sehne, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen diese Sehne mit der Abscissenaxe bildet, wird durch den Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt. Denkt man sich jetzt den Punkt n dem m näher und näher rücken und schliesslich mit demselben zusammenfallen, so geht für diesen Grenzfall die Sehne in die Tangente und der Differenzquotient in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ über. Auch der zweite Differentialquotient gewinnt auf diesem Wege unmittelbar seine geometrische Bedeutung, ohne dass es nöthig wird, die Annahme von unendlich kleinen Grössen einzuführen. Denn der zweite Differenzquotient $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ bezeichnet nun die für einen bestimmten endlichen Unterschied $\Delta x$ stattfindende Richtungsänderung der Curve. Lässt man wiederum den Punkt n mit m zusammenfallen, so stellt der für diesen Grenzfall zurückbleibende Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ die Richtungsänderung der Curve im Punkte m dar, ebenso wie der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Richtung in diesem Punkte bedeutet hat.

Hiernach besteht die Grenzmethode theilweise in einer Umkehrung der Methode des unendlich Kleinen. Während man bei der letzteren die Veränderlichen von null an um eine unendlich kleine Grösse wachsen lässt, die gerade zureicht, um das Verhältniss ihres Wachsthums zu bestimmen, geht die Grenzmethode von einer beliebigen endlichen Zunahme der Veränderlichen aus, die sie allmählich bis auf null herabsinken lässt. Dadurch wird der Begriff des unendlich Kleinen umgangen. Es wird möglich, mit der nämlichen Strenge wie bei der Fluxionsmethode den Begriff der momentanen Aenderung festzuhalten, und es wird doch die für die Messung dieser Aenderung unerlässliche Vergleichung mit den vorangehenden oder nachfolgenden Zuständen ermöglicht. Die Grenzmethode vereinigt darum die Vortheile der Methoden von Newton und Leibniz, die begriffliche Strenge der ersteren und die grössere Allgemeinheit und praktische Brauchbarkeit der letzteren. Sie ist, wenn man von den Anwendungen des Differentialbegriffs ausgeht, die exacteste Begründung des letzteren. Denn sie wird den beiden Forderungen, dass die elementare Grössenänderung als eine streng momentane aufgefasst, und dass zur Bestimmung des Gesetzes derselben der gesammte Verlauf der Veränderung berücksichtigt werde, gleichmässig gerecht. Diesen Vorzügen verdankt die Grenzmethode den Sieg, den sie allmählich über alle andern Begründungsweisen des Differentialbegriffs davongetragen hat. Jenes Verfahren des Zurückgehens von einer gegebenen Differenz auf den Grenzfall, wo dieselbe

null wird, welches die Grenzmethode im Anschluss an geometrische Vorstellungen einschlägt, lässt nun aber eine Verallgemeinerung zu, indem man den nämlichen Vorgang in arithmetischer Form auffasst.

### d. Der arithmetische Differentialbegriff.

Lässt man in einer Function $y = f(x)$ das Argument x um endliche Intervalle wachsen, so dass es successiv die Werthe $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x \ldots$ annimmt, so erscheint jene Gleichung als Ausdruck für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe. Die Differenzen der einzelnen Glieder dieser Reihe bilden eine Differenzreihe, deren allgemeines Glied mit $\Delta y$ bezeichnet werden kann. Aus dieser lässt sich eine zweite Differenzreihe entwickeln mit dem allgemeinen Glied $\Delta^2 y$, u. s. w. Die Zahl der Differenzreihen und der ihnen entsprechenden abgeleiteten Functionen $\Delta y$, $\Delta^2 y \ldots$ ist von der Beschaffenheit der ursprünglichen Function $y = f(x)$ abhängig. Ist diese z. B. vom ersten Grade, so wird schon $\Delta y$ constant, und demgemäss wird dann die zweite Differenz $\Delta^2 y$ und mit ihr jede höhere gleich null. Lässt man nun den Zuwachs $\Delta x$ des Argumentes zu null werden, und bezeichnet man diese zum Verschwinden gebrachte Differenz $\Delta x$ mit $dx$, so gehen die abhängigen Differenzen $\Delta y$, $\Delta^2 y \ldots$ ebenfalls in die verschwindenden Grössen $dy$, $d^2 y \ldots$ über. Obgleich sie sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach null sind, so werden doch die Verhältnisse, in denen sie zu einander stehen, im allgemeinen einen bestimmten numerischen Werth besitzen, da sie aus endlichen Grössen durch eine Operation von der Form $\frac{a}{\infty}$ hervorgegangen sind. (Vgl. S. 126.) Euler definirt daher die Differentiale als Grössen, deren arithmetisches Verhältniss stets gleich null sei, deren geometrisches Verhältniss aber jeden beliebigen Werth erreichen könne*).

Euler hat hierdurch zum ersten Mal klar darauf hingewiesen, dass von der Messung einer Differentialgrösse immer nur dann die Rede sein kann, wenn dieselbe zu andern Differentialgrössen in irgend ein Verhältniss gebracht wird. Von dieser Bemerkung datirt der vorwiegende Gebrauch des Differentialquotienten. Gleichwohl ist die Behauptung, dass das arithmetische Verhältniss aller Differentialgrössen dasselbe, nämlich gleich null sei, keine völlig correcte. Die Null ist ein Rechnungssymbol, welches jede beliebige verschwindende Grösse bezeichnen kann. Nur aus diesem Grunde ist es möglich, dass ein Quotient $\frac{dy}{dx}$, obgleich er nach dem absoluten Werth seines Zählers und Nenners in der That durch

---

*) Leonh. Euler, Institutiones calculi differentialis, Petrop. 1755, Cap. I bis IV.

den Bruch $\frac{0}{0}$ ausgedrückt wird, dennoch einen bestimmten endlichen Werth annehmen kann. Das Wahre von Euler's Bemerkung liegt also darin, dass die Division die einzige Operation ist, durch welche die Beziehungen verschwindender Grössen zu einander bestimmt werden können. Aber der Umstand, dass solche Beziehungen von verschiedener Art existiren, beweist eben zugleich, dass arithmetisch die Bedeutung der verschwindenden Grössen eine verschiedene ist, oder dass mit andern Worten diejenige Null, die eine verschwindende Grösse a repräsentirt, eine andere Bedeutung hat als die Null, die als Resultat einer Operation a — a zurückbleibt. Im ersteren Fall kann daher nicht bloss ein Quotient $\frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth, sondern auch eine Gleichung $0 = 0$ einen bestimmten Sinn haben.

Der arithmetische Differentialbegriff führt nun von selbst zu einer neuen Auffassung, sobald man den Gesichtspunkt, auf welchen derselbe gegründet ist, verallgemeinert. Betrachtet man nämlich die auf einander folgenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ als die Werthe, in welche die Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \ldots$ übergehen, wenn $\Delta x = 0$ wird, so muss auch das Verhältniss jener Differentialquotienten zu einander als conform dem Verhältniss dieser Differenzquotienten betrachtet werden. Nun lassen sich aber $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y \ldots$ als Functionen betrachten, welche von der ursprünglichen Function $y = f(x)$ abhängen, insofern dieselben die allgemeinen Glieder derjenigen Differenzreihen bezeichnen, welche zu der durch die Function $y = f(x)$ ausgedrückten Hauptreihe gehören. Demnach haben auch die Differenzquotienten und die Differentialquotienten die Bedeutung abgeleiteter Functionen, und speciell die letzteren bilden denjenigen Specialfall, wo in der ursprünglichen Function ein stetiges Wachsthum der Veränderlichen vorausgesetzt wird. Auf diese Weise führt die arithmetische Betrachtung, sobald man an die Stelle des Begriffs der Operation den allgemeinen der Function treten lässt, direct über zu der letzten Gestaltung des Differentialbegriffs, zu der derivirten Function.

### e. Der Begriff der derivirten Function.

Geht man von dem allgemeinsten Begriff der Analysis, von dem Begriff der Function aus, so lässt sich die Aufgabe der Infinitesimalmethode dahin feststellen, dass sie die stetigen Veränderungen der Function $y = f(x)$ für jede beliebige Veränderung des Argumentes ermittelt, dass sie also, wenn allgemein die letztere durch $\Delta x$ bezeichnet wird, die Umwandlung feststellt, die sich mit der Function $f(x)$ vollzieht, wenn dieselbe in die Function $f(x + \Delta x)$ übergeht. Da $\Delta x$ alle möglichen Werthe von null

an bis zu jeder beliebigen endlichen Grösse bedeuten kann, so sind, wenn diese Aufgabe auf analytischem Wege lösbar ist, alle Schwierigkeiten vermieden, welche bei den sonstigen Begründungen des Differentialbegriffs entweder die Annahme einer bloss momentanen Aenderung oder der Uebergang von einer endlichen zu einer verschwindenden Differenz bereitet. Lagrange ist es nun gelungen, jene Aufgabe zu lösen, indem er sich dabei des allgemeinen Satzes der Analysis bedient, dass jede Function in der Form einer Reihe dargestellt werden kann, die nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen fortschreitet*). Wir haben früher gesehen, dass dieser Satz aus der Zerlegung der Function in die arithmetischen Operationen, durch die sie entstanden ist, hervorgeht, und dass, da die Zahl dieser Operationen nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen eine begrenzte ist, als die allgemeinste Functionsform eine unendliche Reihe von der angegebenen Beschaffenheit angesehen werden muss (S. 179). Im gegenwärtigen Falle handelt es sich nun darum, zu bestimmen, wie die Function $f(x)$ sich verändert, wenn sie durch ein bestimmtes Wachsthum der Veränderlichen in eine Function $f(x + \Delta x)$ übergeht. Da hier nicht mehr $x$ selbst, sondern der Zuwachs $\Delta x$ als die willkürlich Veränderliche betrachtet wird, so ist es offenbar gerechtfertigt, diese Function nach aufsteigenden Potenzen von $\Delta x$ in eine Reihe zu entwickeln, welche die Form annimmt

$$A + B\,\Delta x + C\,\Delta x^2 + D\,\Delta x^3 \ldots$$

Hierin bezeichnen $A$, $B$, $C \ldots$ unbestimmte Coëfficienten, welche Functionen von $x$ sind. Die von $\Delta x$ freie Grösse $A$ ist aber offenbar $= f(x)$, weil, wenn $\Delta x = 0$ wird, auf der rechten Seite alle Glieder ausser dem ersten verschwinden und die Gleichung $f(x) = A$ übrig bleibt. Da die weiteren Coëfficienten $B$, $C$, $D \ldots$ ebenfalls irgend welche Functionen von $x$ sind, so erhält man demnach für die ursprüngliche Reihe die Form

$$f(x) + \Delta x \,.\, \varphi(x) + \Delta x^2 \,.\, \psi(x) + \Delta x^3 \,.\, \chi(x),$$

worin $\varphi$, $\psi$, $\chi \ldots$ die Bedeutung von Functionszeichen besitzen. Um das Verhältniss dieser abgeleiteten Functionen zu einander festzustellen, bedient sich Lagrange des Kunstgriffs, dass er in die Function $f(x + \Delta x)$ einen neuen Zuwachs $\delta$ einführt und die so entstehende neue Functionsform $f(x + \Delta x + \delta)$ in doppelter Weise entwickelt, einmal nämlich unter der Voraussetzung, dass $\delta$ ein Zuwachs von $x$, und sodann unter der Voraussetzung, dass es ein Zuwachs von $\Delta x$ sei. Da die Coëfficienten gleicher Glieder in beiden Reihen einander gleich sein müssen, so ergeben diese Entwicklungen eine Anzahl von Coëfficientengleichungen, aus denen sich das gesuchte Verhältniss der Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x) \ldots$ bestimmen lässt. Dieses Verhältniss findet seinen Ausdruck in der schliesslich für die Function $f(x + \Delta x)$ gewonnenen Reihe

*) Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. Édit. Paris 1806. Théorie des fonctions analytiques. Paris an V. Prem. part.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \,.\, f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} f'''(x) + \ldots,$$

in welcher die Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \ldots$ dem Gesetze folgen, dass jede aus der ihr vorangegangenen in übereinstimmender Weise gebildet ist. Dieses Gesetz für die auf einander folgenden derivirten Functionen ist aber das nämliche, welches die Bildung der Differentialquotienten beherrscht. Denn es ist, wie wir sahen, $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d \frac{d y}{d x}}{d x}$ oder allgemein $\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{d \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}}{d x}$. Die derivirten Functionen erster, zweiter, dritter ... Ordnung sind also mit den Differentialfunctionen entsprechender Ordnung identisch.

Der Werth dieser Ableitung besteht in dem unmittelbar mit Hülfe des Functionsbegriffs geführten Nachweis, dass der Differentialbegriff selbst ein Functionsbegriff ist, der sich überall da mit Nothwendigkeit ergiebt, wo in die Function der Begriff der stetigen Veränderung eingeführt wird. Bei den vorangegangenen Begründungen des Differentialbegriffs ergiebt sich diese Bedeutung desselben immer erst indirect, insofern man die geometrischen oder arithmetischen Beziehungen dem Begriff der Function unterordnet. Vor allem aber wird durch diese Ableitung das Verhältniss der Differentialien verschiedener Ordnung zu einander in exacter Weise bestimmt. Das Wesen der Infinitesimalmethode besteht jetzt darin, dass eine stetig veränderliche Function in die ursprüngliche Function und in eine an sich unbegrenzte Zahl aus ihr abgeleiteter Functionen zerlegt wird, die nach einem und demselben Gesetze successiv aus einander hervorgehen. Es tritt hierdurch sofort die nahe Beziehung hervor, in welcher der Infinitesimalbegriff zu dem Begriff des Irrationalen steht, welcher aus den nächstliegenden Anwendungen der Zahl auf stetige Grössen hervorging. Wie die stetige Grösse nur durch eine unbegrenzte Zahl von Divisionen arithmetisch gemessen werden kann, so ist die stetig veränderliche Function nur durch die Ableitung einer an sich unbegrenzten Zahl von derivirten Functionen zu erschöpfen. Auf diese Weise gewinnen sofort die Differentialquotienten höherer Ordnung ihre berechtigte Bedeutung, während die phoronomische und die geometrische Begründung des Differentialbegriffs allein dem ersten und zweiten einen bestimmten Sinn unterzulegen im Stande sind. Nur die arithmetische Auffassung der Differentiale als verschwindende Differenzen verschiedener Ordnung erreicht in dieser Beziehung die Methode der Derivation an Allgemeinheit, da sie in der That nichts anderes als eine Umkehrung derselben ist, die von den Operationen, welche die Function erzeugen, statt von dieser selbst ausgeht. In Folge der rein arithmetischen Auffassung der Operationen leidet aber jene Methode an dem Uebelstand, dass sie nur das quantitative Verhältniss der Differential-

quotienten verschiedener Ordnung zur Geltung bringt, indem sie dieselben analog den Differenzen verschiedener arithmetischer Reihen behandelt. Auch diesen Mangel beseitigt der Begriff der derivirten Function. Er vereinigt in sich die qualitative und die quantitative Bedeutung, die dem Differentialquotienten beigelegt werden kann. Die Richtung der Tangente an dem Punkt einer Curve ist abhängig von dem Gesetz, welches den allgemeinen Verlauf derselben angiebt, d. h. sie ist eine aus der ursprünglichen Function, welche durch die Curve repräsentirt wird, abgeleitete Function; ihrem arithmetischen Werthe nach betrachtet ist aber die letztere zugleich eine verschwindende Grösse. Die Richtungsänderung ferner ist zunächst abhängig von der Richtung, also eine aus der ersten derivirten Function abermals derivirte, und ihrem arithmetischen Werthe nach eine verschwindende Grösse zweiter Ordnung*).

Ist auf diese Weise der Begriff der derivirten Function die correcteste Gestaltung des Infinitesimalbegriffs, so entbehrt dagegen die ursprüngliche Begründung desselben theils der Anschaulichkeit, theils der leichten Anwendbarkeit. Zur vollständigen Erfassung des Wesens der Infinitesimalmethode ist daher seine Verbindung mit den eigentlichen Differentialbegriffen, namentlich mit dem arithmetischen und dem auf geometrische Anschauungen gestützten Grenzbegriff erforderlich. Wie überhaupt die Einsicht in das Wesen einer Function durch die Erkenntniss der arithmetischen Operationen, die zu ihr geführt haben, vermittelt wird, so bildet die arithmetische Ableitung der Differenzquotienten den angemessensten Weg für die Entwicklung der Differentialquotienten verschiedener Ordnung. Die Anwendung dieser arithmetischen Operation auf räumliche Grössen liefert sodann ein anschauliches Bild der Bedeutung, welche die gewonnenen Begriffe besitzen können, und der Nachweis, dass die Resultate der arithmetischen Operationen dem Functionsbegriff unterzuordnen sind, stellt schliesslich diese Bedeutung in einer allgemeingültigen Form fest.

## 3. Das Princip der Integration.

In dem Wesen einer jeden mathematischen Operation liegt es begründet, dass sie eine Umkehrung zulässt. Denn bei jeder Operation werden gegebene Grössen oder Grössenverbindungen nach einem bestimmten Gesetz in andere übergeführt. Vermöge der Constanz der befolgten Regel muss aber ein solches Verfahren umkehrbar sein. Kann irgend ein mathematischer Ausdruck A durch eine Operation $f_1$ in einen andern Ausdruck B übergehen, so giebt es also stets eine umgekehrte Operation $f_2$, durch welche B wieder in A übergeht. Doch muss dabei sogleich bemerkt werden, dass, wenn auch die erste Operation ein eindeutiges Resultat ergiebt,

*) Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, p. 118.

darum das Ergebniss der zweiten Operation nicht nothwendig ebenfalls eindeutig ist, sondern dass es von der Beschaffenheit jener Regel abhängt, welche die beiden Ausdrücke mit einander verknüpft, ob man aus B nothwendig A wieder gewinnen muss, oder ob man dasselbe nur neben einer unbestimmten Zahl anderer Resultate wiedergewinnen kann.

Von den einfachsten arithmetischen Operationen an ist uns dieses Verhältniss der Umkehrbarkeit immer wieder begegnet. In der Analysis hat sich dasselbe in der wechselseitigen Beziehung gewisser Functionsformen, der Exponentialfunctionen und Logarithmen, der trigonometrischen und der cyklometrischen Functionen, erneuert, und in dem letzteren Fall ergab sich bereits, dass die Umkehrung zu einem vieldeutigen Resultate führen kann. Da nun, wie die Entwicklung des Differentialbegriffs gelehrt hat, die Operation des Differenzirens stets aus einer gegebenen Function eine neue erzeugt, die mit der ursprünglichen nach einem bestimmten Gesetze zusammenhängt, so wird auch hier eine inverse Operation existiren, welche aus den abgeleiteten Functionen die ursprünglichen wieder herstellt. Diese inverse Operation ist die Integration.

Die nähere Bestimmung des Begriffs der Integration ist nun durchaus von der Anschauung abhängig, von welcher man bei der Bildung des Differentialbegriffs ausgeht. Indem die Fluxionsmethode die veränderliche Grösse unter dem Bild der abstracten Bewegung darstellt, werden ihr der Differential- und der Integralbegriff zu den einander entgegengesetzten Formen des Bewegungsproblems. Das Differenziren einer Function entspricht der Aufgabe: aus dem Raum, der bei einer nach einem bestimmten Gesetz erfolgten Bewegung zurückgelegt wurde, für jeden Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit zu finden; die Integration löst die umgekehrte Aufgabe: wenn die momentane Geschwindigkeit für jeden Zeitpunkt gegeben ist, den Raum zu finden, welcher durchlaufen wurde. Indem auf diese Weise die Fluxionsmethode nur die Verschiedenheiten der Veränderlichen betont, um deren Bestimmung im einen und im andern Fall es sich handelt, kommen bei ihr die fundamentalen Gegensätze der Operationen selbst nicht zur hinreichenden Geltung; sie verbergen sich hinter der nebenhergehenden Bemerkung, dass die Geschwindigkeit eine momentane, der Raum dagegen eine ausgedehnte Grösse ist.

Von diesem letzteren Gegensatze geht nun die Methode des unendlich Kleinen aus. Ihre Auffassung der beiden Operationen ist daher zunächst von dem Werth der Grössen bestimmt, welche aus diesen Operationen hervorgehen. Bedeutet das Differential eine unendlich kleine Grösse, so entspricht das Integral einer endlichen Grösse, und da man sich vorstellt, dass aus der Verbindung einer unendlich grossen Zahl unendlich kleiner Grössen eine endliche Grösse entstehen kann, so wird der Process der Integration zu einer speciellen Form der Summation, von der gewöhnlichen Summenbildung nur durch die beiden Bedingungen verschieden, dass die einzelnen Elemente keinen messbaren Werth besitzen, und dass

die Zahl der Verbindungen keine begrenzte ist. In so anschaulicher Weise aber auch diese Auffassung von den einfachsten Anwendungen der Integralrechnung Rechenschaft giebt, so leidet sie doch an der Ungenauigkeit des Differentialbegriffs, auf den sie sich stützt, und sie schiebt desshalb der Differentiation und Integration in Wirklichkeit andere Operationen unter, nämlich die Subtraction und die Addition.

Diese trotz der nützlichen Symbolik, welche von ihnen ausgegangen ist, unzureichenden Anlehnungen an die arithmetischen Elementaroperationen werden nun durch die Grenzmethode und die ihr verwandte exactere Fassung des arithmetischen Differentialbegriffs unmöglich gemacht. Bezeichnet der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniss der Function $y = f(x)$ zu ihrem Argumente x für den Fall, dass Function und Argument beide verschwinden, entspricht darum jener Quotient stets einem Bruch $\frac{0}{0}$, so kann der Rückgang zu der ursprünglichen Function unmöglich ein Verfahren der Addition sein. Es muss daher die Integration ebenso gut als eine Operation von specifischer Beschaffenheit angesehen werden wie die Differentiation, deren Umkehrung sie ist. Aus diesem Grunde hat Euler in der That geglaubt, die Definition der Integration dahin beschränken zu sollen, dass sie eine Umkehrung der Differentiation sei. Auf keinen Fall aber, meinte er, sei der Begriff der Summe zulässig, denn eine Summe von Nullwerthen müsse ebenfalls gleich null sein. Auch dieser Einwand steht jedoch unter dem Vorurtheil der unmittelbaren Anlehnung an die arithmetischen Elementaroperationen, und er vermengt überdies die zwei specifisch verschiedenen Bedeutungen des Nullbegriffs. Gehen wir von der geometrischen Bedeutung des Grenzbegriffs aus, so wird, da man bei demselben die Distanz zwischen zwei Punkten m und n einer Curve zu null werden liess, die Umkehrung des Verfahrens nun darin bestehen, dass man jene Distanz von null an bis zu einem gegebenen endlichen Werthe wiederum wachsen lässt. Will man ein solches Wachsthum als eine Addition auffassen, so ist diese von der gewöhnlichen doch insofern wesentlich verschieden, als die zu bildende Summe durch das stetige Durchlaufen aller möglichen Zwischenwerthe erreicht wird. Es bleibt eben in dem Integral der Begriff der Summe in dem nämlichen Sinne als ein Grenzbegriff erhalten, in welchem auch das Differential als Grenze der Differenz erscheint. Das Integral ist nicht eine Summe von Grenzwerthen, sondern vielmehr der Grenzwerth einer Summe von Differenzen. Obgleich daher auch diese Auffassung die Integration an die Summation anlehnt, so bietet sie doch den Vorzug, dass sie zugleich die wesentlichen Unterschiede von der arithmetischen Addition hervorhebt. Diese Unterschiede bestehen einerseits in dem stetigen Wachsthum des Integrals, anderseits darin, dass jedes Integral ein bestimmtes Gesetz des Wachsthums einer Function repräsentirt. Beide Unterschiede sind so tiefgreifend, dass dadurch im wesentlichen nur noch

die quantitative Zunahme als der wesentliche Punkt der Uebereinstimmung zurückbleibt. Sie führen zugleich auf die allgemeinste Bedeutung des Integralbegriffs. Diese besteht aber darin, dass die Integration die Herstellung der ursprünglichen aus einer abgeleiteten Function ist.

Eine jede Function enthält den mathematischen Ausdruck eines Gesetzes, welches verschiedene theils veränderliche, theils constante Grössen mit einander verbindet. Das Integral und der Differentialausdruck, da sie beide unter den Begriff der Function fallen, stellen daher Gesetze dar, die einander so zugeordnet sind, dass, wenn das eine gegeben ist, das andere gefunden werden kann. Für die nähere Beschaffenheit dieses Verhältnisses der Zuordnung ist aber die Thatsache bezeichnend, dass die Differentialfunctionen sich darauf beschränken, die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den veränderlichen Grössen, die in dem Functionsausdruck vorkommen, festzustellen, während die Integralfunction ausser den veränderlichen noch constante Grössen als wesentliche Bestandtheile enthält. Hiernach hat die Differentialfunction eine allgemeinere, die Integralfunction eine speciellere Bedeutung: in dieser wird durch den Hinzutritt der constanten Grössen das in dem Differentialausdruck enthaltene Gesetz näher determinirt. Eine nothwendige Folge dieser Determination ist es dann, dass auch die veränderlichen Grössen bestimmte absolute Werthe annehmen, während der Differentialausdruck nur das Gesetz ihrer relativen Aenderungen angiebt und sie darum ihrem absoluten Werthe nach als verschwindende Grössen behandelt. Hierdurch kehrt nun die logische Verbindung der Beziehungen zwischen den beiden Infinitesimalbegriffen im Vergleich mit den vorangegangenen Ableitungen sich um. Bei der Grenzmethode erscheint das Auftreten der Constanten im Integralausdruck als eine Consequenz des stetigen Wachsthums der Veränderlichen. Ein solches Wachsthum kann nur dann einem bestimmten Mass unterworfen werden, wenn es sich zwischen gewissen Grenzen vollzieht, und diese Grenzen sind es daher, welche den Werth der Constanten bestimmen. Betrachtet man dagegen den Differential- und den Integralausdruck als Functionsformen, denen ein übereinstimmendes Gesetz zu Grunde liegt, so ergiebt sich die Thatsache, dass in der ersten dieser Formen die absoluten Werthe der Veränderlichen unbestimmt oder verschwindend sind, erst als eine Consequenz aus dem allgemeinen Functionsverhältniss, wonach die Differentialfunction die Beziehung zwischen den Veränderlichen in ihrer vollen Allgemeinheit ohne jede Beziehung auf bestimmte Grenzen für das Wachsthum derselben angiebt. Beide Auffassungen stehen natürlich nicht im Widerspruch, sie ergänzen einander, und zu einer erschöpfenden Bestimmung dieser Functionsbegriffe sind sie darum beide erforderlich. Die Differentiation und die Integration erscheinen, von diesem allgemeinsten Standpunkte aufgefasst, als Functionsoperationen von entgegengesetzter Richtung. Die Differentiation als diejenige Operation, durch welche zu einer gegebenen Function die allgemeine Function gesucht wird, welche die der ersteren entsprechende

Beziehung zwischen dem Wachsthum der veränderlichen Grössen losgelöst von jeder Anwendung auf bestimmte einzelne Fälle angiebt. Die Integration dagegen als diejenige Operation, durch welche aus einem abstracten bloss das Gesetz des Wachsthums der Veränderlichen enthaltenden Ausdruck der Werth der Function gesucht wird, die in irgend welchen einzelnen Fällen jenem Wachsthumsgesetz der Veränderlichen entspricht.

Die von Lagrange gewählten Namen der primitiven und der derivirten Function bezeichnen nun das Verhältniss beider Functionsformen insofern zutreffend, als sie andeuten, dass zwar die Differentiation, die Herstellung der derivirten Function, ein nach selbständigen Regeln vor sich gehendes Verfahren ist, nicht aber ihre Umkehrung, die Integration. Denn die Integrale gegebener Differentialfunctionen können nur mittelst der Beziehungen gegebener Functionen zu ihren Differentialformeln gefunden werden. In dieser letzteren Eigenschaft gleicht die Integration den inversen Operationen der Arithmetik. Da jede Zahl nur durch eine Addition definirbar ist, welche schliesslich auf die Addition von Einheiten zurückführt, so folgt von selbst, dass die Subtraction keine selbständige Operation ist. Sie wird es auch dann nicht, wenn sich durch sie negative Zahlen ergeben. Denn die Verbindungen dieser sind wiederum bloss Additionen unter geänderten Vorzeichen. Aehnlich ist das Verhältniss der Multiplication zur Division, der Potenzirung zur Radicirung und der Exponentialfunctionen zu den Logarithmen. Nur in dem einen Punkte unterscheiden sich die Infinitesimalfunctionen, dass bei ihnen nicht die synthetische Operation als die selbständige erscheint und die analytische als die von ihr abhängige Ergänzung, sondern umgekehrt. Obgleich also die Differentiation das der Subtraction und Division, die Integration das der Addition und Multiplication analoge Verfahren ist, so besitzt gleichwohl in diesem Falle nur die analytische Operation einen selbständigen Algorithmus, auf dessen Resultate auch die synthetische angewiesen ist. Dieser Unterschied hat seinen Grund in dem Problem der stetigen Aenderung, von welchem die Infinitesimalmethode ausgeht. Indem ihre nächste Aufgabe darin besteht, diesen Begriff der stetigen Aenderung zu fixiren, kann sie hierzu nur durch ein analytisches Verfahren gelangen, welches auf diese Weise zur Grundlage aller weiteren Methoden wird. Der analytische Ausgangspunkt wird hier ausserdem desshalb möglich, weil die Infinitesimalrechnung ein Functionscalcül ist, welcher die Existenz der verschiedenen elementaren Functionsformen bereits voraussetzt, während durch die niederen arithmetischen Operationen diese Formen erst erzeugt werden müssen.

Wir sahen, dass der Differentialausdruck, da er nur die Beziehung zwischen den Veränderlichen enthält und überdies von bestimmten Werthen der letzteren ganz abstrahirt, stets eine allgemeinere Bedeutung besitzt als die Function, aus welcher er abgeleitet ist. Aus diesem Grunde kann aus verschiedenen der nämlichen Functionsform angehörenden Gleichungen ein und derselbe Differentialausdruck erhalten werden, und es gewinnt darum

das Integral, das man aus einem solchen Differentialausdruck durch Umkehrung ableitet, zunächst eine unbestimmte Bedeutung. Das äussere Zeichen der letzteren ist die willkürliche Constante, die dem allgemeinen Integral beigefügt werden muss. Indem dieser Constanten jeder beliebige Werth gegeben werden kann, repräsentirt das unbestimmte Integral eine unendliche Zahl von Gleichungen einer und derselben Functionsform, die sämmtlich unter dem nämlichen Differentialausdruck enthalten sein können. Wo die Integration auf concrete Probleme angewandt wird, da muss desshalb entweder vermöge der Natur des Problems von vornherein der Werth der unbestimmten Constanten fixirt sein, oder es muss die Aufgabe der Integration dadurch beschränkt werden, dass man das durch einen allgemeinen Differentialausdruck $f(x)\,dx$ angegebene Gesetz der Veränderung nur zwischen gewissen Grenzen $x_0$ und $x_n$ des Argumentes $x$ bestimmen will. Es geht dann das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ in das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ über. Für die Anwendungen des Integrationsverfahrens sind die bestimmten Integrale von überwiegender Wichtigkeit, theils weil man durch concrete Aufgaben in der Regel auf sie geführt wird, theils weil gewisse ausgezeichnete Formen derselben zu Hülfsfunctionen überführen, welche die Lösung ganzer Classen von Problemen vermitteln helfen.

## 4. Die Anwendungen der Infinitesimalmethode.

Das Gebiet der Anwendungen der Infinitesimalmethode reicht so weit, als stetige Veränderungen, die bestimmten Gesetzen folgen, der mathematischen Untersuchung gegeben sind. Da dem nämlichen Gebiet zugleich die wichtigsten Anwendungen des Functionsbegriffs angehören, so empfängt der letztere erst durch die Entwicklungen der Infinitesimalmethode seine Vollendung. Das Kriterium der Stetigkeit einer Function besteht darum auch in der Regel in ihrer Differenzirbarkeit oder in der Möglichkeit, die Beziehungen des Wachsthums der Veränderlichen in der Form von Differentialgleichungen darzustellen. Eine solche Differentialgleichung pflegt die veränderlichen Grössen und ihre Differentialverhältnisse in irgend welchen Verbindungen zu enthalten. Die Differentialgleichung erster Ordnung einer Function zwischen zwei Veränderlichen $x$ und $y$ hat daher die allgemeine Form

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die Aufgabe ihrer Auflösung aber besteht regelmässig darin, dass dieselbe in eine Gleichung zwischen dem Differentialquotienten einerseits und den

Veränderlichen anderseits übergeführt wird, so dass sie in eine Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

übergeht. Ersteres ist die unentwickelte, letzteres die entwickelte Form. Alle Differentialformeln der einfachen Functionen gehören dieser entwickelten Form an, und die Aufgabe der Auflösung der Differentialgleichungen besteht darum allgemein in der Zurückführung auf einfache Differentialformeln und ihre Verbindungen. Die einfachste Deutung, welche einer solchen Differentialformel gegeben werden kann, ist die geometrische. Es bezeichnet dann jede Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen das allgemeine Gesetz einer ebenen Curve, welches ein ganzes System einzelner Curven unter sich begreift, für die sämmtlich die Relation $\frac{dy}{dx}$, d. h. das beziehungsweise Wachsthum der Coordinaten für einen beliebigen Punkt der Curve, wie es durch die Richtung der Tangente angegeben wird, ein übereinstimmendes ist. Aehnlich hat eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen allgemein die Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

und sie fordert als Lösung die entwickelte Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Auch durch sie wird ein Gesetz ausgedrückt, welches einer unendlichen Zahl ebener Curven gemeinsam ist. Denn sie stellt das Gesetz fest, nach welchem für ein gewisses System von Curven die Gestalt derselben in jedem einzelnen Punkt abhängig ist einerseits von dem beziehungsweisen Wachsthum der Coordinaten und anderseits von der Richtung der Curve oder ihrer Tangente an dem betreffenden Punkte. Es ist klar, dass dieses Gesetz von noch allgemeinerer Natur ist als das vorangegangene. Denn unter der unendlichen Zahl von Curven, für welche die Differentialgleichung erster Ordnung ein gemeinsames Richtungsgesetz angiebt, wird sofort eine einzelne vollständig bestimmt, wenn für einen einzelnen Werth von x der zugehörige Werth von y angegeben, d. h. wenn irgend ein einzelner Punkt der Curve seiner absoluten Lage nach festgestellt wird. Dagegen wird aus der ebenfalls unendlichen Zahl von Curven, für welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung ein gemeinsames Krümmungsgesetz angiebt, eine einzelne Curve erst dann vollständig bestimmt, wenn nicht nur ein Punkt der Curve durch die betreffenden Werthe von x und y, sondern auch ihre Richtung an diesem Punkte in der Form des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bekannt ist. Auf diese Weise gelangt man mit dem Uebergang zu Diffe-

rentialgleichungen höherer Ordnung zu Gesetzen von immer grösserer Allgemeinheit. Es hängt aber selbstverständlich ganz und gar von der Bedeutung der Veränderlichen ab, bis zu welcher Stufe der Allgemeinheit überhaupt fortgeschritten werden kann. Eine ebene Curve lässt ein allgemeineres Gesetz als dasjenige der Richtungsänderung, welches durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Coordinaten dargestellt wird, überhaupt nicht mehr zu. Nehmen wir jedoch an, es sei irgend ein Substrat gegeben, welches, analog der Ebene, nach zwei von einander unabhängigen Richtungen wachsen kann, welches aber ausserdem in jedem Punkt qualitative Differenzen verschiedener Ordnung in sich schliesst, so dass für jeden Punkt ein stetiger Wechsel verschiedener Qualitäten möglich ist, für jede dieser Qualitäten wieder ein solcher, u. s. w., so würden offenbar je nach der Zahl qualitativer Unterordnungen für die erschöpfende Feststellung der Gesetze eines solchen Continuums Differentialgleichungen dritter, vierter und selbst noch höherer Ordnung erforderlich werden können. Begrifflich hat demnach dieser Fortschritt überhaupt keine Grenzen. Nur bringen es die Bedingungen unserer Raumanschauung mit sich, dass bei den Anwendungen der Infinitesimalmethode Differentialgleichungen höherer Ordnung nur in gewissen Ausnahmefällen vorkommen.

Wenn wir hier das Verhältniss der Differentialgleichungen verschiedener Ordnung als ein solches der aufsteigenden Begriffsallgemeinheit bezeichnet haben, so darf übrigens dasselbe nicht als äquivalent einer logischen Ueber- und Unterordnung von Gattungs- und Artbegriffen gedacht werden. Die Richtungsänderung lässt nicht schlechthin als der allgemeinere Begriff zu demjenigen der Richtung sich auffassen. Denn es trifft zwar zu, dass ein und dasselbe Gesetz der Richtungsänderung gültig bleiben kann, auch wenn man die Richtung, deren Aenderung bestimmt wird, mannigfach wechseln lässt, aber dabei sind doch beide Begriffe gerade dadurch verschieden, dass das charakteristische Element, welches den höheren Begriff auszeichnet, in dem engeren sich nicht wiederfindet. Die Verschiedenheit der Begriffsallgemeinheit, um die es sich hier handelt, entspringt daher nicht aus einer einfachen Begriffssubsumtion, sondern sie gründet sich auf den Umfang der Geltung des in der Differentialgleichung formulirten Gesetzes. Wir nennen ein Gesetz dann allgemeiner, wenn die Zahl der Fälle, auf die es sich erstreckt, grösser ist. Unzweifelhaft ist darum ein solches Gesetz, welches ein anderes in sich schliesst, im Verhältniss zu diesem stets das allgemeinere, obgleich es neue Begriffselemente enthalten kann, welche in dem engeren Gesetz durchaus nicht vorgesehen sind.

Eine fernere Erweiterung erfährt die Bedeutung der Differentialgleichungen, wenn sie sich auf mehr als auf zwei veränderliche Grössen beziehen. Dieser Fall ist mathematisch dadurch ausgezeichnet, dass er eine unmittelbare Zurückführung auf die Differentialformeln einfacher Functionen desshalb nicht gestattet, weil das vollständige Differential einer solchen zusammengesetzteren Function stets nur durch eine Summe von Theil-

differentialen sich darstellen lässt. Gehen wir nämlich von der Function zwischen drei Veränderlichen x, y und z aus, so wird der Werth irgend einer der letzteren immer erst dann eindeutig bestimmt sein, wenn die zugehörigen Werthe der beiden andern gegeben sind. Es können darum in solchen Fällen stets zwei der Veränderlichen, z. B. x und y, als gleichzeitige Argumente betrachtet werden, deren Function die dritte Veränderliche z ist. Die Differentialgleichung einer solchen Function muss dann aber offenbar zwei Differentialquotienten enthalten, einen ersten, welcher die Veränderung von z in Beziehung auf x, und einen zweiten, welcher die Veränderung in Beziehung auf y bestimmt. Diese Quotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, bei denen nach dem Vorgang von Jacobi das Zeichen $\partial$ statt des für die vollständigen Differentiale gebrauchten d eingeführt ist, sind die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der Function $z = f(x, y)$. Dem vollständigen Differential dieser Function wird daher auch die Form gegeben:

$$d f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Geometrisch bezeichnet die ursprüngliche Functionsbeziehung zwischen x, y und z eine Fläche im Raum, die man sich durch x und y als horizontale Abscissen und durch z als verticale Ordinate bestimmt denken kann. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher $\partial z$ als der Zähler, $\partial x$ und $\partial y$ als die Nenner der Differentialquotienten erscheinen, bezeichnet demnach das allgemeine Gesetz der Richtung einer solchen Fläche, wie sie durch die an jeden Punkt gelegte tangirende Ebene bestimmt ist; die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aber bezeichnet die von Punkt zu Punkt stattfindene Richtungsänderung dieser Fläche. In Folge der räumlichen Bedeutung, welche den partiellen Differentialgleichungen zwischen drei Veränderlichen sich beilegen lässt, bilden diese das allgemeine Hülfsmittel zur Darstellung der Naturvorgänge und als solches eines der wichtigsten Werkzeuge der mathematischen Physik*).

Auch in Folge der steigenden Zahl der Veränderlichen, welche die Differentialgleichungen enthalten, erweitert sich ihre Allgemeinheit. Die Differentialgleichung mit n Veränderlichen enthält diejenige mit n — 1 Veränderlichen als einen speciellen Fall in sich, welcher dann aus ihr hervorgeht, wenn irgend eine der Veränderlichen als constant angenommen wird. Aber die hier sich ergebende Begriffsallgemeinheit ist von anderer Beschaffenheit als diejenige, die aus der verschiedenen Ordnung der Differentialgleichungen entspringt. Während im letzteren Fall das Gebiet des Gesetzes dasselbe bleibt, aber der Umfang seiner Bedeutung und demzufolge auch sein

---

*) Vgl. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Einl.

logischer Inhalt sich verändert, ist es umgekehrt gerade das Gebiet der Anwendungen des Gesetzes, welches mit der steigenden Anzahl der Veränderlichen zunimmt. So verwandelt sich das nämliche Gesetz, welches in der Form einer Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen die Tangente einer ebenen Curve bestimmt, in ein Gesetz für die tangirende Ebene einer krummen Oberfläche, wenn es auf drei Veränderliche ausgedehnt wird. Auch hier trägt aber diese wachsende Begriffsallgemeinheit einen durchaus specifischen Charakter an sich, durch welchen sie sich von sonstigen logischen Ueberordnungen unterscheidet. Ein n-fach ausgedehntes Gebiet ist desshalb dem Gebiet von der Ausdehnungszahl n — 1 übergeordnet, weil sich dieses in jenem construiren lässt, während keine Möglichkeit vorliegt, ohne die Hinzunahme weiterer Hülfsmittel aus dem zweiten in das erste zu gelangen. Hier lässt sich also das Gebiet niederer Ordnung stets als ein Specialfall betrachten, der aus dem Gebiet höherer Ordnung durch beschränkende Bedingungen hervorgeht. Die letzteren bestehen aber nicht, wie bei dem Uebergang von der Gattung zur Art, in der Einführung determinirender Merkmale, welche dem Gattungsbegriff fehlen, sondern im Gegentheil in der Abstraction von weiteren Bestimmungen, welche dem höheren Begriff eigen sind.

In der Aufstellung von Differentialgleichungen besteht immer die nächste Aufgabe bei den Anwendungen der Infinitesimalmethode. In gewissen Fällen können die vorgelegten Probleme schon durch die Untersuchung dieser Gleichungen gelöst werden. Dies findet regelmässig dann statt, wenn der logische Charakter des Problems nur die Kenntniss jener allgemeinsten Gesetzmässigkeit verlangt, welche in der Differentialgleichung ihren Ausdruck findet. Die Bestimmung der Tangente und der Krümmung einer Curve, der Maxima und Minima der Functionen, die Formulirung der allgemeinen Bewegungsgesetze sind Aufgaben solcher Art. Bei einer zweiten Reihe von Problemen dagegen ist die Aufstellung der Differentialgleichungen nur ein vorbereitendes Geschäft, indem die eigentliche Lösung eine einfache oder mehrfache Integration voraussetzt. Dies ist überall da der Fall, wo es sich darum handelt, die Beschaffenheit der ursprünglichen Function zu kennen, deren Differentialgleichung gegeben ist, oder wo das in der Differentialgleichung aufgestellte Gesetz auf Messungen, für welche specielle Bedingungen gegeben sind, angewandt werden soll, wie auf die Messung der Zeit einer Bewegung, der Länge einer Curve, des Inhalts einer Fläche oder eines Körperraumes. Die Integralformeln, zu welchen man bei der Lösung solcher Aufgaben gelangt, bilden eine Art Zwischenglied zwischen der in der Differentialgleichung ausgedrückten derivirten und der primitiven Function. Die Integralformel, die sich lediglich durch das Integrationssymbol und unter Umständen durch hinzutretende Constanten von dem Differentialausdruck unterscheidet, bezeichnet die Herstellung der primitiven Function zunächst nur als eine Aufgabe. Es ist aber um so wichtiger, diese Aufgabe symbolisch ausdrücken zu können, als erstens zahl-

reiche Fälle vorkommen, in denen eine exacte Lösung derselben unmöglich ist und dennoch ein Ausdruck nothwendig wird, welcher für den Zusammenhang des mathematischen Gedankengangs diese Lösung als vollzogen postulirt, und als es zweitens andere Fälle giebt, in denen eine Integralformel der allgemeine Ausdruck für eine grosse Zahl einzelner Functionen ist, welche sämmtlich dem durch die erstere repräsentirten Gesetze unterworfen sind. In Folge dessen ist der Geltungsbereich eines unbestimmten Integrals ein ebenso weiter, wie derjenige der zugehörigen Differentialgleichung. Der Uebergang auf die speciellen Functionen, den dasselbe vermittelt, wird nur angedeutet durch die willkürlichen Constanten, indem diese dem Ausdruck einen Bestandtheil hinzufügen, dessen Fixirung sofort das allgemeine in ein concretes Gesetz umwandelt. Darum richtet sich auch die Zahl dieser Constanten nach dem Umfang des durch die Differentialgleichung repräsentirten Gesetzes. Einer Differentialgleichung n ter Ordnung entsprechen n Integrationen, deren jede die Bestimmung einer andern willkürlichen Constanten voraussetzt. Diese sämmtlichen Constanten finden sich daher in dem Integral, und sie verleihen demselben die nämliche Allgemeinheit, wie sie die Differentialgleichung besitzt. Erst durch die successive Ausführung der Integrationen, durch welche die Constanten eine nach der andern determinirt werden, gewinnt die Integralformel allmählich eine concretere Bedeutung. Ausserdem besteht ein wichtiges Hülfsmittel, durch welches von vornherein der Geltungsbereich der Integralformeln verengert wird, in der Voraussetzung gewisser Grenzen für die Argumente der Functionen, wodurch die unbestimmten in bestimmte Integrale übergehen. Die einzelnen Methoden, die zur Berechnung der Functionen aus den Integralformeln befolgt werden, sind von ausschliesslich mathematischem Interesse. In logischer Beziehung bedürfen nur noch die Anwendungen, welche gewisse Integralformeln zur Lösung bestimmter Classen von Problemen finden, einer kurzen Hervorhebung.

In dem bestimmten Integral wird zwar die Allgemeinheit des unbestimmten beschränkt, aber zwischen den für dasselbe eingeführten Grenzen bleibt immer noch eine Mannigfaltigkeit einzelner Functionsformen möglich. Es kann nun die Aufgabe gestellt werden, aus ihnen gewisse einzelne Functionen zu finden, welche einen ausgezeichneten Charakter besitzen. Ein solcher ist aber dann gegeben, wenn die Function im Vergleich mit den ihr benachbarten einen Maximal- oder Minimalwerth erreicht. Concrete Beispiele, die unter diese Aufgabe fallen, ergeben sich nicht selten bei den geometrischen und physikalischen Anwendungen der Infinitesimalmethode. Hierher gehört z. B. die Ermittelung der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten gezeichnet werden kann, oder die Bestimmung derjenigen Curve, in welcher ein Körper, wenn er sich unter dem Einfluss der Schwere zwischen zwei gegebenen Punkten bewegt, in der kürzesten Zeit fällt, u. dergl. Diese Aufgaben besitzen eine vollständige Analogie mit denjenigen, welche die Diffe-

rentialrechnung in der Theorie der Maxima und Minima erledigt; sie unterscheiden sich nur darin, dass es sich bei ihnen nicht um die Vergleichung einzelner ausgezeichneter Punkte der eine Function repräsentirenden Curve oder Oberfläche mit den benachbarten Punkten, sondern um eine Vergleichung der ganzen Form jener Curven oder Oberflächen, welche durch eine bestimmte Integralformel repräsentirt werden, handelt. Wie man also bei dem entsprechenden Problem der Differentialrechnung von einem gegebenen Punkt einer Curve zu dem ihm benachbarten gelangt, so hier von einer gegebenen Curve zu derjenigen, die in der Schaar stetig in einander übergehender Curven, welche dem nämlichen allgemeinen Gesetze folgen, ihr benachbart ist. Es ist klar, dass diese Aufgabe gleichzeitig der Integral- und der Differentialrechnung angehört, insofern die Differentialmethode, welche zur Bestimmung der Maxima und Minima einer Function dient, auf gegebene Integralformeln angewandt werden muss. Eine solche Differentiation in Bezug auf bestimmte Integrale ist von Lagrange als Variation und das ganze Verfahren als Variationsrechnung bezeichnet worden. Der Algorithmus der Variation ist hiernach an sich nicht verschieden von dem der Differentiation, und seine Anwendung ist immer dann gefordert, wenn eine Function V in der Form eines bestimmten Integrals gegeben ist, dessen Werth so bestimmt werden soll, dass $\partial V = 0$ wird, während $\partial^2 V$ im allgemeinen einen von null verschiedenen Werth annimmt, worin $\partial$ das von Lagrange eingeführte Symbol der Variation bezeichnet. Die nähere Ausführung der Methode beruht wesentlich darauf, dass die Variation der Function V in die Variation ihrer Bestandtheile, der abhängig Veränderlichen und ihrer Differentialquotienten verschiedener Ordnung zerlegt wird. Logisch ist aber der Variationscalcül hauptsächlich desshalb bemerkenswerth, weil er die Fruchtbarkeit der Integrationssymbolik in ein helles Licht setzt, denn gerade die Allgemeinheit der durch ein Integral repräsentirten Function macht es möglich, auf dasselbe jene Regeln der Differentialmethode anzuwenden, welche zur Ermittelung ausgezeichneter Werthe einer Function dienen.

Auf der nämlichen Allgemeinheit der Integralformeln beruht eine zweite Anwendung derselben, welche noch von grösserer Tragweite ist als die eben besprochene. Sie besteht darin, dass gewisse bestimmte Integrale und die ihnen entsprechenden transscendenten Functionen die Bedeutung von Hülfsfunctionen übernehmen, welche den einfachen transscendenten Functionen und ihren Umkehrungen entsprechen, aber zur Darstellung complicirterer Gesetze als diese sich eignen. Diese Aufgabe erfüllen die höheren transscendenten Functionen, die im allgemeinen an bestimmte Integralformeln sich anlehnen. Auch in dieser Beziehung bilden die einfachen Functionen ihr Vorbild. So ist nach den elementaren Regeln der Differentiation

$$\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und desshalb, wenn man Grenzen einführt, welche die willkürliche Constante des Integrals zu beseitigen gestatten,

$$\arc \sin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h. die Kreisfunction lässt sich entstanden denken aus dem Integral einer gebrochenen algebraischen Function zweiten Grades. Demgemäss darf man von vornherein voraussetzen, dass ein Integral von der Form

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

also ein Integral einer gebrochenen algebraischen Function vierten Grades, ebenfalls dem Bogen einer Curve entspricht, und dass man durch die Umkehrung dieser Bogenfunction eine dem Sinus analoge Function erhalten wird. Auf diese Weise gewinnt man in der That trigonometrische Functionen complicirterer Art, die so genannten elliptischen Functionen, welche zugleich eine allgemeinere Bedeutung besitzen, da sie sowohl die einfachen trigonometrischen Functionen wie die Exponentialfunctionen als specielle Fälle in sich schliessen. Denn setzt man in dem allgemeinen elliptischen Integral die Constante $k = 0$, so geht dasselbe in das Integral für arc sin x über, und setzt man $k = 1$, so verschwindet im Nenner das Wurzelzeichen und man erhält $\int_0^x \frac{dx}{1 - x^2}$, welches Integral der logarithmischen Function $\frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$ entspricht. Da die trigonometrischen Functionen eine reelle, die Exponentialfunctionen eine imaginäre Periodicität besitzen (S. 187), so vereinigen die elliptischen Functionen beide Eigenschaften in sich: sie sind doppelperiodische Functionen. Die logische Bedeutung dieser durch die Vermittelung algebraischer Integrale gewonnenen neuen Hülfsfunctionen besteht demnach darin, dass sie den mathematischen Ausdruck für den Begriff der periodischen Veränderung verallgemeinern und daher eine genaue Darstellung solcher Vorgänge gestatten, für welche die einfachen periodischen Functionen nicht zureichen. In der nämlichen Richtung, in welcher aus den trigonometrischen die elliptischen Functionen hervorgegangen sind, lässt sich nun weiter fortschreiten, indem man zu Functionen sechsten, achten Grades u. s. w. übergeht. So entstehen die verschiedenen Ordnungen der so genannten hyperelliptischen Integrale. Entsprechend der Beschränkung der complexen Grössen auf die Darstellung in einer Ebene zeigt sich übrigens, dass eindeutige Functionen von mehr als zwei Perioden unmöglich sind. In logischer Beziehung bieten diese Entwicklungen nur noch zu zwei Bemerkungen Anlass. Erstens

sehen wir, dass alle höheren transscendenten Functionen aus den einfachen analytisch durch die Anwendung des Permanenzprincips hervorgehen, wobei aber dieses nicht direct auf die Function selbst, sondern zunächst auf die arithmetischen Operationen, die zu ihr führen, angewandt werden muss: eben darum bilden gewisse Integralformen, in denen diese Operationen in einem geschlossenen Ausdruck zusammengefasst werden, die Uebergangsglieder. Zweitens zeigt es sich, dass die Allgemeinheit der Function mit ihrer Ordnung, bez. mit der Ordnungszahl des algebraischen Ausdrucks, welchen das ihr entsprechende Integral enthält, zunimmt. Auch diese Allgemeinheit bezieht sich aber lediglich auf die umfassende Natur des durch die Function repräsentirten Gesetzes. Jede Function höherer Ordnung schliesst die Functionen niedrigerer Ordnung, aus denen sie durch die Anwendung des Permanenzprincips hervorgegangen ist, als Specialfälle in sich. Aber auch hier gehen diese Specialfälle aus der allgemeineren Form nicht durch den Hinzutritt determinirender Bedingungen hervor, sondern im Gegentheil dadurch, dass bestimmte Elemente, welche in der allgemeineren Form enthalten sind, zum Verschwinden kommen. So lässt sich denn überhaupt diese wachsende Determination der Begriffe in aufsteigender Richtung als der specifische Charakter mathematischer Ueberordnung betrachten.

Schliesslich liegt die Bemerkung nahe, dass auf dem angedeuteten Wege, vermöge der auch in diesem Fall unbeschränkten Anwendbarkeit des Permanenzprincips, die Ableitung neuer Functionen von zunehmender Allgemeinheit eine unbegrenzte ist. Aber es ist ebenso gewiss, dass gerade in Folge dieser zunehmenden Allgemeinheit man an eine Grenze kommen muss, wo die Verwendbarkeit der so entwickelten Functionen in der Form von Hülfsfunctionen fraglich wird. Diese Grenze wird namentlich dann erreicht, wenn die Functionen einen vieldeutigen Charakter gewinnen. In der Fähigkeit, neue Functionsformen zu erzeugen, bekundet übrigens die Integration ebenfalls ihre Verwandtschaft mit den inversen Operationen der Arithmetik. Aus diesen sahen wir successiv neue Zahlsysteme entspringen, aus der Subtraction die negativen, aus der Division die gebrochenen und irrationalen, aus der Radicirung die complexen Zahlen, und aus den beiden letzteren Operationen ausserdem die gebrochenen und die complexen Functionen. Im Gegensatze zu dieser principiellen Entwicklung waren die einfachen Formen transscendenter Functionen zunächst aus zufälligen Betrachtungsweisen hervorgegangen, denen nur mittelst der Uebertragung auf alle möglichen analogen Grössenverhältnisse eine allgemeinere Bedeutung beigelegt werden konnte. Auf eine solche wies überdies die Beziehung der Exponentialfunctionen und trigonometrischen Functionen zu einander und der letzteren zu den Functionen complexer Variabeln hin. Erst durch die Infinitesimalmethode wird nun der vollständige Zusammenhang der transscendenten und der algebraischen Functionen aufgeklärt. Auch die Grössensysteme der transscendenten Functionen können

unmittelbar aus den ursprünglichen Zahlen und den aus ihnen gebildeten algebraischen Functionen durch eine inverse Operation abgeleitet werden; diese Operation ist die Integration. Wie die Aufgaben, jeden beliebigen Bruch und jede Wurzel aus einer negativen Grösse in einer einfachen Zahl darzustellen, durch die irrationalen und complexen Zahlen gelöst werden, so führt das Problem, aus derivirten Functionen von algebraischer Form die ursprünglichen Functionen, von welchen sie abgeleitet sind, zu finden, unter gewissen Bedingungen direct zu der Aufstellung der transscendenten Functionen. Dieser Weg ist aber auch insofern der allgemeinere, als sich auf ihm mit den niederen zugleich die höheren Formen dieser Functionen ergeben.

---

# Dritter Abschnitt.

## Von der Logik der Naturwissenschaften.

---

### Erstes Capitel.

### Die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung.

#### 1. Die Entwicklung und Gliederung der Naturwissenschaften.

a. Die Entwicklung der Naturwissenschaften.

So innig die Beziehungen sind, die Mathematik und Naturforschung verbinden, so weit entfernen sich beide von einander in den Bedingungen ihrer Entwicklung. Vermöge der einfachen Natur der Erfahrungen, die den Begriffen von Zahl und Ausdehnung zu Grunde liegen, hat die Mathematik in dem Augenblick, wo sie in das Licht der Geschichte trat, den Gang einer gesicherten Wissenschaft eingeschlagen. Die Naturforschung dagegen erscheint von Anfang an als ein Schauplatz des Kampfes widerstreitender Weltanschauungen. Spät erst und zunächst bloss auf beschränkten Gebieten hat in ihr durch die Sicherstellung allgemein anerkannter Ergebnisse eine friedlichere Entwicklung beginnen können. Allmählich sind dann die methodischen Gesichtspunkte, denen man solche Ergebnisse verdankte, auch auf andere Gebiete übertragen worden. Doch die Nachwirkungen jener Kämpfe werden in der Unsicherheit der Grundbegriffe heute noch überall fühlbar; sie verrathen sich in dem Zweifel über die Bedeutung der einfachsten Principien der Mechanik ebenso gut wie in den wechselnden Anschauungen über den Ursprung der verwickeltsten Lebenserscheinungen.

Die Aufgabe der Naturwissenschaften besteht in der methodischen Erforschung der einzelnen Naturerscheinungen. Diese Aufgabe ist allmählich aus andern, älteren Formen der Naturbetrachtung entstanden. Den

Banden mythologischer Weltanschauung entwand sich in den ersten Anfängen der Wissenschaft die philosophische Betrachtung des Weltganzen, und aus ihr sind in viel späterer Zeit erst die einzelnen Naturwissenschaften hervorgegangen. Dieses Verhältniss hat auf die gesammte Entwicklung der letzteren seine Schatten geworfen. Während das System der Mathematik aus speciellen Ergebnissen und Verfahrungsweisen in stetiger Entwicklung zu einem Ganzen sich fügte, fand die naturwissenschaftliche Forschung bereits als sie begann zusammenhängende Naturanschauungen vor, die jede neu gefundene Thatsache sich dienstbar zu machen strebten, und die auf die Methoden, welche man zur Auffindung der Thatsachen benützte, einen beherrschenden Einfluss ausübten. Uns erscheint dies jetzt als eine Umkehrung des naturgemässen Verhältnisses. Wir verlangen, dass der Philosophie überall durch die Erfahrungswissenschaften der Boden bereitet werde. Gleichwohl wäre es unbillig, wenn man der alten Naturphilosophie vorwerfen wollte, dass ihr diese Ansicht fremd war. Mag auch in Folge seines der Erkenntniss vorauseilenden Strebens der menschliche Geist die grössten Schwierigkeiten sich selbst schaffen, — das Interesse an der Frage nach dem Ursprung und dem Wesen der Dinge ist ein so ungeheures, dass sich jede Zeit damit abfinden muss.

Es liegt nahe, als den wichtigsten Grund, aus welchem die Naturwissenschaft der Griechen so weit hinter ihren Leistungen auf andern Gebieten zurückblieb, ihren gänzlichen Mangel an methodischen Hülfsmitteln anzusehen. Welchen Erfolg konnte eine Naturforschung haben, die auf Zeitbestimmungen ohne Uhr, Temperaturvergleichungen ohne Thermometer, astronomische Beobachtungen ohne Fernrohr vertrauen musste?*) Man vergisst aber bei dieser Frage, dass die mangelnde Erfindung solcher Hülfsmittel selbst schon eines der lautesten Zeugnisse für den Mangel der richtigen Methode naturwissenschaftlicher Forschung ist. Ueberdies, ein Hipparch und Archimedes hatten ohne vollkommenere Instrumente, jener die Grundlagen der exacten Astronomie gelegt, dieser die allgemeinsten Gesetze der Statik fester und flüssiger Körper aufgefunden. Sogar die schiefen Rinnen und die primitiven Wasseruhren, deren sich Galilei bei seinen Fallversuchen bediente, hätten nöthigenfalls schon dem Aristoteles zur Verfügung gestanden. Nicht die äusseren Hülfsmittel sind es, die der Methode der neueren Naturforschung ihr charakteristisches Gepräge verleihen, sondern die in ihr herrschende Form der Naturbetrachtung. Und diese war es zugleich, welche die Werkzeuge exacter Beobachtung mit der nämlichen inneren Nothwendigkeit schaffen musste, mit welcher die Aristotelische Naturphilosophie niemals zu ihnen führen konnte.

An solche tiefer liegende Gegensätze mochte man denken, wenn die Ursachen des Misserfolgs antiker Naturforschung in die kurze Formel gefasst wurden, es habe den Alten weder an Thatsachen noch an Ideen

---

*) Vgl. E. Zeller, Die Philosophie der Griechen, 3. Aufl., II, 2, S. 250.

gemangelt, ihre Ideen seien aber zu unbestimmt und zu wenig angemessen den Thatsachen gewesen*). Mit grösserem Rechte könnte man vielleicht sagen: die ihnen bekannten Thatsachen waren zu unbestimmt, und sie wurden dadurch verführt, an die Stelle der Thatsachen ihre eigenen Ideen zu setzen. Aber alle diese Erklärungen, die mehr auf äussere Unterschiede als auf Ursprung und Bedeutung der verschiedenartigen Naturanschauungen Rücksicht nehmen, vergleichen, was im Grunde unvergleichbar ist. Die Alten besassen eine Naturphilosophie, aber keine irgend nennenswerthe Naturwissenschaft. Als diese ihre ersten Schritte zu machen begann, fand sie darum keineswegs freies Feld vor, sondern ihr Gebiet war im Besitz einer philosophischen Weltbetrachtung, die mit ihren allgemeinen Antworten auch dem Einzelnen seine bestimmte Bedeutung anwies. So kommt es, dass die Geschichte der Naturforschung von ihren ersten Anfängen an den Charakter eines Besitzstreites hat, und dass sie diesen Charakter bis in unsere Tage herab jedesmal von neuem annimmt, sobald für ein neues Gebiet festere Beziehungen zu den bereits sicher begründeten Zweigen der exacten Wissenschaft gewonnen werden. Bei diesem Besitzstreit tritt regelmässig eine neue Betrachtungsweise, welche jede Erscheinung in ihre einfachsten empirischen Bestandtheile zu zerlegen sucht, einer älteren bis dahin herrschenden gegenüber, welche die Unterordnung jeder einzelnen Thatsache unter gewisse allgemeine Begriffe als ihre Aufgabe ansieht. Wenn wir die erste dieser Betrachtungsweisen die naturwissenschaftliche, die zweite die naturphilosophische nennen, so soll damit nicht die wirkliche Aufgabe der Naturphilosophie, sondern nur die historische Stellung angedeutet sein, die sie bis dahin eingenommen. Diese historische Stellung ist aber wesentlich dadurch bedingt, dass die Naturphilosophie der naturwissenschaftlichen Forschung vorausging und daher in ihren Anfängen ganz und gar auf die gemeine Erfahrung gegründet war. Indem sich diese einem hoch ausgebildeten logischen Denkvermögen gegenüber befand, konnte kaum ein anderes Resultat zu Stande kommen als dasjenige, das in der Naturphilosophie der Griechen niedergelegt ist. In die unendliche Fülle mannigfach verketteter Erscheinungen, welche die Naturbeobachtung darbietet, muss eine erste wissenschaftliche Auffassung vor allem durch eine nach logischen Gesichtspunkten unternommene Classification eine gewisse Ordnung zu bringen suchen. Stets hat daher die tiefer eindringende Forschung gegen einen logischen Schematismus zu kämpfen, der in voreiliger Weise ein Wissensgebiet systematisch abschliesst, und der die Dinge zu erklären meint, indem er sie eintheilt. Eine so gewonnene Naturanschauung kann auf lange hinaus das wissenschaftliche Bedürfniss befriedigen. Darum verdanken auch die ersten Regungen der exacten Naturforschung im Alterthum nicht dem theoretischen Interesse, sondern praktischen Bedürfnissen ihren Ursprung. Dem

*) Whewell, Geschichte der inductiven Wissenschaften. Deutsch von Littrow. I, S. 69 f.

theoretischen Interesse an den Himmelserscheinungen war durch die unbestimmten Vorstellungen über den Umschwung der Gestirnsphären, wie sie sich bei Plato und Aristoteles finden, Genüge geleistet; aber zum Zweck einer exacten Jahreseintheilung bedurfte man quantitativer Bestimmungen, die schliesslich in einer für die Hülfsmittel der Alten erreichbaren Genauigkeit in dem astronomischen System eines Hipparch und Ptolemäus ihren Abschluss fanden. Durch das Problem, den Silbergehalt einer goldenen Krone zu bestimmen, wurde Archimedes, wie man erzählt, zu seinen hydrostatischen Entdeckungen veranlasst. Wie ein Körper von gegebener Form zu unterstützen sei, um seinen Fall zu verhindern, wie eine gegebene Last mittelst einer gegebenen Kraft in Bewegung zu setzen, wie die Spannung einer Bogensehne zunehmen müsse, wenn die erzielte Kraft um ein bestimmtes Mass wachsen solle: diese und ähnliche praktische Aufgaben haben einen Archimedes und Heron von Alexandrien zu ihren mechanischen Untersuchungen geführt.

Unter allen Naturerscheinungen sind nun die Bewegungen schwerer Körper vermöge der Einfachheit der zu ihrer Beobachtung erforderlichen Methoden am leichtesten einer exacten Untersuchung zugänglich. Die Mechanik ist daher die einzige Naturwissenschaft, deren Anfänge bis in das Alterthum zurückreichen. Indem sich die Mechanik des Archimedes auf statische Probleme beschränkte, bedurfte sie nur einer kleinen Zahl physikalischer Voraussetzungen; ihr wesentlicher Inhalt aber bestand in der statischen Verwerthung geometrischer Sätze. Selbst bei Stevinus und Galilei sind noch die Nachwirkungen dieser Abhängigkeit von der Geometrie zu erkennen. Aber die Behandlung der Bewegungsprobleme musste nun mit innerer Nothwendigkeit die selbständige Entwicklung der Mechanik und zugleich ihre Rückwirkung auf die übrigen Gebiete der Naturlehre herbeiführen. In dem nämlichen Zeitalter, welches die Fundamente der rationellen Mechanik entstehen sah, wurden in der That durch Mersenne und Snell die einfachsten Grundgesetze der Akustik und Optik entdeckt, durch Gilbert die Eigenschaften des Magnetes zum ersten Mal genauer erforscht, und gelang es endlich Kepler, auf der Grundlage der Copernikanischen Weltanschauung die Bewegungen der Planeten auf die Gesetze zurückzuführen, die noch jetzt seinen Namen tragen. Ihren Abschluss fand diese Entwicklung der Physik und Astronomie in der folgenden Zeit durch die Gravitationstheorie Newton's, welche der physikalischen Untersuchung auf allen Gebieten den Weg zeigte, indem sie die Deduction aus den allgemeinen Principien der Mechanik als das Ziel einer jeden physikalischen Theorie hinstellte.

Langsam folgten die übrigen Naturwissenschaften dem Beispiel, welches ihnen durch die Astronomie und die einfacheren Gebiete der Physik gegeben war. Zur selben Zeit, als bereits die Fallversuche Galilei's eine tiefere Erkenntniss der Schwerkraft erschlossen und die Kepler'schen Gesetze die Bewegungen der Himmelskörper einfachen Massbeziehungen

unterworfen hatten, lag die chemische Forschung noch in den Händen abergläubischer Goldköche, und bekämpften sich mit wechselndem Glück die Elemente des Aristoteles und Paracelsus. Erst als Robert Boyle gegen Ende des 17. Jahrhunderts dem Begriff des Elementes die Bedeutung eines erfahrungsmässig nicht weiter zerlegbaren und durch constante Eigenschaften sich unterscheidenden Stoffes anwies, begann die Chemie den nämlichen Forschungsprincipien zu folgen. Die Menge der Elemente, ihre Beziehungen und ihre Verbindungen richteten sich nun nicht mehr nach irgend welchen mystischen Zahlsymbolen und andern Vorstellungen, die von aussen an die Erscheinungen herangebracht oder höchstens aus einigen wenigen Thatsachen abstrahirt und ungebürlich verallgemeinert waren, sondern zur einzigen Richterin über Thatsachen und Hypothesen wurde auch hier die Erfahrung.

Um einige Jahrzehente früher als die Chemie hatte die Physiologie durch William Harvey's Entdeckung des Blutkreislaufs den ersten Schritt auf der Bahn der exacten Forschung gethan. So wichtig aber dieser Schritt auch war, so musste er doch für die nächste Folgezeit in gewisser Art um so verhängnissvoller werden, je weiter noch die übrigen Zweige biologischer Forschung zurückstanden. Denn allzu gross ward nun die Versuchung, auf beliebige Lebensvorgänge von unbekannter Natur die nämlichen mechanischen Principien anzuwenden. Von Cartesius und den iatromechanischen Schulen des 17. Jahrhunderts an dauert diese Tendenz bis in unsere Tage. Der mechanischen Auffassung stellen sich aber mit wechselndem Glück teleologische Anschauungen entgegen. Findet die mechanische Physiologie stets an dem Vorbilde der Physik und an gewissen einfachsten Lebensvorgängen ihren Rückhalt, so stützen sich die animistisch-vitalistischen Lehren auf das Hereingreifen psychischer Factoren in die höheren Lebensvorgänge und vor allem auf die eine Zweckerklärung herausfordernde Beschaffenheit der Entwicklungserscheinungen. Dieser Kampf ist noch nicht beendet, und noch mehr als die Physiologie selber stehen die von ihr abhängigen Zweige der organischen Naturgeschichte unter dem Einflusse desselben.

### b. Das System der Naturwissenschaften.

Die einzelnen Zweige der Naturwissenschaft haben sich zunächst aus praktischen Bedürfnissen, nicht aus systematischen Rücksichten getrennt. Dennoch entspricht diese Gliederung ihrem thatsächlichen Erfolg wie ihrem zeitlichen Eintritte nach in hohem Grade zugleich den logischen Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Wissenschaften, sowie den besonderen Gestaltungen der Methodik, welche in ihnen herrschend ist. Das System der Naturwissenschaften, welches sich in der wirklichen Entwicklung derselben dargelegt hat, ist darum auch in logischer Beziehung im ganzen den künstlichen Eintheilungen überlegen, welche man zuweilen nach Bacon's Vorbild auszuführen versuchte. Nur an einzelnen Stellen,

namentlich da, wo specielle Bedingungen, wie sie aus der vielseitigen Verknüpfung der verschiedenen Gebiete hervorgehen, auf eine einzelne Disciplin fördernd oder hemmend eingewirkt haben, entfernt sich die historische Entwicklungsfolge von dem systematischen Zusammenhang.

Anfang und Grundlage aller erklärenden Naturwissenschaften ist die Mechanik. Sie ist die allgemeinste Naturwissenschaft, da auf die Erscheinungen, mit denen sie sich beschäftigt, auf die Bewegungen der Körper und ihrer Theile, alle andern der äussern Wahrnehmung gegebenen Naturerscheinungen vermöge des Grundsatzes der Unveränderlichkeit der materiellen Substanz zurückführbar sein müssen. Sie bildet ausserdem das Bindeglied zwischen Mathematik und Naturforschung. Denn nicht nur besitzen diejenigen ihrer Principien, die sich auf die reine Bewegungsvorstellung beziehen, völlig den Charakter abstracter mathematischer Allgemeinheit, sondern selbst jene mechanischen Sätze, bei denen die empirisch gegebenen Eigenschaften der Körper eine wesentliche Rolle spielen, pflegen diese Eigenschaften auf eine ideale Form zurückzuführen, der sich die Körper unserer Erfahrung immer nur annähern können. In Folge dieses Uebergewichts mathematischer Abstraction besitzt die Mechanik in höherem Grade als irgend eine andere Naturwissenschaft einen speculativen Charakter. Zugleich können in ihr mit grosser Schärfe die Annahmen von den Folgerungen, sowie unter den ersteren diejenigen Voraussetzungen, die in allgemeingültigen Anschauungen ihre Quelle haben, von jenen unterschieden werden, die auf einzelnen Erfahrungen beruhen. In Folge der vollkommen bindenden Schlussweisen endlich, durch welche sich aus einer kleinen Zahl allgemeiner Voraussetzungen das System der rationellen Mechanik entwickelt, ist diese auch in methodischer Beziehung das vollendete Vorbild einer exacten Naturwissenschaft.

An die Mechanik schliesst sich zunächst die Physik an. Während die Mechanik ihren Betrachtungen abstracte Hypothesen zu Grunde legt, die in keiner Erfahrung vollständig verwirklicht sind, hat im Gegentheil die Physik den besonderen Bedingungen Rechnung zu tragen, welche für die Geltung der mechanischen Gesetze aus den speciellen Eigenschaften und Verbindungen der Naturobjecte entstehen. Mit Rücksicht hierauf hat man mit Recht als das Ziel der Physik ihre vollständige Ueberführung in eine angewandte Mechanik bezeichnet. Diese Aufgabe ergiebt sich zugleich als ein Postulat aus jener Voraussetzung der Unveränderlichkeit der materiellen Substanz, auf welcher die Allgemeingültigkeit der mechanischen Gesetze beruht. Durch eine solche Reduction auf Mechanik wird aber nicht im geringsten die Selbständigkeit der Physik angetastet. Vielmehr bleibt ihr eine unermessliche Fülle eigenthümlicher Aufgaben in der Erforschung der concreten Bedingungen des Geschehens, insbesondere in der Gewinnung haltbarer Voraussetzungen über die Eigenschaften der Materie und in der Deduction der verschiedenen Naturerscheinungen aus denselben. Gerade dadurch, dass die Physik verpflichtet ist, ihre Annahmen den in der Er-

fahrung gegebenen Naturerscheinungen auf das genaueste anzupassen, entfernt sie sich weiter als die Mechanik von dem Charakter einer mathematischen Wissenschaft, die von der empirischen Gültigkeit ihrer Voraussetzungen unabhängig ist. In Folge der complicirten Beschaffenheit der Erscheinungen und Hypothesen verliert sie zudem sogar theilweise den Charakter einer exacten Wissenschaft, indem sie sich vielfach genöthigt sieht, an Stelle einer strengen Deduction der Erfahrungen aus gewissen allgemeinen Voraussetzungen eine Beschreibung der durch Beobachtung und Versuch festzustellenden Thatsachen treten zu lassen. Dieses Verhältniss hat im Verein mit pädagogischen Rücksichten die Trennung in experimentelle und theoretische oder mathematische Physik herbeigeführt. Es ist aber unrichtig, wenn man hierbei die experimentelle Physik als die ursprüngliche Wissenschaft bezeichnet, aus welcher sich die theoretische allmählich entwickelt habe, eine Ansicht, die mit der geläufigen und im Ganzen ebenso unrichtigen Unterscheidung eines inductiven und deductiven Stadiums einer jeden Wissenschaft zusammenhängt. Schon der Umstand, dass die Ausbildung der Mechanik derjenigen der Physik vorangegangen ist, widerspricht dem. In Wirklichkeit ist darum auch eine strenge Trennung jener beiden Disciplinen nicht durchzuführen, sondern wie die mathematische Physik der experimentellen eine Menge thatsächlicher Bestimmungen entnehmen muss, so pflegen anderseits in die letztere zahlreiche Abstractionen und Deductionen der ersteren einzugehen. Die mathematische Physik nähert sich ihrerseits nicht bloss durch ihren streng deductiven Charakter, sondern auch darin der Mechanik, dass sie nicht selten mit abstracten Voraussetzungen operirt, von denen von vornherein zugestanden wird, dass sie nur annähernd verwirklicht sein können. Aber sie sucht diese Voraussetzungen so lange umzugestalten, bis es ihr gelingt, eine völlige Uebereinstimmung mit gewissen numerischen Daten der Beobachtung herbeizuführen. Auf diese Weise stellt sie im Verein mit der Mechanik die Vermittelung her zwischen mathematischer Speculation und empirischer Forschung.

In ihrem weitesten Sinne umfasst die Physik das Gesammtgebiet des Naturgeschehens. Dieses trennt sich dann aber zunächst in zwei Theile, deren Inhalt von den verschiedenen Gesichtspunkten abhängt, unter welchen das hypothetische Substrat der Naturerscheinungen, die Materie, der wissenschaftlichen Betrachtung zugänglich ist. Eine Reihe allgemein verbreiteter Naturerscheinungen weist nämlich auf die allgemeinen Eigenschaften zurück, welche der Materie ohne Rücksicht auf jene specifischen Verschiedenheiten zukommen, die den charakteristischen Unterschieden der einzelnen Naturkörper zu Grunde liegen. Die Erscheinungen der Schwere, der Wärme, des Lichtes u. s. w. sind Naturerscheinungen, für deren Gestaltungsweise zwar die Unterschiede der Naturkörper nicht gleichgültig sind, bei deren Erklärung aber doch ein Zurückgreifen auf specifische Stoffunterschiede schon desshalb ausgeschlossen ist, weil sie an Körpern von

sehr verschiedenen materiellen Eigenschaften in übereinstimmender Weise auftreten. Die Betrachtung dieser allgemeinen Naturerscheinungen ist nun die Aufgabe der eigentlichen Physik, während die Untersuchung jener Eigenschaften der Körper, deren Erklärung die Annahme irgend welcher specifischer Stoffunterschiede erheischt, der Chemie anheimfällt.

Ein hiervon verschiedener Gesichtspunkt hat noch zu einer weiteren Spaltung der Physik den Anlass geboten. Der Biologie bleiben diejenigen Naturerscheinungen vorbehalten, die unter dem Gesichtspunkt des Zweckes zusammengefasst und als Lebenserscheinungen bezeichnet werden. Damit sollen diese keineswegs der allgemeineren physikalischen und chemischen Betrachtung entzogen sein, sondern es wird bloss der eigenthümliche Charakter angedeutet, welchen bestimmte zusammengesetzte Ergebnisse physikalischer und chemischer Fundamentalerscheinungen annehmen. In diesem Sinne betrachtet erscheint die Biologie als ein Anwendungsgebiet der Physik und Chemie, welches zu diesen seinen Mutterwissenschaften in einem ähnlichen Verhältnisse steht wie die theoretische Maschinenkunde zur allgemeinen Mechanik. Die Biologie beschäftigt sich mit der Anwendung der physikalischen und chemischen Principien auf gewisse natürliche Substanzcomplexe, die Organismen, die mit Rücksicht auf ihre zweckmässige Beschaffenheit den Charakter natürlicher Maschinen besitzen. Diese Betrachtungsweise reicht aber nicht mehr zu, sobald es sich um das Verständniss jener physischen Erscheinungen handelt, die, wie insbesondere die Entwicklungs- und Bewegungsvorgänge, mit dem geistigen Leben in Beziehung stehen. Hier bedarf vielmehr die Biologie der Psychologie zu ihrer Ergänzung, mit der vereinigt sie das verbindende Glied ist zwischen den Natur- und den Geisteswissenschaften.

Physik, Chemie und Biologie bilden dergestalt die drei aus der Physik hervorgegangenen Hauptzweige der theoretischen Naturlehre. Jeder dieser Hauptzweige lässt nun aber wieder eine gewisse Anzahl einzelner Anwendungen zu, wodurch sich eine grössere Zahl von Sondergebieten der Naturwissenschaft ergiebt. Jedes derselben entspringt aus der Anwendung irgend einer der drei Hauptdisciplinen oder mehrerer von ihnen auf einen besonderen Gegenstand der Natur.

Der allgemeinen Physik, welche sich mit den Naturerscheinungen ohne specielle Rücksicht auf bestimmte räumliche und zeitliche Bedingungen beschäftigt, ordnet sich so die kosmische Physik unter als diejenige Wissenschaft, welche die Ableitung der uns gegebenen Weltordnung aus den allgemeinen physikalischen Gesetzen zu ihrem Gegenstande hat. Sie zerfällt wieder in zwei Gebiete: in die Astronomie, deren Aufgabe in der Darlegung der wechselseitigen Beziehungen der Weltkörper besteht, und in die Astrophysik, welche die physikalischen Eigenschaften der einzelnen Weltkörper zergliedert, und welcher daher auch die Geophysik als ein wesentlicher Bestandtheil zuzurechnen ist. Die wechselseitigen Beziehungen der Weltkörper finden zunächst in den relativen Stellungen und

Bewegungen derselben ihren Ausdruck. Die Astronomie bildet daher eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der Mechanik schwerer Körper, ausgezeichnet zugleich durch die verhältnissmässig einfachen Bedingungen, unter welchen die Bewegungen stattfinden. Von den sonstigen physischen Eigenschaften der Weltkörper fallen nur diejenigen, welche im Stande sind, auf die Entstehung der gegenwärtigen Weltordnung Licht zu werfen, der Mitberücksichtigung der Astronomie anheim. Hier ist dann die letztere ganz und gar auf die Verwerthung der Resultate angewiesen, welche die Astrophysik bei der Untersuchung der einzelnen Weltkörper gewonnen hat. Die nämlichen Ursachen aber, welche die frühzeitige Ausbildung der astronomischen Wissenschaft möglich machten, bedingen eine sehr langsame Entwicklung der astrophysischen Kenntnisse. Diese beschränken sich naturgemäss auf die durch die Hülfsmittel des Gesichtssinns wahrzunehmenden Erscheinungen und auf die Schlüsse, die aus denselben gezogen werden können. So vollständig nun auch diese Hülfsmittel zum Aufbau der Mechanik des Himmels genügen, ebenso unzureichend sind sie im allgemeinen zur Erforschung der übrigen physikalischen Eigenschaften der Gestirne. Nur ein einziger Weltkörper macht in dieser Beziehung eine Ausnahme, unsere eigene Erde. Die Geophysik ist daher derjenige Zweig der Astrophysik, welcher der vollkommensten Ausbildung fähig ist, so dass hier das praktische Bedürfniss zu einer Theilung in verschiedene Zweige geführt hat. Unter ihnen nimmt die physikalische Geographie die Stelle einer allgemeinen Geophysik ein, indem sie von den allgemeinsten Eigenschaften des Erdkörpers und ihren wechselseitigen Beziehungen Rechenschaft zu geben sucht. Sie stützt sich dabei theils auf die specielleren Theile der Geophysik, welche sich nach einzelnen Seiten hin mit den physischen Eigenschaften der Erde beschäftigen, wie Meteorologie und Klimatologie, Chorologie und Geologie; theils verbindet sie sich mit der organischen Naturgeschichte und bildet so die besonderen Disciplinen der Pflanzen-, Thier- und Anthropogeographie. Hier berührt sich aber wieder die Geologie mit der Chemie, die Pflanzen- und Thiergeographie mit der Biologie, und die Anthropogeographie tritt in ein näheres Verhältniss zu den Geisteswissenschaften, insbesondere zur Geschichte und Völkerkunde. Es findet hierin das allgemeine Gesetz seinen Ausdruck, dass die wissenschaftlichen Gebiete um so mehr in einander eingreifen, je mehr sie sich auf concrete Naturgegenstände und nicht auf allgemeine Erscheinungen beziehen.

Von verschiedenartigen Motiven ist die Gliederung der Chemie bestimmt worden. Bei der Eintheilung in jene beiden Hauptzweige, welche die wenig angemessenen Namen der unorganischen und der organischen Chemie tragen, haben hauptsächlich zwei Gesichtspunkte zusammengewirkt. Auf der einen Seite schien es wünschenswerth, die fundamentalen Eigenschaften der chemischen Elemente und ihrer Verbindungen in einem grundlegenden Theile zu behandeln, welchem dann die systematische Beschreibung der einzelnen Verbindungen in einer besonderen Disciplin

zu folgen habe. Auf der andern Seite forderten die Kohlenstoffverbindungen durch ihre Zahl und ihre Eigenschaften eine abgesonderte Behandlung heraus. In Folge dieser heterogenen Motive trägt die Eintheilung in unorganische und organische Chemie fast mehr das Gepräge einer praktischen Arbeitstheilung als einer aus den inneren Eigenschaften des Gegenstandes erwachsenen Trennung. Waltet auch in der unorganischen Chemie, insofern sie es mit den allgemeinen Grundlagen der chemischen Wissenschaft zu thun hat, im ganzen mehr der Versuch theoretischer Erklärung, in der organischen Chemie der Standpunkt systematischer Classification vor, so hat sich doch theils in Folge der Hereinziehung eines grossen Theils des Systems der chemischen Verbindungen in die unorganische Chemie, theils in Folge der Verwerthung gerade der Kohlenstoffverbindungen zu theoretischen Speculationen dieses Verhältniss mannigfach verschoben. Auch hat wohl hauptsächlich dieser Umstand zur Abzweigung einer physikalischen Chemie als besonderer Disciplin Anlass gegeben. Indem man in ihr alle diejenigen Untersuchungen vereinigt, welche irgend eine directe Beziehung zur Erklärung der chemischen Fundamentalerscheinungen besitzen, bereitet sich hier eine Trennung vor, welche in dem bisherigen chemischen System noch nicht zur Durchführung gelangt ist, die Trennung nämlich in eine theoretische und in eine systematische Chemie. Davon würde der ersteren die theoretische Erklärung der chemischen Erscheinungen, der zweiten die systematische Classification und Beschreibung der chemischen Verbindungen zufallen.

Abermals von andern Gesichtspunkten aus hat sich die weitere Gliederung der Biologie vollzogen. Zunächst erwies sich hier eine eingehende Kenntniss des Baues und der Structur der Organismen als unerlässliche Bedingung des Studiums der Lebenserscheinungen. Es schieden sich daher zunächst die Anatomie und die Physiologie der Pflanzen und der Thiere. Bildet als bloss descriptive Disciplin betrachtet die Anatomie die Vorbereitung zur Physiologie, so ist sie als erklärende Untersuchung der Formentwicklung oder als Entwicklungsgeschichte ein integrirender Bestandtheil derselben. Die Physiologie scheidet sich sodann nach der durchgreifenden Verschiedenheit der Lebenserscheinungen in die Physiologie der Pflanzen und in die Physiologie der Thiere, aus welchen sich die allgemeine Physiologie als diejenige Wissenschaft abgesondert hat, welche die allgemeinen Eigenschaften der Organismen und den Zusammenhang der gesammten Lebenserscheinungen zum Object ihrer Untersuchungen nimmt.

Von den in den einzelnen Gebieten der Naturlehre zur Geltung gelangten Principien aus werden nun durchgängig die Anschauungen bestimmt, welche für die systematische Erkenntniss der einzelnen Naturobjecte gültig sind. Der alte Name der Naturgeschichte deutet vollkommen treffend dieses Verhältniss an. Denn er bezeichnet als die eigentliche Aufgabe einer systematischen Beschreibung der Gegenstände die Ableitung ihrer Eigenschaften aus den Bedingungen ihrer Entstehung, d. h. ihre Erklärung aus bestimmten physikalischen, chemischen oder biologischen Gesetzen.

Für den jeweiligen Zustand der systematischen Naturwissenschaften ist nun aber ausserdem die Thatsache bestimmend, dass das Bedürfniss nach einer geordneten Uebersicht der Objecte schon in den Anfängen der wissenschaftlichen Erkenntniss fühlbar wird, lange bevor in dem entsprechenden Gebiet der Naturlehre die zu einem genetischen Verständniss erforderlichen Vorbereitungen gewonnen sind. Die Naturgeschichte sucht daher zunächst durch provisorische, meist auf die äussere Form der Gegenstände gegründete Eintheilungen eine vorläufige Ordnung zu schaffen, und erst in der weiteren Entwicklung ihres Systems kommen allmählich bestimmte theoretische Anschauungen zur Geltung. Von da an reflectirt sich dann in dem Wechsel der systematischen Principien die Entwicklung der gesammten Naturanschauung. (Vgl. Abschn. I, S. 43 ff.) Doch ist, was die thatsächliche Trennung der einzelnen Zweige des naturwissenschaftlichen Systems von einander betrifft, der eigenthümliche Umstand nicht zu übersehen, dass die Classification der chemischen Verbindungen nicht getrennt zu werden pflegt von der Theorie der chemischen Erscheinungen. Dies entspringt theils aus dem verhältnissmässig unvollkommenen Zustand der chemischen Wissenschaft, bei welchem die Aufgaben der Beschreibung und Erklärung noch nicht hinreichend auseinandergehalten werden, theils aus den eingewurzelten Traditionen der Naturgeschichte, nach denen nur die natürlich vorgefundenen Naturobjecte, nicht die künstlich erzeugten, als Gegenstände besonderer systematischer Wissenschaften behandelt werden.

## 2. Heuristische Principien der Naturforschung.

### a. Causale und teleologische Naturbetrachtung.

Alle Naturforschung geht aus von der Sinneswahrnehmung. So sehr aber schon für das naive Bewusstsein die Sinneserscheinungen in Beziehungen zu einander treten und dadurch Versuche zusammenhängender Naturerklärung herausfordern, so widersetzen sich doch die Vorstellungen der einzelnen Sinnesgebiete durch ihre verschiedenartige Beschaffenheit einer durchgängigen Verbindung der Erscheinungen. Da nun gleichwohl das Erkenntnissbedürfniss zu einer solchen drängt, so wird das einzige Auskunftsmittel ergriffen, welches hier möglich ist: man ordnet die Erscheinungen unter gewisse allgemeine Begriffe, die aus der Wechselwirkung unseres eigenen Denkens und Handelns mit der Aussenwelt hervorgegangen sind. Die Principien, die hierbei zur Anwendung kommen, können wir heuristische nennen, weil sie nicht als Resultate, sondern als leitende Maximen der Forschung auftreten. Der Gebrauch dieser Principien findet aber seine Begründung darin, dass das denkende Subject niemals von den Erkenntnissformen abstrahiren kann, welche durch die Beziehungen, in die es mit den Objecten seines Denkens tritt, sich entwickelt haben. Der

berechtigten Anwendung derselben muss darum stets die sorgfältige Untersuchung der Frage vorangehen, ob sie nothwendige Erkenntnissbedingungen sind, und ob die Objecte, in ihrem rein erfahrungsmässigen Zusammenhang betrachtet, ihnen wirklich entsprechen. An der Prüfung dieser Frage lässt es nun die ursprüngliche Naturphilosophie durchaus fehlen. Sie überträgt ohne weiteres gewisse Allgemeinbegriffe auf die Naturgegenstände. Aber weder weist sie deren specifische Berechtigung noch überhaupt die Zulässigkeit des ganzen Verfahrens nach; daher denn auch ihr Gebäude skeptischen Angriffen niemals Stand halten kann. Zugleich behält hierbei die subjective Willkür der Anschauungen einen ziemlich freien Spielraum. Wenn trotzdem die thatsächlich zur Entwicklung gelangten Grundanschauungen an Zahl beschränkt sind, so liegt dies lediglich daran, dass es von Anfang an gewisse vorherrschende Motive des Denkens giebt.

Naturgemäss sind nun die Einflüsse, welche die Gestaltung bestimmter Grundanschauungen hervorrufen, immer doppelter Art: einerseits giebt es bestimmte Naturerscheinungen, die vor andern die Aufmerksamkeit fesseln, anderseits subjective Begriffe und Gefühlsrichtungen, die als das Bewusstsein beherrschende Mächte zugleich die Auffassung der Aussenwelt lenken. Diese beiden Einflüsse greifen stets in einander: nach den Ideen, die uns regieren, richtet sich unsere Apperception der Objecte, und diese sind mannigfaltig genug, um sich den verschiedenartigsten Bedürfnissen zu fügen.

Schon in der frühesten Naturphilosophie treten uns auf diese Weise zwei Grundanschauungen entgegen, die sich in vielfach modificirten Gestalten innerhalb der physikalischen Forschung bis zum Beginn der Neuzeit bekämpfen. Auf der einen Seite ist die antike Atomistik beherrscht von dem Begriff der Causalität. Indem diese von ihr als das allgemeingültige Princip angesehen wird, welches durch die mit ihm verbundene Idee starrer Nothwendigkeit die Einheit aller Naturerscheinungen verbürgen soll, bieten sich die Bewegungserscheinungen, vor allem die beim Stoss der Körper eintretenden Uebertragungen der Bewegung, als ein unmittelbar anschauliches Bild causaler Beziehung dar, und es entsteht die Forderung, alle andern Formen der Naturcausalität auf dieses Urbild zurückzuführen. Die atomistische Hypothese ist die nothwendige Consequenz dieser Forderung. Sie enthält das Anerkenntniss, dass zahlreiche Naturerscheinungen jenem Bild des Stosses und der Bewegung nicht unmittelbar entsprechen, und sie betrachtet demgemäss, um gleichwohl das Postulat der mechanischen Naturerklärung aufrecht zu erhalten, alle sonstigen Erscheinungen als einen sinnlichen Schein, hinter dem als reales Substrat ein der Wahrnehmung unzugänglicher mechanischer Vorgang verborgen sei. Der letztere fordert dann unsichtbare, also unmessbar kleine Körperelemente, die Atome, die, ähnlich den wahrnehmbaren Körpern, durch Zwischenräume getrennt sind, um gleich ihnen in mechanische Wechselwirkungen treten zu können. Ebenso sind alle weiteren Sätze der antiken

Atomistik, insbesondere die Ueberzeugung von der absoluten Constanz der Materie, unmittelbare Folgen des in dieser Lehre zum Ausdruck gelangten mechanischen Causalitätsbegriffs.

Einer Annahme gegenüber, welcher das denkende Subject selbst in dem Mechanismus der Körperwelt verloren geht, erhebt sich um so energischer eine Anschauung, welche ein zusammenhängendes Bild der Natur zu gewinnen sucht, indem sie die ethischen Motive des menschlichen Handelns auf die Aussenwelt überträgt. Der Begriff, der hier zum herrschenden wird, ist der Zweck. Unter den Naturvorgängen, nach deren Vorbild man alle andern zu beurtheilen sucht, fesseln gerade diejenigen hauptsächlich die Aufmerksamkeit, deren Realität der Atomistiker leugnet, die Erscheinungen des Werdens und Vergehens und die auf sie zurückführenden qualitativen Veränderungen. Denn wie der Mensch da in eminentem Sinne zwecksetzend auftritt, wo er schöpferisch gestaltet, so erscheint auch die Natur vor allem dann von Zwecken bewegt, wenn sie neue Bildungen hervorbringt; das Vergehen aber ist ein nothwendiges Correlat des Werdens. Nirgends tritt dieses zweckvolle Werden und Vergehen so augenfällig hervor wie in der organischen Natur. Der organisirte Körper hat zu jeder Zeit den Vergleich mit einem Kunstwerk herausgefordert, und die Aufeinanderfolge seiner Entwicklungszustände legt den allgemeineren Gedanken einer zweckmässigen Weltentwicklung nahe. Zu einer derartigen Naturanschauung sind daher mannigfache Ansätze schon bei den älteren Philosophen, einem Heraklit, Anaxagoras, Empedokles, zu finden. Eine klarere Gestaltung aber gewinnt sie sammt ihren Motiven erst in der Platonisch-Aristotelischen Philosophie. Während bei Plato die ethische Quelle dieser ganzen Richtung offen zu Tage tritt, ist es Aristoteles, der zuerst dem Zweckbegriff seine allgemeinere Bedeutung giebt und in Verbindung damit den Entwicklungsgedanken vollständiger durchführt. Theils hierdurch, theils durch die Fülle seiner Einzelkenntnisse ist Aristoteles für die teleologische Richtung der Physik auf lange Zeit massgebend geblieben.

Es ist ein Irrthum, wenn man, wie es zuweilen geschieht, die Gegensätze mechanischer und teleologischer Physik zu den Gegensätzen von Empirie und Speculation in Beziehung bringt, indem man den ersten Standpunkt aus einer objectiven Bearbeitung der Erfahrung, den zweiten aus einer durch subjective Begriffe gefälschten Ordnung derselben zu erklären sucht. Vielmehr sind beide Anschauungen von objectiven und von subjectiven Motiven bestimmt worden, und beide sind überwiegend speculativen Ursprungs. Der mechanische Causalitätsbegriff eines Demokrit war in der That ebenso gut ein durch die thatsächliche Erfahrung nur unzureichend unterstütztes Postulat wie der Entwicklungsgedanke des Aristoteles, und hinter jenem stand nicht minder wie hinter diesem als subjective Grundlage das menschliche Handeln; nur ging der Atomistiker ebenso einseitig von dem äussern Effect, der bewegenden Wirkung auf umgebende

Körper aus wie der teleologische Physiker von dem inneren Motiv der Handlung, der sie bestimmenden Zweckvorstellung.

Was uns heute vor allem als das Ungenügende aller dieser Bestrebungen erscheint, das ist der vollständige Verzicht auf jede Begründung ihrer Voraussetzungen. Durch einen Machtspruch wird von den alten Naturphilosophen die Idee eines allgemeinen Substrates der Erscheinungen eingeführt. Man denkt weder daran, nachzuweisen, warum überhaupt die Annahme eines solchen nothwendig ist, noch warum es die vorausgesetzte Beschaffenheit haben, also z. B. aus Atomen und leeren Zwischenräumen bestehen müsse. Nicht minder treten in der Physik des Aristoteles die allgemeinen Begriffe des Stoffs, der Form und des Entblösstseins, die verschiedenen Arten der Formbestimmung, die vier Elemente u. s. w. ohne jede Rechtfertigung als thatsächliche Bestimmungen des natürlichen Seins auf; namentlich aber die Grundanschauung, dass der Zweck die höchste und letzte Formbestimmung sei, gilt als eine durchaus selbstverständliche Annahme. Liesse sich auch etwa denken, einem Demokrit habe seine Anschauung nur als eine hypothetische Form einheitlicher Naturbetrachtung gegolten, ähnlich wie dies bei dem späteren Erneuerer der Atomistik, bei Epikur, der Fall war, so liegt doch sicherlich im allgemeinen eine solche Auffassung nicht im Charakter der antiken Naturphilosophie, und bei Aristoteles ist sie ganz und gar ausgeschlossen. Mit Rücksicht auf das Verhältniss der zu Grunde gelegten Principien und der auf sie gegründeten Erklärungsversuche bewahrt also die antike Naturphilosophie in allen ihren Richtungen ihren überwiegend speculativen Charakter. Aus einer geringen Zahl von Inductionen und Abstractionen, welche von der Oberfläche der Erscheinungen geschöpft sind, und aus bestimmten Begriffspostulaten gewinnt sie ihre Voraussetzungen, denen nun die ganze Fülle der Naturerscheinungen sich fügen muss. Da jene Inductionen und Abstractionen im wesentlichen schon der allverbreiteten vorwissenschaftlichen Erfahrung angehören, so gelten sie als selbstverständliche Wahrheiten, bei denen man sich jeder Nachweisung meint entschlagen zu können. Wie wäre es nöthig zu beweisen, dass der Stoss den Körper bewegt, oder dass alles Existirende aus Stoff und Form besteht? Giebt man sich auch auf einem Standpunkte reiferer Reflexion darüber Rechenschaft, dass die Begriffe von Stoff und Form in unserm Denken entspringen, so führt dies höchstens zu der Ueberzeugung, welche die Aristotelische Metaphysik beherrscht, dass die Objecte realisirte Begriffe seien. Noch weniger ist daran zu denken, dass man die objective Berechtigung jener Begriffspostulate, durch welche die Erfahrungsbegriffe überall erst ihre bestimmte Gestaltung gewinnen, anzweifelt. Eben darum, weil Causalität und Zweck Postulate sind, bleibt ihre Gültigkeit ursprünglich ausser Frage. Doch besteht hier allerdings ein bemerkenswerther Unterschied zwischen der causalen und der teleologischen Naturanschauung, der schon in ihren frühesten Gestaltungen sich äussert. Wenn die letztere den Zweck als den letzten Grund des

Geschehens ansieht, so ist sie weit davon entfernt, gleichzeitig die Causalität leugnen zu wollen, sondern sie ist im Gegentheil der Meinung, damit nur den Causalbegriff selber vertieft zu haben. Dagegen verbindet sich schon der mechanische Causalitätsbegriff eines Demokrit mit der energischen Leugnung der Zwecke, und diese Tendenz ist seitdem der mechanischen Naturanschauung erhalten geblieben.

Dies führt uns auf einen wesentlichen Unterschied beider Grundanschauungen, der für ihre historische Bedeutung massgebend geworden ist. Die mechanische Ansicht hat die Vorzüge der Consequenz und der Einfachheit für sich. Aber eben desshalb setzt sie sich zunächst in Widerspruch mit der Vielgestaltigkeit der Naturerscheinungen, welche verschiedenartige Principien der Erklärung zu fordern scheint. Dieser Forderung wird die teleologische Physik mehr gerecht, und sie ist daher schon mit Rücksicht auf die äussere Erfahrung ursprünglich einleuchtender, auch wenn man von ihren ethischen Beweggründen absieht. Wo immer in der Naturwissenschaft der teleologische Standpunkt vorwaltet, da hat dieselbe darum in Folge jener vielseitigeren Anpassung an die einzelnen Erscheinungsgebiete eine verwickeltere Gestalt angenommen. Keine Darstellung der Naturlehre hat aber wohl so sehr wie die Aristotelische allen den Bedürfnissen Rechnung getragen, die dem Standpunkte der unmittelbaren, wissenschaftlich noch nicht ausgebildeten Erfahrung entsprechen. Schon die Methode, deren sich der Stagirite überwiegend bedient, erscheint vollkommen geeignet, das nächste Wissensbedürfniss zu befriedigen. Sie besteht, gemäss dem Charakter der Aristotelischen Logik, in der Begriffssubsumtion und in der dialektischen Verknüpfung der Allgemeinbegriffe. Die letzteren sind theils, wie die Gegensätze der Elemente, der natürlichen und der gezwungenen Bewegung, des Stoffs und der Form, dem unmittelbaren Eindruck der sinnlichen Objecte, theils, wie der Zweck, die Vollkommenheit, den nächstliegenden subjectiven Erfahrungen entnommen. Nachdem die Begriffssubsumtion dem ersten Ordnungsbedürfniss des Geistes Genüge geleistet, empfängt dann durch die dialektische Verarbeitung der Begriffe der speculative Trieb seine Befriedigung. Durch eine scharfsinnige Benützung der logischen Technik werden hier, indem der Philosoph die verschiedenen Begriffe zu einander in Beziehung setzt und namentlich von den Verfahrungsweisen der Eintheilung und der Ausschliessung Gebrauch macht, allgemeine Sätze gewonnen, die in der Aristotelischen Physik die Rolle von Naturgesetzen übernehmen. Jede Veränderung, so wird z. B. deducirt, ist entweder ein Werden oder ein Vergehen; Werden und Vergehen ereignen sich aber nur zwischen entgegengesetzten Dingen. Nun giebt es eine Bewegung, die nicht zwischen Gegensätzen stattfindet, die kreisförmige; also ist die kreisförmige Bewegung des Himmels ewig und unveränderlich*). Auf diese Weise gelangt Aristoteles zu dem seine

*) Aritoteles, Physik, VIII, 7

ganze Naturlehre beherrschenden Satze, dass der gleichförmige Umschwung des Himmels der Ursprung aller Bewegungen und Veränderungen in der Natur sei. Diese Methode gewährt zugleich den Vortheil, dass sie gestattet, mehrere parallel laufende Beweisführungen zu entwickeln, in denen aus verschiedenen Vordersätzen der nämliche Schluss abgeleitet wird. So wird z. B. für den oben angeführten Satz noch eine grosse Zahl anderer Beweise beigebracht, in denen successiv fast alle Grundbegriffe dieser Physik zur Verwendung kommen, so dass die verschiedenen Deductionen theils gegenseitig sich stützen, theils die festere Verbindung des ganzen speculativen Gebäudes vermitteln helfen.

Zu solchen Vorzügen der Methode tritt nun die vielseitigste Berücksichtigung der verschiedenen Erfahrungsgebiete. Nirgends wird an das Bewusstsein die harte Zumuthung gestellt, von den ihm selbst innewohnenden Motiven des Geschehens völlig abzusehen oder bestimmte äussere Naturvorgänge, die sich der unmittelbaren Beobachtung aufdrängen, schlechthin zu negiren. Neben der qualitativen Veränderung findet die mechanische Bewegung ihre Stelle, und der teleologische Grundcharakter seiner Physik hindert den Aristoteles keineswegs an der richtigen Erkenntniss einfacher mechanischer Sätze, wie des Hebelgesetzes*). Selbst die Eintheilung der Bewegungen in natürliche und gewaltsame wird man als eine der ersten Auffassung nahe liegende und darum einer naiven Naturbeobachtung sich empfehlende Unterscheidung anerkennen müssen. So ist überhaupt die Aristotelische Naturphilosophie ein dem Standpunkte unmittelbarer Erfahrung vollkommen angemessenes und demselben zugleich durch die unverhältnissmässige Ausbildung der dialektischen Hülfsmittel im höchsten Masse imponirendes System. Darum hat dieselbe denn auch nicht nur während einer langen Zeit die Herrschaft behauptet, sondern sie hat zugleich der Entwicklung anderer Anschauungen als eines der mächtigsten Hindernisse im Wege gestanden. Je begreiflicher aber jene Herrschaft erscheint, um so mehr drängt sich zugleich die Frage auf, welche Ursachen schliesslich das Uebergewicht der mechanischen Naturansicht herbeiführten.

### b. Das Postulat der Anschaulichkeit.

Die gewöhnliche Antwort auf die obige Frage besteht darin, dass man auf die vollkommene Uebereinstimmung der auf der Grundlage der Mechanik unternommenen Erklärungen mit der Erfahrung hinweist. Aber man übersieht hierbei, dass diese Uebereinstimmung das späte Product einer langen Entwicklung ist, und dass niemals der Nachweis der Durchführbarkeit der mechanischen Naturansicht gelungen wäre, wenn man dieselbe nicht lange vorher als Forderung an die Interpretation der

*) Aristoteles, Quaestiones mechanicae, cap. 4.

Erscheinungen herangebracht hätte. Nicht bloss die antike Atomistik war ein rein speculatives Gebäude, sondern auch im Zeitalter Galilei's, als die mechanische Physik ihren Kampf um die Herrschaft begann, besass die Grundvoraussetzung derselben noch einen durchaus hypothetischen und fragwürdigen Charakter. In der That, der Grundgedanke der mechanischen Physik ist ebenso wenig unmittelbar und ausschliesslich der Erfahrung entnommen, wie die Begriffe der Dynamis und Energie bei Aristoteles, sondern jener Gedanke ist zunächst als ein logisches Postulat entstanden und hat dann erst in der fruchtbaren Anwendung, die er zuliess, seine Rechtfertigung gefunden. Jede wissenschaftliche Erklärung der Natur strebt, gemäss dem logischen Trieb des Bewusstseins, nach Einheit und Zusammenhang der Erscheinungen. Die teleologische Physik sucht diese Einheit in dem Zweck als demjenigen Allgemeinbegriff, der aus dem eigenen Handeln des Bewusstseins entspringt, und dem sie die durch die unmittelbare Erfahrung gewonnenen Reflexionsbegriffe unterordnet. Welches ist nun der Einheitsgedanke, der die mechanische Physik beseelt? Auf den Causalitätsbegriff wurde schon hingewiesen, aber er steht hier nicht in erster Linie; vielmehr ist schon in der antiken Atomistik das treibende Motiv die vollkommene Anschaulichkeit der Voraussetzungen. Die Bewegungen der Körper und ihre Wechselwirkungen im Stoss sind ein anschauliches Geschehen, bei welchem zugleich der Zuschauer von seiner eigenen Anwesenheit abstrahiren kann, so dass hierin eine Bürgschaft dafür zu liegen scheint, dass in Folge der Ableitung aus Bewegungen die Erscheinungen auf ihren objectiven Gehalt zurückgeführt werden. Wie die teleologische Physik unter dem Postulat der subjectiven Begreiflichkeit, so handelt daher die mechanische unter dem der objectiven Anschaulichkeit des Geschehens, und dieses erst führt zu jener streng causalen Betrachtung, welche dann durch den dem Causalitätsprincip eigenen Vorzug logischer Folgerichtigkeit ihrerseits das Uebergewicht der mechanischen Naturansicht verstärken hilft. Der Hauptgegensatz, welcher in dem Kampfe teleologischer und mechanischer Physik entscheidend wird, dreht sich demnach um die Frage, ob die Natur als ein begrifflicher, oder ob sie als ein anschaulicher Zusammenhang aufgefasst werden soll. Im ersteren Sinne entscheidet sich das Aristotelische System und jedes, das nach ihm von analogen dialektischen Voraussetzungen ausgeht, wie z. B. die Naturphilosophie Schelling's und Hegel's; im Sinne der Anschaulichkeit hat die neuere wissenschaftliche Physik die Frage beantwortet, und sie hat damit in Bezug auf die allgemeine Richtung seiner Bestrebungen dem Demokrit gegen Aristoteles und seine verspäteten Nachfolger Recht gegeben.

Die innere Nothwendigkeit dieser Entscheidung liegt aber im Wesen der äusseren Erfahrung begründet. Die Natur ist die Gesammtheit der in der Anschauung gegebenen Erscheinungen. An die Bedingungen der Anschauung bleibt daher alle Erkenntniss der Natur gebunden. Niemals kann

eine solche Erkenntniss anders sich vollziehen, als dass sie das anschaulich Gegebene auf ein anderes anschaulich Gegebenes und so die Gesammtheit der Naturerscheinungen schliesslich auf eine gewisse Anzahl primitiver Thatsachen der Anschauung zurückführt. Auch die Begriffe, die zur Ordnung dieser Thatsachen dienen, bedürfen der anschaulichen Verwirklichung; niemals können sie als leere Formen über der Welt der Erscheinungen schweben. Dies ereignet sich aber bei jenen Kategorien der teleologischen und dialektischen Naturphilosophie, die entweder aus der Fülle der Erscheinungen abstrahirt oder aus gewissen logischen und ethischen Motiven an dieselben herangebracht werden, ohne in bestimmten Vorstellungen der äusseren Anschauung unmittelbar objectivirt zu sein. Freilich sind auch die Causalität und der im richtigen Sinne verstandene Zweckbegriff, der lediglich eine Umkehrung der causalen Beziehung enthält, Kategorien, die unser Denken an die Erfahrung heranbringt; aber diese Begriffe sind eben nur insofern von physikalischer Anwendung, als sie in einfachsten Thatsachen der Anschauung unmittelbar verwirklicht sind. Dies geschieht für das Gesammtgebiet der Naturlehre in dem mechanischen Causalitätsbegriff, welcher als Ursache und als Wirkung nur anschaulich gegebene äussere Bewegungen anerkennt, indem er in die regelmässige Beziehung dieser Bewegungen oder ihrer Energien das ganze Causalitätsverhältniss verlegt. Treffend hat Kant diese nothwendige Verbindung des anschaulichen und des begrifflichen Elements in die Worte gefasst: »Begriffe ohne Anschauungen sind blind, und Anschauungen ohne Begriffe sind leer.« Trotzdem ist bei Kant selbst der Standpunkt der dialektischen Physik nicht überwunden. Er verräth sich nicht bloss darin, dass die Kategorien zuerst ohne jede Rücksicht auf die Anschauung aus den logischen Urtheilsformen abgeleitet und dann nachträglich erst in anschauliche Formen übertragen werden, sondern auch in der ganz ungehörigen Bevorzugung der Zeit, bloss aus dem Beweggrund, weil die Zeit intellectuell und sinnlich zugleich sei, während doch für den Raum dieses Prädicat ebenfalls zutrifft, und dieser als die Form des Coëxistirenden in der Aussenwelt nicht minder wesentliche Bedingungen für die anschauliche Gestaltung des Substanz- und Causalbegriffs mit sich führt. Der zweite Fehler hängt hier mit dem ersten zusammen. Hätte Kant daran festgehalten, dass Begriffe desshalb nur in anschaulichen Formen existiren können, weil sie sich an und mit den Anschauungen entwickeln, so wäre von selbst die Raumanschauung in ihre berechtigte Stellung eingerückt, und es hätten überdies die gekünstelten Ableitungen der Kategorien und ihres Schematismus einer naturgemässen Entwicklung aus der unmittelbaren Wechselwirkung von Anschauung und Denken Platz gemacht.

Ohne sich der erkenntnisstheoretischen Motive bewusst zu sein, geht die mechanische Physik von der nämlichen Betrachtungsweise aus. Der einzige wirkliche Gegenstand ihrer Untersuchung sind die einzelnen Objecte der Anschauung in ihren anschaulich gegebenen Beziehungen. Wenn

sie sich trotzdem gewisser Allgemeinbegriffe, wie der Substanz und Causalität, bedient, so bedeuten diese nichts, was zu den Anschauungsobjecten hinzukäme oder gar ausserhalb derselben noch einmal selbständige Wirklichkeit besässe, sondern es sollen durch sie nur gewisse allgemeine Existenz- und Beziehungsformen des Wirklichen ausgedrückt werden, zu deren Gestaltung unser Denken durch die sinnliche Wahrnehmung angeregt wird. Indem nun aber jene Beziehungsformen als constante Elemente der Wahrnehmungen wiederkehren, neben denen sich veränderliche und darum für die begriffliche Auffassung zufällige Bestandtheile bemerklich machen, erhebt sich die Forderung, diese letzteren zu eliminiren und so die äussere Erfahrung ausschliesslich auf jene constanten Elemente zurückzuführen, mit deren Aufhebung die anschauliche und die begriffliche Auffassung der Welt gleichzeitig verschwinden würden. Diese constanten Elemente aller Erfahrung sind aber die zeitlichen und räumlichen Formen des Geschehens, losgelöst von den qualitativen Elementen der Wahrnehmung, die in der einzelnen Vorstellung niemals fehlen, und von denen wir daher auch nur absehen können, indem wir ihren Inhalt als einen gleichgültigen auffassen. Hieraus entspringt die an einer früheren Stelle bereits besprochene Tendenz der Naturerklärung, zunächst der materiellen Substanz die abstracten Eigenschaften des Raumes, vor allem seine Constanz, beizulegen und sodann von hier aus auch den ursprünglich regellos schweifenden Causalitätsbegriff auf die räumliche Wechselbeziehung unveränderlicher Gebilde zu beschränken. (Bd. 1, S. 493.) Erst indem diese näheren Bestimmungen zu dem allgemeinen Postulat der Anschaulichkeit hinzutreten, wird die Grundvoraussetzung der mechanischen Naturlehre gewonnen. Nichts desto weniger weist jenes Postulat schon auf dieselbe hin. Denn durch die Reduction der Beziehungen aller Wahrnehmungsobjecte auf die Beziehungen rein geometrischer Gebilde wird in eminentem Sinn dem Streben nach Anschaulichkeit entsprochen. Eine Verstärkung erhält ausserdem diese Ansicht noch aus einer andern Quelle, aus dem praktischen Wunsche nämlich, die sich immer vollkommener entwickelnden Hülfsmittel der Mathematik der physikalischen Forschung dienstbar zu machen. Hier treffen vollständig die Entwicklungsbedingungen der Naturwissenschaft mit denen ihrer abstracten Grundlage, der Mechanik, zusammen. Wie die letztere durch jene mathematische Tendenz dazu getrieben wird, ihre Deductionen an geometrische Abstractionen zu knüpfen, denen keine unmittelbare Wirklichkeit in der Erfahrung zukommt, so überträgt hinwiederum die Physik diese Abstractionen der Mechanik so viel als möglich auf ihr Gebiet, um erst nachträglich an ihnen die Veränderungen anzubringen, die durch die einzelnen Erfahrungen gefordert werden. Die Voraussetzungen über die anschaulichen Substrate von Substanz und Causalität müssen dadurch immerhin einen abstract geometrischen Charakter bewahren, namentlich aber muss der Begriff des Geschehens innerhalb der von der Mechanik festgehaltenen Vorstellung der Bewegung ver-

bleiben. So haben also die anschaulichen Motive des Substanzbegriffs nebenbei als methodische Einflüsse zuerst von der Geometrie auf die Mechanik und dann von dieser auf die Physik herübergewirkt.

Bei allen diesen Verhältnissen handelt es sich um rein erkenntnisstheoretische Momente, die der naturwissenschaftlichen Erfahrung als speculative Beweggründe gegenübertreten, da sie nicht erst die Begründung durch die Erfahrung abwarten, sondern von vornherein die Gesichtspunkte abgeben, unter denen man dieselbe beurtheilt. Hier beginnt nun aber zugleich der tiefgreifende Unterschied zwischen den älteren Anticipationen der mechanischen Naturanschauung und ihrer Verwirklichung in der neueren Physik. Dort bleibt diese Anschauung ein speculatives Postulat, hier gilt sie nur desshalb als gesichert, weil sie nicht bloss Voraussetzung, sondern auch Resultat der wissenschaftlichen Erfahrung ist. Es wird zugestanden, dass alle speculativen Gründe nicht zureichen würden, die Voraussetzung der mechanischen Physik festzuhalten, wenn sie sich nicht fortwährend brauchbar erwiese zu einer wahren Interpretation der Erscheinungen.

### c. Der kritische Zweifel.

Hiermit kommen wir auf den letzten entscheidenden Grund, dem die mechanische Naturansicht ihren Sieg über die ältere teleologische Physik verdankt. Dieser Grund, der nur im historischen Sinne und mit Rücksicht auf die naturgemässe Aufeinanderfolge der Erkenntnissstufen der letzte, an sich aber der wichtigste ist, besteht in dem Verhalten des erkennenden Subjects zur Erfahrung. Ein naiver Glaube an die unmittelbare Wirklichkeit der Erfahrung ist der Standpunkt der älteren Naturphilosophie. Mag auch aus speculativen Bedürfnissen, die mit einzelnen Erfahrungsimpulsen zusammentreffen, eine Substanz, die nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, als Grundlage der thatsächlichen Erfahrung postulirt werden, so geschieht dies doch nur, um Einheit und Zusammenhang in die vielgestaltige Wahrnehmung zu bringen, an deren objectiver Realität übrigens nicht gezweifelt wird. In dieser Beziehung stehen die Demokritische und die Aristotelische Physik völlig auf gleichem Boden. Wohl hat auch die Wissenschaft des Alterthums schon den Zweifel gekannt. Weist doch Protagoras so energisch, wie es kaum jemals wieder in späteren Zeiten geschah, auf die Subjectivität der sinnlichen Erfahrung hin. Aber dieser Zweifel ist hier das Erzeugniss einer rein erkenntnisstheoretischen Reflexion, und er bleibt darum für die positive Wissenschaft unfruchtbar, der er den Weg eher zu verlegen als zu ebnen sucht. Ganz anders verhält es sich mit demjenigen Zweifel, welcher die Triebfeder der neueren Naturforschung bildet. Hier ist man weit davon entfernt, an der Erkennbarkeit der Dinge überhaupt zu zweifeln; im Gegentheil, das Postulat dieser Erkennbarkeit bildet die Voraussetzung aller Naturwissenschaft. Aber mit ihr verbindet sich die Annahme, dass die unmittel-

bare Wahrnehmung erst der wissenschaftlichen Prüfung bedürfe, ehe bestimmt werden könne, was als das reale Substrat der Erscheinungen anzunehmen sei. Dieser kritische Zweifel ist es, der die neuere Naturforschung von ihren ersten Anfängen an beseelt und sie von Stufe zu Stufe auf ihrer Entwicklung begleitet hat. Seine Wirkung aber ist um so grösser gewesen, je weniger sich die Forscher, die unter seinem Antrieb handelten, desselben deutlich bewusst waren. Ein solches Bewusstsein würde nicht möglich gewesen sein ohne allgemeinere logische Reflexionen, und die letzteren schliessen immer die Gefahr jenes absoluten Zweifels in sich, welcher die Voraussetzung der physikalischen Wissenschaft, das Postulat der Begreiflichkeit der Welt, aufhebt.

Mit den logischen Principien, welche zur wissenschaftlichen Untersuchung erfordert werden, sind die Alten im allgemeinen hinreichend bekannt gewesen; aber es hat ihnen der kritische Zweifel gefehlt, der den Antrieb zu einer von richtigen Grundsätzen geleiteten Naturforschung in sich schliesst. Wie in diesem Punkte der entscheidende Unterschied der älteren und neueren Wissenschaft gelegen ist, das tritt deutlich hervor, wenn man die Behandlung irgend eines einzelnen Problems vergleicht. In der Untersuchung der Farben stützt sich Aristoteles so gut wie Newton auf die Voraussetzung, dass die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen auf einen einheitlichen Grund zurückgeführt werden müsse. Aber dem Aristoteles kommt kein Zweifel daran, dass Weiss, Schwarz und jede einzelne Farbe so, wie sie von uns empfunden werden, auch objectiv existiren; für ihn besteht daher die Aufgabe nur darin, die Gesammtheit der Lichterscheinungen unmittelbar einem einheitlichen Begriff unterzuordnen. Dieser ist ihm die »Thätigkeit des Durchsichtigen«, welche die Bedingung aller Licht- und Farbenerscheinungen sein soll; die Farben gelten ihm als unmittelbare Eigenschaften der Objecte, die aber erst durch das Licht, die Thätigkeit des Durchsichtigen, actuell werden. Die Wahrnehmbarkeit des Lichts und der Farben wird darauf zurückgeführt, dass das Durchsichtige sowohl innerhalb wie ausserhalb des Auges vorkomme*). In dieser Theorie ist offenbar der unmittelbare Inhalt der sinnlichen Wahrnehmung, dem ohne weiteres objective Realität zugeschrieben wird, einfach unter gewisse allgemeine Begriffe gebracht, die dem System conform sind. Newton ging aus von den Erscheinungen der Farbenzerstreuung. Da er entdeckt hatte, dass ein Sonnenstrahl durch das Prisma vollständig in divergirende Farbenstrahlen zerlegt wird, so begannen sich ihm Zweifel an der selbständigen Existenz des weissen Lichtes zu regen, und er wurde dadurch zu Untersuchungen veranlasst, deren Zweck zunächst in der Prüfung jenes Zweifels bestand, und die ihn schliesslich, hauptsächlich in Folge der gelungenen Wiedervereinigung der Farben zu Weiss, zu dem Ergebnisse führten, dass

---

*) De anima, cap. 5—7. Vgl. ausserdem die (unechte) Schrift: De coloribus.

das Sonnenlicht aus farbigen Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zusammengesetzt sei. Auch die hierauf von Newton gegründete Emanationstheorie hielt dem kritischen Zweifel nicht auf die Dauer Stand. Zunächst waren es die Bedenken über die weiteren Schicksale des angenommenen Lichtstoffs, welche hier als skeptische Elemente wirkten. Nachdem schon Huygens die Erscheinung der Doppelbrechung entdeckt und gezeigt hatte, dass sie sich nicht aus den Emanationsvorstellungen, wohl aber aus der Annahme einer Wellenbewegung herleiten lasse, neigte sich endlich in Folge von Fresnel's Untersuchung der Interferenzerscheinungen dieser Annahme der Sieg zu. In dem nun folgenden Kampfe zwischen beiden Hypothesen haben dann die von beiden Seiten beigebrachten kritischen Bedenken zur Vervollkommnung der endgültig siegenden Theorie beigetragen. Führte die Undulationstheorie Interferenz, Doppelbrechung und Polarisation als gewichtige Argumente gegen die Emanationslehre auf, so konnte sie dagegen nur langsam die Schwierigkeiten beseitigen, die sich ihrer Erklärung der Beugung und Farbenzerstreuung in den Weg stellten.

In vielen Fällen ist, wie in dem hier angeführten, der kritische Zweifel zuerst durch Beobachtungen und Experimente angeregt worden, und seine Verfolgung hat dann in wachsendem Masse den Impuls zu neuen Untersuchungen gegeben. In andern Fällen dagegen sind es speculative Voraussetzungen gewesen, die zuerst die Bestreitung gewisser naiver Vorstellungen veranlassten. Das hervorragendste Beispiel dieser Art ist die Copernikanische Hypothese. Das Ptolemäische Weltsystem war auf die Ueberzeugung von der unmittelbaren Realität der wahrgenommenen kosmischen Bewegungen gegründet, und es hatte den Zusammenhang dieser Bewegungen durch eine grosse Zahl sinnreich ausgedachter Hülfsannahmen hergestellt. Der Zweifel an der Wahrheit dieses Systems entsprang bei Copernikus lediglich aus dem Gedanken, dass es die wünschenswerthe Symmetrie und Regelmässigkeit vermissen lasse*). Erst der Kampf beider Systeme um die Herrschaft führte in der Beobachtung der Jupitersmonde und der Lichtgestalten der Venus durch Galilei zu entscheidenden Erfahrungen.

Das Copernikanische Weltsystem hat mehr als irgend eine andere Thatsache dem kritischen Zweifel vorgearbeitet. Waren einmal die sichtbaren Bewegungen der Sternenwelt als ein sinnlicher Schein nachgewiesen, so erschien jeder Zweifel an der Realität der unmittelbaren Wahrnehmung berechtigt. Bald waren es, wie in diesem Fall, speculative Gründe, bald zufällige Beobachtungen, welche den Zweifel anregten, bald hat derselbe von einem bestimmten Erfahrungsgebiet aus auf andere sich ausgebreitet. In letzterer Beziehung ist es bedeutungsvoll, dass die Entwicklung der neueren Physik durch die grossen geographischen und kosmologischen Entdeckungen vorbereitet wurde. Bei diesen wurde der menschliche Geist

*) Copernicus, De revolutionibus orbium coelestium, lib. I, cap. 1—10.

durch Thatsachen, die sich mit zwingender Gewalt der Wahrnehmung aufdrängten, genöthigt, eingewurzelte Vorstellungen zu berichtigen, und er trat nun von selbst auch den Erscheinungen seiner unmittelbaren Umgebung mit kritischen Bedenken gegenüber. Da diese aber willkürlichen Eingriffen leicht zugänglich sind, so war damit zugleich der Gedanke der experimentellen Untersuchung gegeben.

### d. Das Princip der Einfachheit.

Die Methode jener naturphilosophischen Behandlung der Erscheinungen, für die uns die Aristotelische Physik als typisches Beispiel galt, ist hinreichend gekennzeichnet durch die bereits angedeuteten Eigenschaften, dass sie aus dem Ganzen das Einzelne construirt, dass sie in die Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen durch einen festgefügten logischen Begriffsschematismus Ordnung zu bringen sucht, und dass die Begriffe, die diese Ordnung bewirken sollen, unbedenklich aus allen dem Denken zugänglichen Gebieten aufgenommen und in andere übertragen werden, dass insbesondere aber ethische Begriffe oder überhaupt solche, die der Sphäre menschlicher Willensthätigkeit entlehnt sind, in der Naturerklärung eine wichtige Rolle spielen. Dem gegenüber erscheint die gewöhnliche Angabe, dass die Naturforschung überall mit dem Einzelnen beginne, weder genügend noch in dieser Allgemeinheit überhaupt richtig. Denn oft genug muss ein allgemeiner Gedanke erst der einzelnen Forschung den Weg zeigen: so das Copernikanische System den Beobachtungen und Rechnungen Kepler's oder das Beharrungsprincip den mechanischen Versuchen Galilei's. Der Mythus, dass Baco von Verulam der grosse Gesetzgeber naturwissenschaftlicher Methodik gewesen sei, ist zwar allmählich im Verschwinden begriffen. Aber die durch diesen Mythus lebendig gewordene Vorstellung, dass die Induction das logische Instrument der Naturforschung sei, dem sie alle ihre Erfolge verdanke, ist noch vielfach geblieben. Dass Baco, wenn auch wenig vertraut mit der Naturwissenschaft seiner Zeit, doch von dem Geiste derselben mächtig erfasst ist, lässt sich freilich aus jeder Zeile seiner Schriften herauslesen. Aber ebenso offenkundig ist es, dass nicht die von der Naturforschung geübte Methode ihn mit sich fortreisst, sondern die von ihr herbeigeführte und durch sie geahnte Erweiterung des Horizonts der Erfahrung. Ihn erfüllt darum ganz der Gedanke, wie in der kürzesten Zeit eine möglichst grosse Zahl fruchtbringender Erfahrungen zu sammeln und zu ordnen sei. Ueber dem Eifer, mit dem er diesen Plan betreibt, versäumt er es, die von ihm aufgestellte Regel, dass man allgemeine Principien stets aus einzelnen Thatsachen ableiten müsse, auf das Object seiner eigenen Untersuchungen anzuwenden. Seine Methode der Induction ist nicht aus mustergültigen Beispielen physikalischer Forschung abstrahirt, sondern nur aus der allgemeinen Forderung hervorgeflossen, dass alles Wissen aus der Erfahrung stamme.

In Wahrheit ist das Verfahren der Naturforschung nicht im mindesten aus der Voraussetzung der Baconischen Regeln, dem Verzicht auf alle Speculation, die der Sammlung der Erfahrungen vorausgeht, hervorgegangen, sondern es stützt sich dasselbe auf einen Gedanken, der selbst speculativen Ursprungs ist. Dieser Gedanke, der von den übrigen hervorragenden Naturforschern der Zeit in einer mehr instinctiven Weise befolgt, von Galilei aber an verschiedenen Stellen ausdrücklich hervorgehoben wird, besteht in der Voraussetzung, dass alles Geschehen in der Natur einfachsten Regeln folge, und dass daher jede Untersuchung der Naturerscheinungen von möglichst einfachen Annahmen auszugehen habe. Dieses Princip der Einfachheit ist es, welches Copernikus zu seiner heliocentrischen Hypothese führt, welches Kepler veranlasst, die excentrischen Kreise und Epicykeln bei Seite zu legen, um zu prüfen, ob die Annahme einer einfachen Curve den Forderungen der Beobachtung genüge, und welches bei Galilei die doppelte Bedeutung eines Naturgesetzes und eines methodologischen Postulates annimmt. Dem Naturgesetz giebt er mehrere Formen, die alle den nämlichen Gedanken in verschiedener Weise teleologisch ausdrücken. Dass die Natur die Dinge nicht ohne Noth vervielfältige, dass sie sich der leichtesten und einfachsten Mittel bediene, und dass sie nichts vergeblich thue: diese Sätze gelten ihm als Axiome*). Ihnen parallel geht aber der von ihm überall befolgte methodologische Grundsatz, der ihm offenbar als die logische Kehrseite derselben erschienen ist: dass man die Naturerscheinungen so viel als möglich unter den einfachsten Bedingungen untersuchen und ihrer Erklärung die einfachsten Annahmen zu Grunde legen müsse**). Jene teleologisch geformten metaphysischen Axiome können selbstverständlich kritischen Einwürfen ebenso wenig Stand halten wie die Grundbegriffe der Aristotelischen Naturphilosophie. Dennoch wird kein Einsichtiger bezweifeln, dass der ihnen entsprechende methodische Grundsatz für die exacte Wissenschaft fruchtbringender geworden ist als alle Regeln Baco's zusammengenommen.

Der Grundgedanke dieses Princips ist aber älter als das Zeitalter Galilei's. Auch er reicht in die antike Atomistik zurück. Indem diese alle Veränderungen in der Natur auf die einfachste und anschaulichste Form des Geschehens zurückzuführen suchte, schwebte ihr unausgesprochen bereits das Princip der Einfachheit vor. Mit Hülfe desselben vermeidet sie jene Vermengung ethischer Motive mit dem natürlichen Geschehen, welche der gleichzeitigen Elementenlehre des Empedokles ihre Richtung giebt. Der Stoss ist die einfachste Form einer verursachten Veränderung; darum wird er der Atomistik zum Urbild aller Causalität. Dieses Motiv der Einfachheit ist es, welches neben der Anschaulichkeit den atomistischen Vorstellungen ihren ungeheuren Einfluss in den kommenden Zeiten gesichert

*) Dialoghi dei massimi sistemi, III. Opp. Tom. I, p. 429.

**) Dial. delle nuove scienze, III. Opp. Tom. XIII, p. 154.

hat, obgleich sie in der nächsten Zukunft der überwältigenden Macht teleologischer Naturanschauungen unterliegen mussten. Auch besass hier das Princip der Einfachheit noch einen ausschliesslich metaphysischen Charakter; es hatte sich noch nicht zu einer methodischen Regel gestaltet. Daraus entsprang die Unzulänglichkeit und Einseitigkeit dieser mechanischen Naturphilosophie. Der Demokritischen Atomistik liegt der Gedanke des Experimentes und der exacten Beobachtung ebenso fern wie der Aristotelischen Physik. Nur dadurch, dass Galilei den Grundsatz der Einfachheit zum Leitstern seiner Methode wählte, wurde er aber vor den Gefahren bewahrt, zu denen auch ihn die metaphysisch-teleologischen Formulirungen des nämlichen Princips leicht hätten verführen können. Denn nun galt ihm die Einfachheit nicht mehr an und für sich als Kriterium der Wahrheit, sondern sie blieb ihm lediglich ein Postulat, nach welchem die der Untersuchung vorausgehenden Hypothesen sich richten müssten. Damit diese Hypothesen Anspruch auf Wahrheit erheben konnten, wurde aber weiterhin ihre Bestätigung durch die Erfahrung gefordert. So vollzog sich die der antiken Naturphilosophie noch fern liegende logische Unterscheidung von Hypothesen und Thatsachen, eine Unterscheidung, welche das in der Naturwissenschaft herrschende methodische Verfahren vorzugsweise kennzeichnet.

Schon die oberflächliche Betrachtung irgend eines Gebietes von Naturerscheinungen erweckt in uns Vorstellungen über die wechselseitige Beziehung der einzelnen in der Erfahrung gegebenen Objecte und Vorgänge. Diese unüberwindliche Neigung des Geistes zur Interpretation der Erscheinungen, die der wissenschaftlichen Untersuchung vorausgeht, und in der die ursprüngliche Naturphilosophie ihre Quelle hat, wird von der exacten Forschung nicht, wie es die Baconische Vorschrift verlangt, lediglich als eine unerlaubte Uebereilung angesehen, sondern ihr Streben geht dahin, diese unvermeidliche »anticipatio mentis« in eine der Prüfung durch die Erfahrung zugängliche Voraussetzung umzuwandeln. Demgemäss sucht man eine vorläufige Hypothese über den zu erwartenden Zusammenhang der Erscheinungen zu bilden, bei welcher sich das Princip der Einfachheit namentlich in der Weise bethätigt, dass alle Annahmen theils den zu erklärenden Thatsachen selbst, theils solchen Erfahrungen, die ihnen gleichartig sind, entnommen werden. Hierdurch erfährt jenes Princip seine angemessene Anwendung und seine nothwendige Einschränkung. Denn die wesentliche Bedeutung desselben besteht nun darin, dass es erstens alle den beobachteten Erscheinungen fremdartigen Gesichtspunkte fern hält, und dass es zweitens einen regelmässigen Fortschritt der Untersuchung von den einfacheren zu den verwickelteren Thatsachen verlangt. Zugleich hat aber nicht mehr die Einfachheit als solche, sondern nur die Uebereinstimmung mit der Erfahrung den Werth eines Kriteriums der Wahrheit. Das Princip der Einfachheit hat auf diese Weise vollständig die Bedeutung eines metaphysischen Axioms verloren und diejenige einer methodischen

und heuristischen Regel behalten. Bei der Untersuchung eines bestimmten Gebiets von Erfahrungen geht der Naturforscher von der einfachsten Erscheinung dieses Gebietes aus, die ihm zugänglich ist. Er legt der Ableitung derselben eine einfache, d. h. lediglich eine den Thatsachen selbst und den ihnen ähnlichen entnommene Hypothese zu Grunde. Die Zulässigkeit dieser Hypothese wird dann durch Beobachtung oder Experiment geprüft, um sie, wenn sich ein Widerspruch zeigt, angemessen zu verändern oder durch eine andere Annahme zu ersetzen. Ist auf solche Weise für eine Anzahl einfacherer Thatsachen eine Erklärung gewonnen, so sucht man verwickeltere Erscheinungen des nämlichen Gebietes zunächst auf jene einfacheren zurückzuführen und, wo dies nicht vollständig gelingt, weitere ergänzende Hypothesen zu erfinden, die wiederum die Probe der Prüfung an der Erfahrung bestehen müssen.

In diesen Anwendungen aber bewährt es sich, dass sich das Princip der Einfachheit mit dem der Anschaulichkeit verbindet, um einer Classe von Naturerscheinungen den Vorzug zu verschaffen vor allen andern, den Bewegungserscheinungen. Sie sind einfach und anschaulich zugleich, und sie sind es, die einerseits durch ihren relativ leicht übersehbaren Zusammenhang das Causalbedürfniss des Denkens vorzugsweise befriedigen, und die anderseits, wo es gelingt, ihnen die concrete Erfahrung unterzuordnen, durch die glückliche Verbindung von Hypothesen und Thatsachen dem kritischen Zweifel ein Ziel setzen. So weisen die heuristischen Postulate der Naturerkenntniss auf die Principien der Mechanik als diejenigen Grundsätze hin, die für den ganzen Umfang der Naturforschung Allgemeingültigkeit besitzen.

## 3. Die Principien der Mechanik.

### a. Die Entwicklung der mechanischen Grundbegriffe.

Die wissenschaftliche Mechanik hat mit einzelnen Erkenntnissen begonnen, die sich auf die Erscheinungen der Bewegung unter den relativ einfachsten Bedingungen bezogen. Solche einfachste Bedingungen des mechanischen Geschehens sind aber dann gegeben, wenn an einem Körper verschiedene bewegende Wirkungen mit einander im Gleichgewicht stehen. Denn in diesem Falle kommen, da eine wirkliche Bewegung nicht eintritt, Zeit und Geschwindigkeit, die sonst unerlässlichen Bestandtheile der Bewegungsvorstellung, nicht unmittelbar in Betracht, sondern es genügt die Kenntniss der geometrischen Eigenschaften der Körper, sowie der Grösse und Richtung der an ihnen angreifenden Kräfte, um die Bedingungen des Gleichgewichts aufzufinden. In den Anfängen der statischen Untersuchung, wie sie das Alterthum aufzuweisen hat, wird aber das Problem noch nicht einmal in dieser Allgemeinheit aufgestellt, sondern man begnügt sich mit der Berücksichtigung einer Kraftform, die so zu sagen als selbstverständ-

liche Eigenschaft aller Körper zu den rein geometrischen Eigenschaften derselben hinzugedacht wird, der Schwerkraft. Auf diese Weise wird die Statik in den Händen des Archimedes vollständig zu einem Zweig der Geometrie. Der feste Körper wird als ein abgegrenzter Theil des Raumes aufgefasst, dessen einzelne Punkte, der bei geometrischen Untersuchungen angenommenen Unveränderlichkeit der Raumgebilde entsprechend, in vollkommen starrem Zusammenhange stehen. Es tritt nur zu den bei der gewöhnlichen Geometrie gültigen Voraussetzungen die weitere hinzu, dass das betreffende Raumgebilde Gewicht besitzt. Das Problem der Bestimmung des Schwerpunkts wird auf diese Weise zu einer rein geometrischen Aufgabe, und selbst das Hebelgesetz, obgleich es durch die Einführung von Gewichten, welche in verschiedenen Abständen an der Hebelstange wirken, zur Unterscheidung äusserer Kräfte nöthigt, die nicht einfach den sonstigen geometrischen Eigenschaften der Körper hinzugefügt werden können, wird dennoch durch einen eigenthümlichen Kunstgriff von Archimedes auf das Feld geometrischer Betrachtungen zurückgeführt, indem er dasselbe aus dem als Axiom angenommenen Satze ableitet, dass gleich grosse Gewichte in gleicher Entfernung vom Unterstützungspunkt mit einander im Gleichgewicht stehen. Da das nämliche Axiom auch der Bestimmung des Schwerpunktes zu Grunde liegt, so besteht die Bedeutung dieser Ableitung wesentlich darin, dass sie es gestattet, nun den Hebel sammt den an ihm wirkenden äusseren Kräften wiederum als ein geometrisch gleichförmiges Gebilde zu betrachten, an welchem auch die Gewichte gleichförmig vertheilt sind.

Suchen wir uns, insoweit hier überhaupt von einer Reconstruction die Rede sein kann, über den Weg Rechenschaft zu geben, auf welchem Archimedes zu seinen statischen Erkenntnissen geführt wurde, so wird zunächst nicht in Abrede zu stellen sein, dass gewisse experimentelle Ermittelungen über Gewicht und Gleichgewicht der Körper vorangingen. Nachdem durch die unmittelbare Wahrnehmung das Gewicht als ein vertical abwärts gerichteter Druck erfasst war, konnten weitere zufällige Beobachtungen leicht zu dem Satze führen, dass es für jeden Körper einen Punkt giebt, dessen Unterstützung Gleichgewicht herbeiführt. Hier war nun aber auch sofort nahe gelegt, die genauere Lösung des Problems des Schwerpunktes auf geometrischem Wege zu versuchen. Daran schloss sich dann die Ableitung des Hebelgesetzes, das in Folge der leichten experimentellen Bestätigung, die es zuliess, dieses ganze Gebiet geometrisch-statischer Untersuchungen zum Abschluss brachte. Im ganzen können wir somit hier drei Stadien der Untersuchung unterscheiden: 1) das Stadium inductiver Vorbereitung, in welchem die Beobachtung im wesentlichen einen qualitativen Charakter besitzt oder höchstens zu approximativen quantitativen Schätzungen sich erhebt; 2) das Stadium speculativer Bearbeitung der Probleme, in welchem auf Grund der vorangegangenen Beobachtung allgemeine Voraussetzungen gebildet und aus diesen Sätze von quantitativem Charakter

abgeleitet werden; 3) das Stadium experimenteller Prüfung, in welchem sich der Nachweis vollzieht, dass die Erscheinungen ihren quantitativen Verhältnissen nach mit den gemachten Voraussetzungen übereinstimmen. Diese Entwicklungsfolge kommt, wie wir sehen werden, in allen Zweigen der Naturlehre zur Geltung. Aber schon die antike Mechanik ist gegenüber andern Gebieten der Naturwissenschaft dadurch ausgezeichnet, dass das erste und sogar das dritte jener Entwicklungsstadien im Verhältniss zu dem zweiten vernachlässigt werden. In Folge dessen tritt die Mechanik in nahe Verwandtschaft mit der reinen Mathematik. Die inductive Vorbereitung beschränkt sich dort wie hier auf eine geringe Zahl objectiver Wahrnehmungen, und die experimentelle Bestätigung erscheint als ein nahezu überflüssiges Geschäft, da die betreffenden Sätze durch ihre innere Evidenz schon sich Beistimmung zu erzwingen scheinen. Ausserdem wird dieser speculative und mathematische Charakter der Entwicklungen noch dadurch verstärkt, dass die Voraussetzungen, welche man der Ableitung der Sätze zu Grunde legt, von den in der Erfahrung gegebenen Bedingungen der Erscheinungen in einem ähnlichen Sinne abweichen wie die geometrischen Begriffe von den wirklichen Körpern im Raume. So ist insbesondere in der Archimedischen Statik die Annahme einer absolut homogenen und starren Beschaffenheit der Körper lediglich geometrischen Ursprungs, und eben dadurch wird diese Statik gewissermassen zu einer Geometrie intensiver Raumgrössen, indem jedem Raumtheilchen ausser seinem extensiven auch noch ein intensiver Werth in Gestalt eines bestimmten Gewichtes zugeschrieben wird*).

Indem die antike Statik die Vorstellung des Gewichtes in der Form, in welcher sie dieselbe in der verbreiteten Anschauung vom Körper antrifft, unmittelbar mit den geometrischen Begriffen verbindet, gelangen in ihr die specifisch mechanischen Begriffe noch nicht zur Ausbildung, und sie wird nicht einmal diese Lücke gewahr, weil sie durch ihre Beschränkung auf die Erscheinungen des Gleichgewichts an den wirklichen Bewegungsproblemen vorübergeht. So werthvoll daher auch die Anregungen waren, welche aus der Archimedischen Periode auf die Anfänge der neueren Wissenschaft übergingen, so gewinnt doch erst in diesen, insbesondere in den dynamischen Forschungen Galilei's, die Mechanik ihre Selbständigkeit**). Bedeutungsvoll ist in dieser Beziehung die Rolle, welche in

---

*) Von den hydrostatischen Entdeckungen des Archimedes sehen wir hier ab, da über die Art, wie er zu denselben gelangte, zu wenig bekannt ist. Vgl. hierüber M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 267, 280.

**) Die an sich höchst bemerkenswerthen Arbeiten des Simon Stevinus, des Zeitgenossen Galilei's, müssen hier ausser Rücksicht bleiben, weil sie, durch ihre rein statische Richtung der antiken Betrachtungsweise verwandt, gerade von denjenigen Grundgedanken sich fernhalten, aus denen die neuere

Galilei's Untersuchungen den Reflexionen über den Kraftbegriff zukommt. Um diesem Begriff seine allgemeine Geltung zu sichern, musste er von der speciellen Vorstellung des Gewichtes losgelöst werden. Dies konnte nicht wirkungsvoller geschehen, als indem Galilei an eine davon völlig verschiedene Kraftform seine Speculationen anknüpfte, und wieder konnte er hier keine glücklichere Wahl treffen, als indem er die menschliche und thierische Muskelkraft zum Urbilde der Kraft überhaupt nahm*). Denn so nothwendig es für die Vollendung der wissenschaftlichen Begriffe ist, von allen anthropomorphischen Vorstellungen abzusehen, so wünschenswerth muss es für die erstmalige klare Aufstellung eines Begriffes sein, dass man sich die psychologischen Bedingungen vergegenwärtige, welche zunächst zur Bildung desselben geführt haben. Der Begriff des Gewichtes schliesst Kraft und Masse als seine Bestandtheile ein. Eine Trennung dieser Elemente konnte erst eintreten, wenn man sich solche Formen der Kraftwirkung vergegenwärtigte, bei denen sie deutlich auch für die Vorstellung von einander geschieden sind. Dies ist aber vor allem in den Fällen verwirklicht, wo die menschliche oder thierische Muskelkraft eine äussere Last in Bewegung setzt. Die verschiedenen Ausdrücke, deren sich Galilei zur Bezeichnung der Kraft bedient, impetus, momentum, weisen daher auf die Vorstellung hin, dass die Kraft von aussen die Masse ergreife, um ihr entweder durch einen augenblicklichen Anstoss (impetus) oder durch einen gleichförmig andauernden Antrieb (momentum) eine Bewegung mitzutheilen**). Diese Vorstellung führt zu zwei Voraussetzungen, welche für die moderne Mechanik grundlegend geworden sind. Die erste besteht in der Annahme, dass die Masse des Körpers passiv der sie ergreifenden Kraft gegenübersteht, die zweite in der Zurückführung der dauernden Kraftwirkung auf eine stetige Folge momentaner Impulse, deren Effecte sich summiren. Beide Voraussetzungen finden ihren Ausdruck in dem von Galilei aufgestellten Beharrungsprincip, welchem später der nicht ganz passende Name des Trägheitsgesetzes verliehen worden ist. Nach dem Beharrungsprincip erzeugt der momentane Anstoss eine an sich ins unbegrenzte dauernde Bewegung von gleichförmiger Geschwindigkeit, und der dauernde Antrieb einer Kraft lässt sich auf eine Anhäufung elementarer Anstösse zurückführen, welche in gleichen Zeiten gleich grosse Zuwüchse an Geschwindigkeit hervorbringen müssen***). Dem ersten Theil dieses Satzes liegt sichtlich die Vorstellung der durch eine einmalige Stoss- oder Wurfbewegung angetriebenen Masse zu Grunde. Aber es bedurfte einer emi-

---

Mechanik hervorgegangen ist. Vgl. über dieselben E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, S. 60 f.

*) Dialogh. delle nuove scienze, giorn. III, lib. II. Opere di Galileo Galilei. Firenze 1855. T. XIII, p. 154. Vgl. auch Dühring, a. a. O. S. 24 f.

**) A. a. O. T. XIII, p. 173, 330. T. X, p. 90.

***) Dialogh. giorn. III, lib. II, p. 163.

nenten Abstractionskraft, um die in der Beobachtung niemals gegebene Vorstellung einer ins unendliche fortdauernden gleichförmigen Geschwindigkeit als den an sich nothwendigen Effect des Stosses hinzustellen, und die in der Wirklichkeit stets vorhandenen Verzögerungen der Geschwindigkeit auf die wechselnden Widerstände zurückzuführen. Gerade diese Abstraction zeigt, wie unscheinbar in solchen Fällen der Antheil der Beobachtung an dem endgültig durch Speculation gefundenen Princip sein kann. Reducirt sich doch bei dem Trägheitsgesetz die Beobachtung ganz und gar auf die Thatsache, dass der gestossene Körper überhaupt noch sich weiter bewegt, nachdem der Stoss aufgehört hat. Auch hätte darin allein nie ein zureichendes Motiv gelegen, die eingewurzelte Vorstellung zu verlassen, dass die Bewegung allmählich von selbst erlösche. Sichtlich war es vielmehr ein anderes Element der an die menschliche Kraftäusserung sich anlehnenden Bewegungsvorstellung, nämlich die oben schon betonte Trennung von bewegender Kraft und bewegter Masse, welches hier der Speculation ihre Richtung gab. Wenn die Kraft nicht eine innere Eigenschaft des Körpers selbst ist, sondern nur als ein äusserer Anstoss an ihn herantritt, so ist nicht abzusehen, wie an der einmal hervorgerufenen Bewegung Aenderungen entstehen sollen, wenn sie nicht abermals durch äussere Kräfte veranlasst werden. So ist es wesentlich die Anschauung von dem passiven Verhalten des Körpers, aus welcher die Conception des Beharrungsgesetzes hervorgeht, und mit Rücksicht hierauf hat der Name der Trägheit allenfalls seine Berechtigung, ebenso wie aus diesem Motiv ohne weiteres die spätere Vereinigung des Axioms, dass ein ruhender Körper einer äusseren Kraft bedarf, wenn er in Bewegung gerathen soll, mit dem Galilei'schen Beharrungsprincip, welches sich nur auf die Bewegung bezieht, erklärlich wird.

Sobald der erste Theil des Beharrungsprincips, das Axiom von der gleichförmigen Geschwindigkeit bei momentanem Impuls, vollkommen klar erfasst war, so ergab sich nun der zweite Theil, der Satz von der gleichförmigen Beschleunigung eines durch eine dauernde Kraft bewegten Körpers, als eine nothwendige Consequenz der zu Grunde liegenden Vorstellung. Verhält sich der Körper passiv gegen die auf ihn einwirkenden Anstösse, so muss ein neuer Impuls einfach seine Wirkung der schon vorhandenen Bewegung hinzufügen, und eine dauernde Kraft wird in eine Summe stetig auf einander folgender augenblicklicher Impulse aufgelöst werden können. Hier nun aber griff offenbar die Beobachtung der beschleunigten Bewegung beim Fall der Körper nicht bloss bestätigend in den Verlauf der Speculation ein, sondern sie war wohl schon bei der inductiven Vorbereitung derselben betheiligt. Der wenigstens qualitativ leicht zu gewinnende Nachweis, dass die alte Annahme einer Proportionalität zwischen Fallzeit und Fallraum ein Irrthum sei, hat bekanntermassen dem Gedanken Galilei's frühe schon die Richtung gegeben. Aber zu der speculativen Entwicklung des Beharrungsgesetzes konnte dieser Gedanke doch

nur führen, nachdem mittelst anderer Formen der Kräftewirkung die Unterscheidung von Kraft und Masse einmal vollzogen war, so dass es nun nahe lag, dieselbe auch auf die Bewegung der Körper beim Fall zu übertragen.

Das Beharrungsgesetz ist das einzige Princip der Mechanik, welches von Galilei als Axiom aufgestellt wurde. Aber gerade darin zeigt sich die ausserordentliche Fruchtbarkeit dieses Princips, dass es seinem Urheber gelingt, an der Hand desselben eine Menge von Sätzen abzuleiten, für die eine spätere Zeit noch weitere Voraussetzungen erforderlich hielt. Dies ist freilich nur dadurch möglich, dass bei ihm das Beharrungsgesetz eine allgemeinere Bedeutung besitzt, als sie späterhin dem Trägheitsprincip zugestanden wurde, wie sie aber allerdings durch die speculative Begründung, die Galilei seinem Gesetz gegeben, unmittelbar nahe gelegt ist. Insbesondere sind es zwei Principien, die bei Galilei als selbstverständliche Folgen des Trägheitsgesetzes erscheinen: das Princip der Zusammensetzung der Kräftewirkungen, und das Princip der Zurückführung des Gleichgewichts der Kräfte auf die Gleichheit ihrer virtuellen Momente. Von dem ersteren Princip macht Galilei bei der Ableitung der Wurfbewegungen Gebrauch. Dass die Bahn eines horizontal fortgeworfenen Körpers einfach durch die Verbindung der durch den Wurf hervorgebrachten gleichförmigen Geschwindigkeit in horizontaler Richtung mit der durch das Gewicht hervorgebrachten gleichförmig beschleunigten Geschwindigkeit in verticaler Richtung gewonnen wird, erscheint bei ihm als eine unmittelbare Folge des passiven Verhaltens der Körper gegenüber den auf sie einwirkenden Kräften, ohne dass er sich veranlasst findet, hier ein besonderes Princip der Zusammensetzung herbeizuziehen, wie ein solches späterhin in dem Satz vom Kräfteparallelogramm entwickelt worden ist*). Aehnlich verhält es sich mit der Zurückführung des Gleichgewichts auf mögliche Geschwindigkeiten. Da Galilei von dynamischen Untersuchungen ausgegangen war, so war die Reduction der Statik auf Dynamik für ihn ein fast unvermeidlicher Schritt. Gerade die Anwendung der dynamischen Gesichtspunkte auf statische Probleme musste aber zu einer Vertiefung des Kraftbegriffs selbst führen, als dessen wesentlicher Inhalt nun erst in vollkommen klarer Weise die durch eine bestimmte Ursache hervorgebrachte momentane Beschleunigung einer Masse sich darstellte, so dass als allgemeines Mass der Kraft das Product der Masse in ihre momentane Beschleunigung dienen konnte. Das statische Verhalten ergab sich nun als derjenige Specialfall, wo die einzelnen momentanen Geschwindigkeiten, welche durch verschiedene Ursachen an gegebenen Massen entstehen, in Folge der vorhandenen Verbindungen der letzteren gegenseitig sich aufheben. Aber auch dieses Princip tritt bei Galilei, der es auf den Hebel und den Flaschenzug anwendet, weder als ein selbständiges Axiom auf, noch als ein Satz, der

*) Dialogh. giorn. IV. A. a. O. p. 221 f.

aus andern abzuleiten wäre, sondern es scheint ihm als eine nothwendige Folge des Kraftbegriffs selbst zu gelten*).

So fruchtbar nun auch auf diese Weise das Beharrungsgesetz geworden ist, indem es theils direct, theils durch die logische Ausbildung der Kraftbegriffs, zu der es den Anlass bot, eine Reihe anderer Principien zur Entwicklung brachte, die für die neuere Mechanik von grundlegender Bedeutung sind, so wird man doch nicht verkennen dürfen, dass in diese Principien weitere Voraussetzungen eingehen, die, so sehr sie durch gewisse einfache Beobachtungen nahegelegt sein mögen, doch keineswegs in dem Beharrungsprincip oder in dem aus ihm abgeleiteten fundamentalen Kraftbegriff schon enthalten waren. Es wurde daher insbesondere durch die Entwicklung, welche die Mechanik in den auf Galilei folgenden Zeiten genommen, das Bedürfniss nach einer vollständigen Darlegung der grundlegenden axiomatischen Voraussetzungen dieser Wissenschaft immer unabweisbarer. Denn in dem Masse, als sich die mechanischen Probleme, die man behandelte, verwickelter gestalteten, musste die Strenge der Beweisführung und damit zugleich die bestimmte Sonderung der principiellen Voraussetzungen von den gefolgerten Sätzen zunehmen. Eine freie Discussion, wie sie Galilei in seinen »Discorsi« übte, lässt eine solche Sonderung kaum aufkommen; die Euklidische Demonstrationsweise dagegen, deren sich ein Huygens und Newton mit Meisterschaft bedienten, hat dieselbe zur Vorbedingung. Dennoch trennen sich innerhalb dieser mit den Hülfsmitteln der synthetischen Demonstration die Mechanik behandelnden Richtung deutlich wieder zwei Entwicklungen von einander, deren charakteristische Unterschiede hauptsächlich in der Verschiedenheit der Probleme, mit denen man sich beschäftigt, ihre Quelle haben. Auf der einen Seite waren es die Combinationen frei wirkender Kräfte, die sich der Untersuchung darboten. Wie hier Galilei selbst schon aus Anlass der Fall- und Wurfbewegungen zu der Conception des fundamentalsten Axioms der Mechanik, des Beharrungsgesetzes, gelangt war, so musste die Weiterführung solcher Untersuchungen wegen der relativen Einfachheit und Gleichartigkeit der Bedingungen, welche bei frei wirkenden Kräften stattfinden, vorzugsweise leicht zur Aussonderung einfachster Voraussetzungen von axiomatischem Charakter führen. In der That ist es Newton, der, indem er Galilei's Gesetze der Bewegung schwerer Körper auf das Weltsystem ausdehnt, zugleich als der Erste die Axiome zu formuliren sucht, die dem System der Mechanik zu Grunde liegen. Auf der andern Seite dagegen handelte es sich bei derjenigen Weiterbildung der Mechanik, welche durch technische Zwecke, durch die Anwendung der Bewegungsgesetze auf einfache Maschinen gefordert war, im allgemeinen um die Combination gegebener Kräfte mit bestimmten statischen Bedingungen, welche durch die gegenseitige Verbindung der Theile der Maschine vorgeschrieben werden. Der

*) Della scienza meccanica. Opere T. XIII, p. 91 f.

Hebel und die schiefe Ebene sind die einfachsten Fälle dieser Art, welche zugleich insofern einen typischen Charakter besitzen, als bei allen diesen statischen Combinationen die Wirkungen der äusseren Kräfte entweder, wie beim Hebel, durch den Zusammenhang des Körpers selbst, an welchem sie angreifen, oder aber, wie bei der schiefen Ebene, durch äussere Hemmungen, welche die Bewegungen des Körpers bestimmen, beschränkt sind. Wie der Hebel und die schiefe Ebene die einfachsten, so wurden bald das physische Pendel und die Brachystochrone (die Bahn des schnellsten Falls) die für die Ausbildung der Mechanik wichtigsten Beispiele aus diesen beiden einander ergänzenden Classen von Problemen. Die verhältnissmässig verwickelte Beschaffenheit der letzteren, sowie die Complication verschiedenartiger, theils dynamischer, theils statischer Bedingungen bewirkte nun aber hier, dass an Stelle einfacher Axiome zunächst gewisse Principien von zusammengesetzterer Art zur Entwicklung gelangten, welche sich für die Lösung bestimmter technischer Aufgaben unmittelbar fruchtbar erwiesen. So kam es, dass in der Mechanik überhaupt vorzugsweise solche Sätze den Namen von Principien erhielten, welche durchaus nicht den Charakter ursprünglicher Voraussetzungen, sondern den von Lehrsätzen besitzen, die des Beweises bedürfen.

### b. Die Formulirung der mechanischen Axiome durch Newton.

An den Anfang seiner »mathematischen Principien der Naturphilosophie« hat Newton ausser den grundlegenden Definitionen, deren seine Mechanik bedurfte, drei axiomatische Gesetze der Bewegung gestellt, welche er, gleich jenen Definitionen, als die allgemeinsten Abstractionen aus der Erfahrung zu betrachten scheint, da er zur näheren Erläuterung lediglich auf geläufige Erscheinungen hinweist, in denen sie sich bewähren. Diese drei Axiome Newton's bestehen in dem Trägheitsgesetz, in dem Satz, dass die Aenderung der Bewegung der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional ist und nach der Richtung der geraden Linie erfolgt, nach welcher die Kraft wirkt, und endlich in dem Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Merkwürdiger Weise ist unter diesen Sätzen der erste, das Trägheitsgesetz, am wenigsten glücklich formulirt. Nicht nur tritt es hier zum ersten Mal in jener seitdem gangbar gewordenen Doppelgestalt auf, in welcher es Bewegung und Ruhe gleichzeitig umfassen soll, sondern es wird auch auf eine innere Eigenschaft der Körper bezogen, welche als vis inertiae den äusseren Kräften analog gedacht ist, und es kommt daher der nämliche Satz in einer doppelten Form vor, zuerst unter den Definitionen der Materie, und dann noch einmal als oberstes Bewegungsaxiom. Gerade diese doppelte Aufstellung beweist aber, dass auch Newton das Streben nach einer speculativen Begründung jenes Fundamentalgesetzes nicht überwinden konnte. Denn für die empirische Auffassung liegt kein Anlass vor, ein Gesetz, das sich in aller Erfahrung

bewährt, und das aus keinem andern Erfahrungsgesetz abgeleitet werden kann, aus irgend einer qualitas occulta in den Dingen selbst zu erklären. Eine solche qualitas occulta ist aber die Trägheit, wenn sie als eine Eigenschaft oder gar als eine Kraft der Körper gedacht wird. Das Beharrungsgesetz ist ja ein Axiom, welches für die Wirkungen äusserer Kräfte auf die Körper gültig ist; es ist also in die allgemeine Definition der Kraft aufzunehmen und darf nicht auf eine specifische innere Kraft zurückgeführt werden, welche zu den äusseren Kräften erst hinzukomme. Eine solche Betrachtung schliesst eigentlich die Annahme in sich, dass die äusseren Kräfte für sich genommen dem Beharrungsgesetz nicht folgen. In der That zeigen spätere Ausführungen über die vis inertiae, die direct an die Newton'sche Definition sich anschliessen, deutlich genug, dass im Hintergrunde dieser Auffassung der alte scholastische Satz steht: »cessante causa cessat effectus«, und dass man in der Zurückführung des Beharrungsgesetzes auf eine in den Körpern permanent anwesende Kraft eine Art von speculativer Begründung desselben gefunden zu haben glaubt*).

Das zweite Gesetz Newton's schliesst streng genommen zwei Axiome oder ein Postulat und ein Axiom in sich: das Postulat, dass die Aenderung der Bewegung der bewegenden Kraft proportional sei, und das Axiom, dass sie in der Richtung der geraden Linie erfolge, in welcher die Kraft wirkt. Das ganze Gesetz, das schon Galilei überall angewandt, aber nirgends formulirt hatte, erscheint als eine Anwendung der vorangegangenen Definition der Kraft, wonach diese das auf einen Körper ausgeübte Bestreben ist, seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung zu ändern. Als ein neues Princip, das nur in den Arbeiten von Huygens bereits gelegentlich seine stillschweigende Anwendung gefunden hatte, tritt endlich das Gesetz von der Gleichheit der Action und Reaction auf, welchem allein keine grundlegende Definition gegenübersteht.

Bei der Beurtheilung dieses ersten Versuchs eines synthetischen Systems der Mechanik darf man die Kunst, mit welcher aus den Principien der Bewegung die Gesetze des Weltsystems entwickelt werden, nicht mit dem logischen Werth jener Principien selbst vermengen. In ersterer Beziehung ist Newton's Gravitationsmechanik noch heute für uns das bewundernswertheste Beispiel einer strengen Deduction einzelner Erfahrungsgesetze aus ihren allgemeinen Voraussetzungen. In der zweiten Beziehung dagegen werden wir bei Newton's Formulirung der Bewegungsgesetze, abgesehen von dem zwiespältigen Charakter des Trägheitsprincips, von der

*) Vgl. Chr. Wolff's Ontologia, §. 321, sowie Euler's Mechanik, Ausgabe von Wolfers, Bd. I, S. 5, 21 f. Euler giebt im ganzen der Bezeichnung „Eigenschaft" für die Trägheit den Vorzug. Bemerkenswerth ist ausserdem, dass er durch einen leicht zu enthüllenden Cirkelbeweis das Trägheitsprincip in Bezug auf Bewegung aus demjenigen für die Ruhe glaubt ableiten zu können.

Verbindung zweier Axiome in dem zweiten Gesetz und von der wechselnden Beziehung zu den vorangegangenen Definitionen, vor allem die Vollständigkeit vermissen. In der That wiederholt sich hier in beschränkterem Masse der nämliche Vorgang, der uns schon bei Galilei begegnet ist. Wie dieser alle Erscheinungen auf sein Beharrungsgesetz zurückführt, dabei aber in Wirklichkeit eine Reihe weiterer Voraussetzungen stillschweigend hinzunimmt, so wird bei Newton ein wichtiger Satz scheinbar aus dem zweiten Bewegungsgesetz abgeleitet, in Wahrheit aber in den zu diesem Behuf geführten Beweis als eine petitio principii eingeführt: es ist dies der Satz von der Zusammensetzung der Bewegungen oder, wie er in seiner gewöhnlich gewählten speciellen Form genannt wird, der Satz vom Kräfteparallelogramm. Er tritt als Corollarsatz zu den drei Bewegungsgesetzen auf, und das in ihm zur Aeusserung kommende Princip, dass die zweite Kraft nichts an der Geschwindigkeit ändert, welche die erste für sich allein hervorbringen würde, ist in der hinzugefügten Erläuterung als eine unmittelbare Folgerung aus dem zweiten Bewegungsgesetz bezeichnet*). Aber es ist nicht abzusehen, wie aus einem Gesetz, das die Wirkungsweise einer einzigen Kraft bestimmt, irgend etwas über die Verbindung der Kräfte gefolgert werden kann; vielmehr macht offenbar diese letztere eine neue axiomatische Voraussetzung erforderlich. Ausserdem ist in den aufgestellten Bewegungsgesetzen die der ganzen neueren Mechanik zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die Kraft stets räumlich getrennt sei von der Masse, auf welche sie wirkt, nicht zum Ausdruck gekommen. Für Galilei lag diese Trennung in der Vorstellung von der menschlichen Muskelkraft, von welcher er bei seiner Conception des Kraftbegriffs ausgegangen war, als ein selbstverständlicher Bestandtheil eingeschlossen. In dem Masse aber, als man mit Recht diesen anthropomorphischen Ursprung des modernen Kraftbegriffs zurücktreten liess, wäre die Nöthigung dringender gewesen, sich von der wirklichen Bedeutung, die jene Vorstellung für die Reform des Kraftbegriffs gehabt hatte, deutliche Rechenschaft zu geben; nur so wäre es möglich geworden, die Irrungen zu vermeiden, welche später in die Auffassung des Trägheitsgesetzes sich einmengten. Ein letzter Mangel dieser frühesten Gestaltung mechanischer Axiome liegt endlich in der unzureichenden Entwicklung des Begriffs der Bewegung. Galilei hatte die Bewegungsvorstellung einfach der sinnlichen Wahrnehmung entnommen, ohne an eine Zergliederung ihrer Bedingungen zu denken. Newton scheidet die wirkliche von der scheinbaren Bewegung, indem er nur die erstere der Mechanik zuweist, da bloss die wirkliche Bewegung der Körper im Raum in wirkenden Kräften ihre Ursache habe. Aber indem er dem Raum, in welchem die wirkliche Bewegung vor sich geht, eine absolute Existenz zuschreibt, wird ihm zugleich die wirkliche zur absoluten, die scheinbare zur relativen Bewegung, und es verbirgt sich ihm so der aller Mechanik voraus-

*) Ausg. von Wolfers, S. 33.

gehende phänomenologische Grundsatz, dass jede Bewegung an und für sich nur eine relative sein kann, weil wir die Ortsveränderung irgend eines Körpers nur wahrnehmen können, insofern wir sie auf irgend einen Punkt ausserhalb desselben beziehen, den wir als ruhend voraussetzen*).

Mit dieser mangelhaften Entwicklung des Begriffs der Bewegung hängt eine Vermengung zusammen, welche, so natürlich sie auch für die Anfänge der Mechanik ist, doch einer klaren Auffassung und Unterscheidung der Axiome hindernd im Wege steht: es ist dies die Vermengung solcher Sätze, die einen rein phoronomischen Charakter besitzen, insofern sie nichts als die Anschauung der Bewegung voraussetzen, mit andern Sätzen von dynamischem Inhalt, die auf bestimmten Annahmen über die Kräfte und über die Massen, auf welche sie wirken, beruhen. Diese Vermengung nun ist es, welche noch weit mehr als in der immerhin auf die Gewinnung fundamentaler Voraussetzungen gerichteten Naturphilosophie Newton's in jener zweiten Entwicklung der Mechanik hervortritt, die vorzugsweise an die technischen Anwendungen derselben sich anschliesst und der Gestaltung complicirter, aber praktisch fruchtbarer Principien zugewandt ist**).

### c. Teleologische Fundamentaltheoreme der Mechanik.

Vom Standpunkte der reinen Mechanik aus erscheint es gleichgültig, ob die allgemeinen Bewegungsgesetze auf irgend einen natürlichen Zusammenhang von Bewegungserscheinungen wie das Weltsystem, oder auf eine künstliche Vorrichtung wie die Pendeluhr angewandt werden. Trotzdem steht die Ausbildung der Mechanik in beiden Fällen unter sehr verschiedenen Bedingungen. Die Natur bietet vorzugsweise Combinationen frei wirkender Kräfte, und am günstigsten gestaltet sich in dieser Beziehung wieder das Weltsystem im ganzen, weil hier gegenüber einigen wenigen nach einfachen Gesetzen wirkenden Ursachen alle etwa stattfindenden Nebeneinflüsse bei einer approximativen Betrachtung der Erscheinungen vernachlässigt werden können. Von Anfang an streben daher die aus den allgemeinen Naturerscheinungen abgeleiteten Principien einer causalen Form zu. Auf die künstliche Maschine dagegen wirken die Bewegungsursachen unter bestimmten Bedingungen des Zusammenhangs der Theile, und diese sind von den Zwecken abhängig, denen die Maschine dienen soll. Hier wird daher die ganze Beurtheilung von dem Zweckbegriff gelenkt, und auch die auf Grund solcher Betrachtungen gewonnenen Principien nehmen demgemäss eine teleologische Form an. Nach der Natur des Zweckbegriffs kann freilich dies Verhältniss kein ausschliessliches sein, sondern die auf dem ersten Weg entstandenen Causalgesetze wirken ebenso

---

*) Ausg. von Wolfers, S. 26.

**) Vgl. zu Obigem die in Bd. I, S. 523 f., 555 f. gegebenen Formulirungen der phoronomischen und physikalischen Axiome.

auf die technische Mechanik wie die in dieser herrschende Zweckbetrachtung auf die physikalische zurück. Zudem liegen in der Ausbildung der letzteren selbständig wirkende teleologische Motive. An ihren Endpunkten gehen endlich beide Entwicklungen in einander über, indem der causale Gesichtspunkt im ganzen zum Uebergewichte gelangt, während nebenbei gewissen Zweckprincipien eine allgemeinere Uebertragung auf die Natur zu Theil wird.

Die Entwicklung der Mechanik von Huygens und Newton an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts ist der aus beiden Quellen geflossenen Ausbildung der mechanischen Fundamentaltheoreme gewidmet. Eine Reihe von Sätzen wurde hier in die Wissenschaft eingeführt, deren jeder nach seinem Ursprung die Bedeutung eines aus axiomatischen Voraussetzungen abzuleitenden Theorems und in Bezug auf seine Anwendung die Bedeutung eines Princips besitzt, auf das man wo möglich die ganze Mechanik zu gründen sucht. Nicht selten war man zugleich bemüht, gewisse speculative Gründe für das gewählte Princip geltend zu machen und dasselbe auf diese Weise dennoch zum Rang einer axiomatischen Voraussetzung zu erheben. Solche Gründe sind regelmässig teleologischer Art, so dass auf diese Weise der technische Ausgangspunkt und die philosophische Gedankenrichtung auf das gleiche Ziel hinwirken. Die letztere verstärkt ausserdem die Neigung zu einer Uebertragung der nämlichen Gesichtspunkte auf die Betrachtung der frei wirkenden Naturkräfte. Erst gegen das Ende dieser Zeit kommt in der hauptsächlich durch d'Alembert und Lagrange der analytischen Mechanik gegebenen Gestaltung der causale Gesichtspunkt zum Uebergewicht, und man sucht nun nachzuweisen, dass alle jene teleologischen Principien Folgerungen sind aus den einfachsten Bewegungsgesetzen oder aus einem diese umfassenden mechanischen Grundsatz von causaler Bedeutung.

Eine hervorragende Rolle unter den so entstandenen fundamentalen Lehrsätzen der Mechanik von teleologischem Inhalt kommt einer Reihe von Principien zu, die wir unter dem Namen der Erhaltungsprincipien zusammenfassen. Sie bilden den Anfangs- und Endpunkt dieser Bewegung. Denn zum ersten Mal tritt, in einer freilich ausschliesslich speculativ begründeten und in der Anwendung irreführenden Form, der Gedanke der Erhaltung in dem Cartesianischen Satz von der Erhaltung der Quantität der Bewegung in die Geschichte der Mechanik ein; ihren Abschluss aber findet diese Entwicklung in dem erst der neuesten Zeit angehörenden Princip der Erhaltung der Energie, welches den Cartesianischen Gedanken auf seine haltbare physikalische Form zurückführt. Merkwürdiger Weise sind übrigens gerade die Aufstellungen dieses ersten und letzten Princips ursprünglich von rein speculativen Erwägungen ausgegangen, und sie haben daher auch von Anfang an den Anspruch auf die Bedeutung allgemeiner Naturgesetze erhoben. Dagegen kommt die technische Bedeutung des Erhaltungsgedankens in einer Reihe zwischenliegender

Principien zur Geltung, welche für das engere Gebiet der Mechanik fruchtbarer geworden sind als jene allgemeinen Formulirungen, deren Werth mehr auf physikalischem Boden liegt.

Unter diesen specifisch mechanischen Erhaltungsgesetzen nimmt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte der Zeit wie der Bedeutung nach die erste Stelle ein. Als eine selbstverständliche Voraussetzung wurde es von Huygens in die Mechanik eingeführt, indem derselbe bei der Untersuchung der Pendelbewegungen von dem Satze ausging, dass ein fallender Körper durch die erlangte Geschwindigkeit niemals in eine grössere Höhe gehoben werden könne, als die er herabgefallen sei*). Seine weitere Ausbildung hat das Princip in mathematischer und physikalischer Richtung durch Jacob, Johann und Daniel Bernoulli, in philosophischer Richtung aber durch Leibniz erhalten. In rein mathematischer Formulirung lautet dasselbe: »Wenn sich ein System irgendwie verbundener Massen unter dem Einfluss constanter Kräfte bewegt, so ist die Summe der Producte der Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten zu allen Zeitpunkten, in welchen die Massen dieselben relativen Lagen gegen einander einnehmen, die nämliche«**). Die ersten Begründungen dieses Satzes stützen sich auf das Beharrungsgesetz und auf die stillschweigende oder ausdrückliche Annahme, dass keine Kraft aus nichts entstehen könne. In diesem Sinne suchte namentlich Leibniz dem Product aus der Masse in das Geschwindigkeitsquadrat, für das er im Gegensatze zu der bei dem Gleichgewicht der Körper in Wirksamkeit tretenden »todten Kraft« den Namen lebendige Kraft einführte, seine allgemeinere philosophische Bedeutung zu sichern, ohne dass es ihm jedoch gelang, für dasselbe eine andere Ableitung zu finden als aus den Fallgesetzen und der Voraussetzung, dass die Wirkung einer Kraft durch das Product eines gehobenen Gewichtes in seine Erhebungshöhe gemessen werde***). In dieser letzten Voraussetzung lag nun insofern eine petitio principii, als dabei der Arbeitseffect, ohne Rücksicht auf die Zeit, in welcher derselbe zu Stande kommt, als Mass der Kraft angenommen ward. Dem von Leibniz so lebhaft bekämpften Cartesianischen Kräftemass dagegen, dem Product der Masse in die einfache Geschwindigkeit, lag gerade die Berücksichtigung der Zeit zu Grunde, ohne dass dies jedoch in der metaphysisch-teleologischen Erklärung, welche Descartes von seinem Princip gegeben hatte, irgend ersichtlich gewesen wäre. So war denn im wesentlichen dieser ganze Streit um das Kräftemass, der übrigens in der Entwicklung der Mechanik grosse Dienste geleistet hat, ein Streit um Worte, bei dem man sich

*) Horologium oscillatorium. Pars IV, hyp. I, II.

**) D'Alembert, Traité de dynamique. Paris 1743, p. 169.

***) Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii. Ausg. von Gerhardt, VI, p. 122. Vgl. hierzu Harzer, Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil. V, S. 265 f.

sowohl über die einfachen Elemente des Kraftbegriffs wie über den eigentlichen Grund der Meinungsunterschiede im Unklaren befand. Merkwürdiger Weise scheint übrigens Leibniz selbst in späterer Zeit einer Erkenntniss des richtigen Sachverhältnisses nahe gewesen zu sein, da er in seinem »Specimen dynamicum« für den Stoss der Körper ein Princip der »Erhaltung des Totalfortschritts der Körper« aufstellt, welches mit dem Cartesianischen Mass übereinstimmt*). Die Grundlosigkeit dieses Streites, die wohl zuerst d'Alembert durchschaute**), wird vollkommen deutlich, wenn man beide Kräftemasse auf ihre einfachen Voraussetzungen zurückführt. Nach dem Galilei'schen Beharrungsgesetz ist die unter dem Einfluss einer constant wirkenden Kraft in einer Zeit t erlangte Geschwindigkeit v eines Körpers

$$v = g \,.\, t,$$

wenn g die in der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Der Weg s aber, welchen der Körper in der Zeit t zurücklegt, ist

$$s = \frac{v}{2} \,.\, t = \frac{g}{2} \,.\, t^2.$$

Nun ist die in der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit proportional $\frac{k}{m}$, wenn wir mit k die Kraft und mit m die Masse bezeichnen. Nimmt man also als Einheit der Kraft diejenige Kraftgrösse, welche der Einheit der Masse in der Einheit der Zeit die Geschwindigkeitseinheit mittheilt, so wird

$$v = \frac{k}{m} \,.\, t \text{ und } s = \frac{1}{2} \,.\, \frac{k}{m} \,.\, t^2,$$

oder

$$m\,v = k \,.\, t \text{ und } \frac{1}{2}\, m\, v^2 = k \,.\, s.$$

Diese Entwicklung, welche nebenbei zeigt, dass das correcte Mass der Arbeit einer Kraft das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit ist, deutet auf zwei verschiedene Erhaltungsprincipien hin, welche in der That als die eigentlichen Früchte jenes Streites anzusehen sind. Das eine, welches an die zweite Gleichung anknüpft, ist das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte: es kommt, wie sein Ursprung andeutet, in solchen Fällen zur Geltung, wo es sich um die Beurtheilung eines Massensystems, z. B. einer Maschine, nach ihren Arbeitseffecten handelt, ohne dass bei diesen die Zeit, in der sie geleistet werden, unmittelbar in Rücksicht fällt. Dasselbe hat in technischer sowohl wie in physikalischer Beziehung die überwiegende Bedeutung, da es bei der Untersuchung der Bewegungen zusammenhängender Massensysteme in den meisten

*) Ausg. von Gerhardt, S. 226 f.

**) Traité de dynamique, préf. p. XVI—XXI.

Fällen für uns vorzugsweise von Interesse ist, die Arbeitseffecte zu kennen, welche gewissen Lagen des Systems entsprechen. Das andere Princip, welches auf die erste der obigen Gleichungen zurückführt, ist das der Erhaltung des Schwerpunktes. Dasselbe kommt in solchen Fällen zur Anwendung, wo es sich, wie beim Stoss der Körper, darum handelt, zu wissen, in welcher Weise in Folge eines während einer bestimmten Zeit ablaufenden Vorgangs, z. B. eines Stosses, der Zustand des betheiligten Massensystems sich verändert hat.

Die Keime zur Entwicklung des Satzes von der Erhaltung des Schwerpunktes finden sich schon in den von Wren, Wallis und Huygens gelieferten Untersuchungen über den Stoss; auch Descartes hat bei seinem Satz von der Erhaltung der Quantität der Bewegung hauptsächlich an den Stoss gedacht, aber irrthümlich angenommen, dass die absolute, nicht die algebraische Summe der Bewegungsgrössen erhalten bleibe. In exacter Weise wurde das Princip zuerst von Newton ausgesprochen, der dasselbe unter die Corollarsätze seiner Bewegungsaxiome aufnimmt und ihm folgende Form giebt: »Der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier oder mehrerer Körper ändert seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung durch die Wirkung der Körper unter sich nicht, und derselbe wird daher, so lange keine äusseren Kräfte einwirken, entweder ruhen oder sich gleichförmig in gerader Linie fortbewegen.« Werden demnach durch $m_1$ und $m_2$ zwei gegen einander stossende Massen, durch $v_1$ und $v_2$ ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss, durch $v_1'$ und $v_2'$ dieselben nach dem Stoss bezeichnet, so ist nach dem obigen Princip

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

eine Formel, welche unmittelbar zeigt, dass in den Ausdruck dieses Erhaltungsprincips das von Descartes als Quantität der Bewegung bezeichnete Product $m . v$ eingeht.

In der Beziehung der beiden genannten Erhaltungsprincipien zu den allgemeinen Bewegungsgesetzen liegt nun die Aufforderung, sie des Charakters ursprünglicher Principien ganz zu entkleiden und sie einfach unter die aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen gefolgerten Theoreme zu verweisen. Dieser Schritt ist hauptsächlich durch Lagrange geschehen, der damit vollends jenen Principien den Charakter causal begründeter Sätze gegeben hat*). Es versteht sich von selbst, dass es dadurch leicht wird, denselben auch im Ausdruck ihren ursprünglich teleologischen Charakter zu nehmen, und es mag sein, dass man desshalb gegenwärtig, selbst wenn man die alten Namen für jene Principien beibehält, kaum noch ihrer Zweckbedeutung sich bewusst ist. Gleichwohl bedarf es kaum des näheren Nachweises, dass der Gedanke der Erhaltung nothwendig den Zweckgedanken in sich schliesst. Die Bedeutung des Zweckprincips besteht ja

*) Mécanique analytique, sec. part, sect. III, §. I et V.

in allen Fällen darin, dass wir von einem zu erreichenden Endeffect aus auf die Bedingungen zurückgehen, welche denselben herbeiführen. Bei der Anwendung des Begriffs der Erhaltung vergleicht man aber unmittelbar den Endeffect mit den Anfangsbedingungen, indem man beide einander gleich setzt.

Die beiden Erhaltungsprincipien, in denen der Streit um das Kräftemass seine Lösung gefunden, stehen nun ausserdem in naher Beziehung zu zwei weiteren Principien, in denen sich ebenfalls der Erhaltungsgedanke bewahrt hat. Aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist das Princip der Erhaltung der Energie hervorgegangen; der Satz von der Constanz der Quantität der Bewegung aber, der sich in den Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes fortgesetzt, hat einen weiteren Ausläufer in dem so genannten Princip von der Erhaltung der Flächen gefunden. Der beschränkte Werth des letzteren im Vergleich mit der universellen Bedeutung des Energiegesetzes zeigt schon, dass unter den beiden ursprünglichen Erhaltungsgesetzen das Princip der lebendigen Kräfte das entwicklungsfähigere ist.

In seiner rein mechanischen Bedeutung betrachtet erscheint das Energiegesetz als eine Erweiterung des Princips der lebendigen Kräfte. Durch die Erwägung, dass bei einem abgeschlossenen System von Körpern bei bestimmten periodisch wiederkehrenden Lageverhältnissen die Summe der vorhandenen lebendigen Kräfte jedesmal dieselbe ist, wird diese Erweiterung unmittelbar nahe gelegt; denn die Bedingungen zur Erzeugung jener Kräfte müssen auch in irgend einer der andern Positionen, welche das System durchläuft, schon vorhanden sein, insofern durch die in dem System ursprünglich gegebenen Bedingungen auf ein bestimmtes Lageverhältniss alle andern nothwendig folgen. In diesem Sinne kann aber die Arbeit, die das System in einer späteren Position leistet, bereits als potentiell vorhanden in irgend einer vorangegangenen angesehen werden*). So ist die lebendige Kraft der Schwingung des Pendels bei seinem Durchgang durch die Gleichgewichtslage in der äussersten Abweichung von der letzteren, in welcher seine wirkliche Geschwindigkeit null ist, potentiell vorhanden, da jene lebendige Kraft von der Grösse der Ablenkung unmittelbar abhängt. Das Wesen dieser Auffassung besteht also darin, dass man nicht bloss einen gegebenen Zustand des Systems, sondern den ganzen Zusammenhang auf einander folgender Zustände desselben berücksichtigt. Die so erweiterte Betrachtung erfordert aber eine Erweiterung des ursprünglichen Kraftbegriffs oder die Ueberführung desselben in den allgemeineren Begriff der Energie. Der Kraftbegriff bezieht sich, da Masse und Beschleunigung seine Bestandtheile sind, nur auf unmittelbar gegebene

---

*) Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 20 f. Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Ausgabe I, 1, S. 211 f.

Wirkungen; der Begriff der Energie dagegen bezeichnet überhaupt die in einer Masse oder in einem System von Massen vorhandene Wirkungsfähigkeit. Die in einem gegebenen Augenblick vorhandene Energie zerfällt daher in zwei Theile: in die actuelle Energie, welche dem älteren Begriff der lebendigen Kraft entspricht und durch das halbe Product der Massen in das Quadrat ihrer Geschwindigkeiten gemessen wird, und in die potentielle Energie, welche sich aus den Lageverhältnissen der Massen ergiebt und daher auch als Energie der Lage bezeichnet werden kann. Das Energiegesetz nimmt nun die einfache Form an: »Die Energie eines gegebenen unter unveränderlichen äusseren und inneren Bedingungen stehenden Systems ist eine constante Grösse.« Im Gebiete der eigentlichen Mechanik bewährt sich dieses Erhaltungsprincip vor allem in der genauen Wechselbeziehung, welche zwischen Energie der Lage und actueller Energie stattfindet, indem jede Abnahme der ersteren mit einer entsprechenden Zunahme der letzteren verbunden ist, und umgekehrt. Dennoch geht hier die Bedeutung des Princips kaum über diejenigen Anschauungen hinaus, die bereits in dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wenn auch in beschränkterer Form, ihren Ausdruck fanden. Eine umfassendere Bedeutung gewinnt das Princip erst auf physikalischem Boden, wo es unmittelbar zu der Feststellung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Formen der Energie, die in der Natur vorkommen, hinüberführt, und wo es die leitende Maxime abgiebt, nach welcher die mannigfaltigen Transformationen der Naturkräfte zu beurtheilen sind. Während daher das Energiegesetz in der Mechanik die Stellung eines abgeleiteten Satzes von verhältnissmässig untergeordnetem Werthe einnimmt, erhebt es sich in der Physik zur Rolle des allgemeinsten und fundamentalsten Naturgesetzes. Aus diesem Grunde muss aber auch die nähere Würdigung dieses Princips, sowie der Modificationen, die zu bestimmten Zwecken mit ihm vorgenommen worden sind, der Untersuchung der physikalischen Forschungsprincipien vorbehalten bleiben.

Von weit beschränkterer Bedeutung ist das letzte der Erhaltungsprincipien, das Princip der Erhaltung der Flächen. Dasselbe wurde für einen speciellen Fall und als ein rein empirisches Gesetz zuerst von Kepler aufgestellt und dann von Newton aus dem Trägheitsgesetz, sowie aus dem Satz des Kräfteparallelogramms abgeleitet. Newton's Lehrsatz, der nur eine Verallgemeinerung des ersten Kepler'schen Gesetzes ist, lautet: »Wenn Körper sich in Bahnen bewegen, deren Radien nach dem unbeweglichen Mittelpunkt der Kräfte gerichtet sind, so liegen die von ihnen beschriebenen Flächen in festen Ebenen und sind den Zeiten proportional«*). Durch Euler, Dan. Bernoulli und d'Arcy erfuhr dieser Satz eine weitere Verallgemeinerung, indem er auf ein System von Körpern, die sich in ver-

*) Princip. philos. nat. math., lib. I, prop. I. Uebersetzung von Wolfers, Abschn. II, §. 13.

schiedenen Ebenen um ein festes Centrum bewegen, ausgedehnt wurde. Hierbei ergab sich dann die Nothwendigkeit, diese verschiedenen Drehungsebenen auf eine einzige zu projiciren, für welche der ursprüngliche Satz seine Geltung behielt. Das Princip der Erhaltung der Flächen nahm daher die Form an: »Wenn beliebige Massen um einen Mittelpunkt rotiren, so ist die Summe der Producte der Massen in die Projectionen der von ihren Radiusvectoren beschriebenen Flächenräume auf eine und dieselbe Ebene der Zeit proportional«, oder in anderer Fassung: »Wenn die Bewegungen eines um einen Mittelpunkt rotirenden Systems auf eine und dieselbe Ebene projicirt werden, so ist die Summe der Producte der Massen in ihre Geschwindigkeiten und in die Abstände vom Mittelpunkt eine constante Grösse.« Diese letztere Formulirung zeigt unmittelbar, dass das Flächenprincip ein Satz ist, welcher für die drehende Bewegung die nämliche Bedeutung hat wie das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes für die fortschreitende. Es kann daher ebenso wie dieses aus den Fundamentalgesetzen der Bewegung abgeleitet werden, was in Bezug auf die speciellere Form des Satzes schon von Newton, in Bezug auf die allgemeinere aber namentlich von Lagrange dargethan worden ist*).

Eine zweite Reihe mechanischer Zweckprincipien, denen der teleologische Charakter in der Regel noch deutlicher aufgeprägt ist als den Erhaltungsprincipien, kann mit dem Namen der Maximal- und Minimalprincipien belegt werden. Sobald das Ergebniss mechanischer Betrachtungen in die Form gebracht ist, dass irgend eine bei einem mechanischen Vorgang resultirende Grösse als eine solche bezeichnet wird, die entweder einen Maximal- oder Minimalwerth annehme, so liegt darin an und für sich eine Anwendung des teleologischen Gesichtspunktes; denn die relative Grösse des Erfolgs ist hier massgebend für die Aufstellung der Bedingungen, und es tritt somit die für das Zweckprincip charakteristische Umkehrung der Causalbeziehungen ein. Ein leicht begreifliches Motiv hat nun aber ausserdem in diesem Falle die Minimalwerthe bevorzugen lassen. Geht man nämlich von den technischen Anwendungen der Mechanik aus, so wird die Zweckmässigkeit irgend einer mechanischen Vorrichtung, einer Maschine z. B., zunächst danach beurtheilt werden, ob der zur Wirkung kommende Aufwand an Kraft dem von der Maschine zu leistenden Nutzeffect möglichst zu statten kommt oder nicht. Eine Maschine wird offenbar dann am zweckmässigsten construirt sein, wenn ein gegebener Nutzeffect durch einen möglichst geringen Kraftaufwand erreicht wird. Für eine Zeit, welche die Natur mit Vorliebe unter dem Gesichtspunkte des Nutzens auffasste, lag es nun nahe, diese technische Betrachtungsweise auf die natürlichen Bewegungssysteme zu übertragen. Rein logisch beurtheilt würde man ebenso gut zu einem Maximal- wie zu einem Minimalprincip

*) Mécanique analytique, sec. part. sect. I, 16; sect. III, §. 11; 3. édit. t. I, p. 227, 244.

gelangen können. Denn ob ich einen gegebenen Effect als einen möglichst grossen oder den Kraftaufwand, der zu ihm geführt hat, als einen möglichst kleinen bezeichne, ist für das thatsächliche Verhältniss gleichgültig. Aber der teleologische Standpunkt begünstigt hier die Form des Minimalprincips, da derselbe, von der Folge zum Grund zurückgehend, zu der Frage führt, wie ein gegebener Effect unter möglichst günstigen Bedingungen entstehen könne, worauf nun als quantitativer Ausdruck dieser Bedingungen am natürlichsten ein Minimum an Kraftaufwand sich herauszustellen scheint.

Diese Erwägungen haben bereits unmittelbar zu derjenigen Gestalt geführt, in welcher die hier erörterte Form teleologischer Principien zum ersten Mal in die Entwicklung der Mechanik eingetreten ist, zu dem um das Jahr 1746 von Maupertuis aufgestellten Princip der kleinsten Action*). In der Formulirung, welche ihm sein Urheber giebt, reflectirt sich auf das deutlichste die einseitige Teleologie jener Zeit: »Wenn in der Natur irgend eine Veränderung vor sich geht, so ist die zu dieser Veränderung nöthige Menge von Thätigkeit eine möglichst kleine.« Die Natur erscheint hier als die grosse Sparerin, deren Weisheit man in diesem Princip bewundert, und ebendesshalb ist man geneigt, das letztere als das Fundamentalgesetz anzuerkennen, auf das alle andern Sätze zurückgeführt werden sollen. Dabei zeigt freilich die Durchführung sofort, dass man, um eine solche Behauptung aufrecht erhalten zu können, von der Unbestimmtheit der Begriffe Thätigkeit und Veränderung Gebrauch macht. Maupertuis selbst benützt als Mass der Thätigkeit das Product aus Masse, Geschwindigkeit und durchlaufenem Raum (m v s), als Veränderung aber betrachtet er bald, wie beim Stoss der Körper, die Differenz der lebendigen Kräfte, bald, wie bei der Brechung und Reflexion des Lichtes, die Summe der Actionsmengen vor und nach dem Ereigniss, so dass das behauptete Minimum in verschiedenen Fällen eine sehr verschiedene physikalische Bedeutung hat und überdies, wie d'Arcy zeigte, bei der Lichtbrechung sogar gelegentlich zu einem Maximum werden kann. Es war daher nur eine äusserliche Anbequemung, die freilich in der philosophischen Zeitrichtung ihre Quelle hatte, wenn Euler Resultate, die dem Gebiete der so genannten isoperimetrischen Probleme angehörten, als Specialfälle des Princips der kleinsten Action betrachtete. Es ist selbstverständlich, dass Aufgaben, bei denen es sich von vornherein darum handelt, die Bedingungen für den Minimal- oder auch Maximalwerth irgend einer Grösse zu finden, zu Lösungen führen können, die eine äussere Aehnlichkeit mit dem hier besprochenen Princip darbieten, da ja an und für sich jede solche Aufgabe auf einem verwandten teleologischen Gesichtspunkt beruht, wie dies z. B. schon bei dem ältesten isoperimetrischen Problem, dem der Curve des

*) Vgl. hierzu Ad. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action. Leipzig 1877.

schnellsten Falls, deutlich hervortritt. Da nun aber dieser Gesichtspunkt schliesslich auf alle mechanischen Probleme anwendbar ist, indem nach den Minimal- und Maximalwerthen einer Function und nach den Bedingungen, unter denen sie auftreten, überall gefragt werden kann, so ist auch die zu Grunde liegende Methode, welche die Analytiker des vorigen Jahrhunderts als die isoperimetrische bezeichneten, und aus welcher die von Lagrange begründete Variationsrechnung hervorging, von einer ganz allgemeinen Anwendbarkeit, und sie bietet auf diese Weise die Gelegenheit dar, jedes mögliche mechanische Problem unter dem ihr eigenen Gesichtspunkte zu behandeln.

In der That ist die ganze Weiterentwicklung des Princips der kleinsten Action von diesen beiden Motiven aus bestimmt worden, von dem philosophischen, welches seine ursprüngliche Aufstellung veranlasste, und von dem rein mathematischen, welches aus den isoperimetrischen Problemen entsprang. Je mehr im Laufe der Zeit die Willkürlichkeit in der Ausführung des ersten philosophischen Grundgedankens zu Tage trat, um so mehr musste das Princip den Charakter einer bloss mathematischen Formulirung annehmen, welche sich durch ihren Nutzen für bestimmte Anwendungen empfahl. In diesem Sinne ist es zunächst von Lagrange behandelt worden, der es als das »Princip der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft« bezeichnete und es gleich allen andern zusammengesetzten Principien aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableitete*). Schon der gewählte Ausdruck zeigt, indem er eine Alternative zwischen dem Maximum und Minimum aufstellt, dass hier der ursprüngliche teleologische Gedanke verloren gegangen ist. Das nämliche gilt von den weiteren Entwicklungen, die das Princip bei W. R. Hamilton und Jacobi gefunden hat**). Es verbleibt ihm hier nur insofern der teleologische Charakter, als es in directe Abhängigkeit von dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gebracht wird, welches letztere ja, wie oben erörtert wurde, auf einer Zweckbetrachtung beruht. Die Principien von Hamilton und Jacobi selbst aber besitzen, nachdem diese Beschränkung auf ein »conservatives System« vorausgesetzt ist, lediglich mathematische Bedeutung; sie bieten Ausdrücke dar, welche die Lösung bestimmter Probleme erleichtern, ohne jedoch ein besonderes Princip teleologischer oder causaler Betrachtung zu enthalten oder gar im Sinne der ersten Aufstellung des Princips der kleinsten Action auf eine ursprüngliche Zweckmässigkeit der Natur hinzuweisen.

Ihre letzte und definitive Gestaltung haben endlich die Maximal- und Minimalprincipien in dem von Gauss aufgestellten Princip des kleinsten Zwangs gefunden***). Nach ihm erfolgen die Bewegungen eines

*) Méc. analyt., sec. part. sect. III, §. VI.

**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 45. Thomson und Tait, a. a. O. I, 1, S. 258 f.

***) Gauss' Werke V, S. 25.

Massensystems, wie auch die Massen mit einander verbunden sein mögen, in jedem Augenblick in möglichst grosser Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, also unter dem kleinsten Zwang. Als Mass des Zwangs betrachtet man dabei die Summe der Producte aus dem Quadrat der Ablenkung jedes Punktes von der freien Bewegung in seine Masse. Man wendet also auf die Abweichung der gezwungenen von der freien Bewegung eine ähnliche Betrachtungsweise an, wie sie bei der Methode der kleinsten Quadrate in Bezug auf die Ausgleichung der Beobachtungsfehler stattfindet. Mit Rücksicht hierauf bemerkte Gauss, die Natur verfahre, wenn in ihr die Bewegungen durch irgend welche hemmende Bedingungen modificirt werden, in der nämlichen Weise wie der rechnende Mathematiker, wenn er Erfahrungen ausgleicht, die sich auf von einander abhängige Grössen beziehen. Man wird nicht verkennen, dass es auch im ersteren Falle der rechnende Mathematiker ist, der unter einem bestimmten Gesichtspunkt die Erscheinungen betrachtet, und der nun nachträglich diese seine Betrachtungsweise der Natur selbst unterschiebt. Werden die Vorgänge in ihren rein causalen Beziehungen aufgefasst, so ist es selbstverständlich, dass bestimmte Hemmungen eine Bewegung nicht mehr abändern können, als dem Betrag der Hemmung entspricht; jedes Mehr wäre ein ursachloses Geschehen. Kehrt man nun dieses causale Verhältniss um, indem man den Endeffect aller Bedingungen der Bewegung, die nach Massgabe der vorhandenen Hemmungen eintretende Abweichung von der freien Bewegung, zum Ausgangspunkt nimmt, so gelangt man nothwendig zum Princip des kleinsten Zwangs. Der dem letzteren zu Grunde liegende Zweckgedanke wird dann aber zum objectiven Naturzweck erhoben, wenn man dieses Princip als ein Gesetz betrachtet, nach welchem die Natur selber handelt. Diese Auffassung wird bestreitbar, sobald man damit die Vorstellung verbindet, der erreichte Endzweck sei zugleich die Ursache der Bewegungsgesetze selbst, wodurch die Natur zu einem mit Zweckbewusstsein handelnden Wesen gemacht wird. Da in der That nur im letzteren Fall von einem objectiven Zweck im eigentlichen Sinne des Wortes die Rede sein kann, so ist es offenbar angemessener, wenn hier Ausdrucksweisen vermieden werden, die an jene falsche Teleologie zurückerinnern, aus welcher dereinst das Princip der kleinsten Action hervorgegangen war.

### d. Causale Fundamentaltheoreme der Mechanik.

Die oben angedeutete Gefahr, die, wie das letzte Beispiel zeigt, selbst bei einer sonst richtigen Anwendung des Zweckgedankens so leicht nebenherläuft, ist es, die sichtlich in der neueren Entwicklung der Mechanik die Anwendung causaler Principien hat bevorzugen lassen. Doch ist es bemerkenswerth, dass in dieser Beziehung die exacteste der Naturwissenschaften den nämlichen Wandelungen des Zeitgeistes unterworfen war wie jede andere. Der teleologischen Mechanik entspricht eine teleologische

Physik und Physiologie, und die causale Mechanik ist es, die auch auf diesen Gebieten der causalen Betrachtung ihre Richtung anweist. Nur werden freilich in beiden Fällen Verirrungen, denen der exacte Charakter der Mechanik engere Grenzen setzt, um so schwerer und andauernder, je verwickelter die Erscheinungen sind. Für die Mechanik vollzieht sich in der Hervorhebung causaler Principien eine Rückkehr zu dem Zeitalter Galilei's. Diese Beziehung macht sich vor allem darin geltend, dass man die mechanischen Principien wieder auf die einfachsten Bewegungsvorstellungen zu gründen sucht. In diesem Sinne ist zunächst d'Alembert bemüht, den Begriff der Kraft, der in der teleologischen Periode der Mechanik und namentlich in dem berühmten Streit über das Kräftemass vielfach verdunkelt worden war, wieder auf die anschaulichen Elemente zurückzuführen, die er bei Galilei und Newton gehabt hatte, und damit Hand in Hand geht sein Streben, die wegen ihrer nützlichen Anwendungen nicht zu entbehrenden Erhaltungsprincipien aus den einfachsten dynamischen Vorstellungen abzuleiten. Das von ihm begonnene Werk führt Lagrange zu Ende. Schon d'Alembert hatte mit der causalen Betrachtung den Plan verbunden, aus einem durch unmittelbare Evidenz oder durch einen anschaulichen Beweis feststehenden Fundamentaltheorem alle andern Sätze abzuleiten. Aber das von ihm aufgestellte Princip eignete sich weder zu einer hinreichend allgemeinen Formulirung der Bewegungsgesetze noch in der von ihm gegebenen Fassung zu einer unmittelbaren Verbindung der Statik mit der Dynamik, auf die es doch hinwies. Dies leistete erst Lagrange, indem er auf dasjenige Princip zurückging, welches schon dem d'Alembert'schen Satze stillschweigend zu Grunde lag, auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das er in einer Weise verallgemeinerte, in welcher es sich zur Ableitung aller andern statischen und dynamischen Principien geeignet erwies. Auch in dieser Hervorkehrung des virtuellen Princips lag eine Rückkehr zu den Anschauungen Galilei's, der dasselbe in einfacherer Gestalt bereits besass, wenn ihm auch der Name fehlte. Diese Rückkehr ist aber doch zugleich verbunden mit einer Umkehrung der Betrachtungsweise. Galilei hatte dynamische Vorstellungen in die Statik eingeführt. Dazu hatte ihm der Begriff des virtuellen Momentes gedient. Lagrange führte jedes dynamische Problem auf ein statisches zurück, was freilich wiederum nur dadurch möglich war, dass in Folge jener Galilei'schen Anschauung das Gleichgewicht als ein Grenzfall der Bewegung erscheint.

Das Princip von d'Alembert bildet zu dieser systematischen Gestaltung der gesammten Statik und Dynamik auf Grund eines einzigen causalen Grundsatzes die Vorbereitung. Es lautet in der von d'Alembert selbst gegebenen Formulirung: »Um die wirklichen Bewegungen eines Systems von Körpern zu finden, die mit einander im Zusammenhang stehen, zerlege man die jedem Körper mitgetheilten Bewegungen a, b, c . . . in je zwei andere $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ . . . Diese sollen so beschaffen sein, dass,

wenn man dem Körper die Bewegungen $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ . . . allein mittheilte, das System im Gleichgewicht sein würde. Es werden dann die Bewegungen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ . . . zugleich diejenigen sein, welche der Körper wirklich annimmt«*). Die Nützlichkeit dieses Princips besteht darin, dass dasselbe in allen Fällen, wo bewegende Kräfte unter bestimmten statischen Bedingungen einwirken, eine Zerlegung des Problems in einen statischen und dynamischen Theil herbeiführt, worauf nach Feststellung der im Gleichgewicht stehenden oder der so genannten »verlorenen Kräfte« die übrig bleibenden wie frei wirkende Kräfte behandelt werden können. Es liegt nahe, diesem Resultat eine solche Wendung zu geben, dass der Bewegung vollständig der Fall des Gleichgewichts substituirt wird. Dies geschieht dann, wenn man zu den übrig bleibenden Kräften $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ . . . solche von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung hinzugefügt denkt. Diese Wendung ist dem d'Alembert'schen Princip in der That später gegeben worden, und es ist dasselbe dadurch zu der von Lagrange vollbrachten Zurückführung der Dynamik auf die Statik in noch nähere Beziehung getreten. Eine besondere Beweisführung für das Princip hat sein Urheber nicht für nöthig gehalten; vielmehr betrachtete er dasselbe als eine unmittelbar einleuchtende Folge der vorgenommenen Kräftezerlegung. Da jede solche Zerlegung sich stützt auf das Princip der Zusammensetzung der Kräfte, so ist aber jedenfalls das letztere vorausgesetzt.

Die oben angeführte Veränderung des d'Alembert'schen Princips, durch welche jedes dynamische auf ein statisches Problem reducirt wird, scheint der nächste Anlass zu der von Lagrange unternommenen einheitlichen Gestaltung der Mechanik auf Grund eines einzigen causalen Fundamentalgesetzes gewesen zu sein. Als solches dient ihm das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, dem er die Bedeutung eines allgemeinsten statischen Gesetzes giebt. Massgebend für dieses Princip ist zunächst der Begriff des »virtuellen Momentes«, unter welchem man das Product einer Kraft in die im Sinne ihrer Wirkung zurückgelegte unendlich kleine geradlinige Wegstrecke versteht. Dies vorausgesetzt lautet das Princip: »Ein zusammenhängendes System von Körpern oder Punkten ist im Gleichgewicht, sobald die Summe seiner virtuellen Momente gleich null ist«**). Man ermittelt also hier die Bedingungen des Gleichgewichts, indem man sich denkt, jede einzelne Kraft übe eine ihrer Grösse entsprechende, aber unendlich kleine Wirkung aus, und dann feststellt, dass die Summe aller so gebildeten positiven und negativen virtuellen Geschwindigkeiten gleich null ist. Findet kein Gleichgewicht statt, so wird diese Summe nicht gleich null sein; man kann sich aber dann stets die Bewegung dadurch aufgehoben denken, dass man die nach den drei Coordinatenaxen

*) D'Alembert, Traité de dynamique. Paris 1743, p. 51.

**) Vgl. hierzu die ausführlichere Formulirung bei Lagrange, a. a. O. p. 20.

genommenen Componenten der Bewegung durch Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung aufgehoben denkt. Durch diese dem d'Alembert'schen Princip entnommene Betrachtungsweise liefert das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Grundgleichung der Dynamik für die Bewegung irgend eines Körpersystems*). Hierbei beruht die mathematische Ableitung der letzteren auf einem sehr einfachen Verfahren. Ist nämlich im Fall des Gleichgewichts die Summe der statischen Momente gleich null, so wird dieselbe, wenn kein Gleichgewicht vorhanden ist, den momentanen Beschleunigungen nach den drei Coordinatenaxen gleich gesetzt werden können. Bringt man nun aber diese Beschleunigungen unter abgeändertem Vorzeichen auf die andere Seite, so wird man wieder eine Summe erhalten, die der Null gleich ist, und die sich von der statischen Bedingungsgleichung nur dadurch unterscheidet, dass sie ausser den virtuellen Momenten die Componenten der Beschleunigung im umgekehrten Sinne genommen enthält. Mit demselben Rechte kann man übrigens auch die Bedingungsgleichung der Bewegung als den allgemeineren Fall betrachten, aus welchem die statische Grundgleichung hervorgeht, wenn die Componenten der Beschleunigung sämmtlich gleich null werden. Die neuere Mechanik hat im ganzen die letztere Auffassung bevorzugt. Wesentlich ermöglicht wird übrigens diese Zurückführung der Dynamik auf das statische Grundprincip durch die Anwendung der Infinitesimalmethode, welche bei der Aufstellung der Grundgleichungen der Bewegung überhaupt von der Annahme unendlich kleiner Verrückungen ausgeht, wie solche das virtuelle Princip verlangt.

Einen wichtigen Theil seiner Dynamik hat Lagrange dem Nachweis gewidmet, dass alle jene complicirteren Principien von grossentheils teleologischem Charakter, die sich für die Behandlung bestimmter Arten von Aufgaben nützlich erwiesen, aus dem so gewonnenen Fundamentalgesetz abgeleitet werden können. Auf diese Weise finden sich bei ihm zum ersten Mal die genannten Principien als einzelne Folgen aus den allgemeinsten Causalgesetzen der Mechanik im Zusammenhange entwickelt.

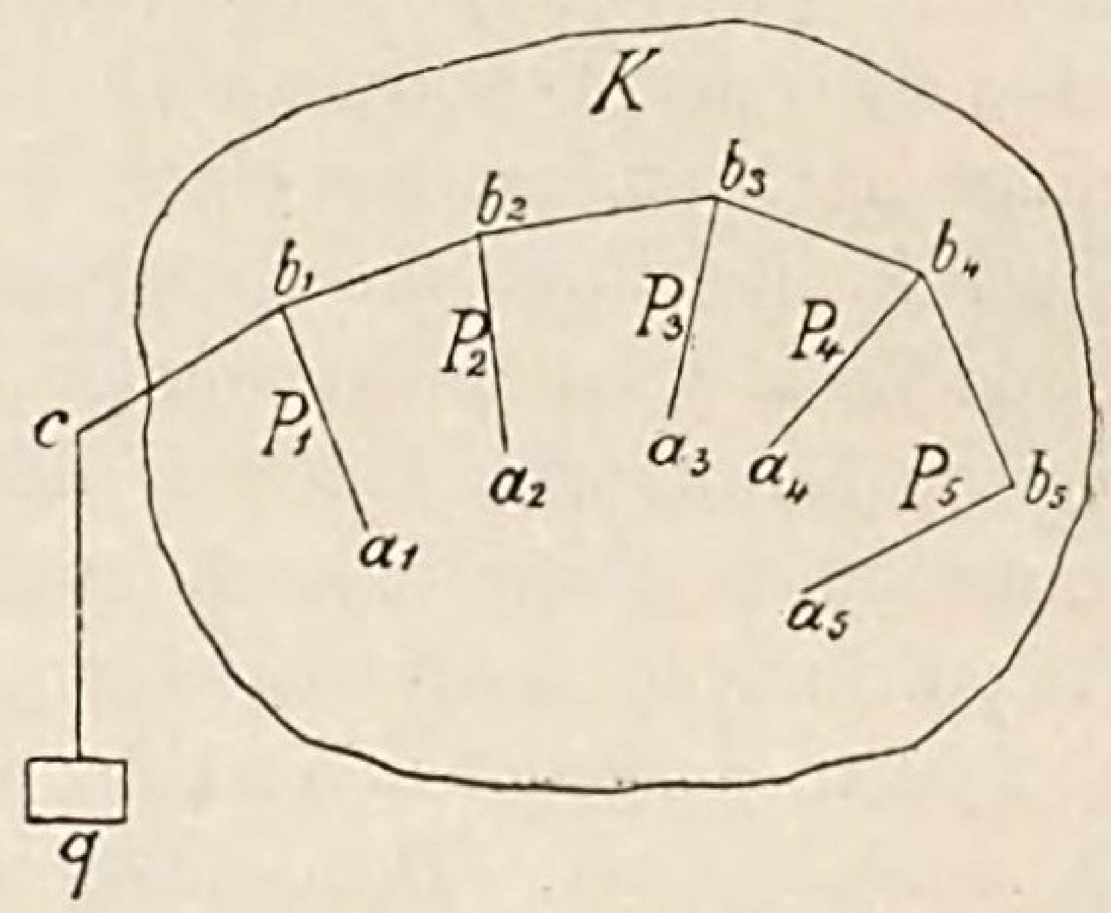
Mit dem hierin hervortretenden Streben einer vollkommen einheitlichen Ausführung der Mechanik geht Hand in Hand der Versuch, auch dem zu Grunde gelegten Princip eine Selbständigkeit zu geben, durch die es von allen etwa sonst massgebend gewesenen Voraussetzungen unabhängig wird. Das Ideal wissenschaftlicher Darstellung würde ja in der That dann erreicht sein, wenn es nicht nur gelänge, aus einem Princip alles Einzelne abzuleiten, sondern wenn auch ausserdem dieses Princip nur auf sich selber gestellt wäre. So erfolgreich nun Lagrange's Bemühungen in ersterer Beziehung gewesen sind, so kann man doch zweifeln, ob ihm auch das zweite geglückt ist, ob er durch seine Ableitung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wirklich alle andern Voraussetzungen entbehrlich gemacht hat.

---

*) Lagrange, a. a. O. p. 234.

Lagrange bezeichnet den Satz vom Hebel und den Satz vom Kräfteparallelogramm als die beiden Principien, auf welche man bis dahin die Statik gegründet habe, und er ist der Ansicht, dass das virtuelle Princip das allgemeinere sei, weil es als ein allgemeiner Ausdruck für die sämmtlichen Gesetze des Gleichgewichts betrachtet werden könne. Das virtuelle Princip selbst, meint er, sei nicht unmittelbar evident, aber es könne aus einem andern unmittelbar evidenten Princip, aus dem des Flaschenzugs, abgeleitet werden, ohne dass es nöthig wäre, das Hebelgesetz und das Gesetz der Zusammensetzung der Kräfte zu dieser Deduction zu benützen. Man kann nun aber zweifeln, ob der Flaschenzug den Namen eines besonderen Princips verdient, und ob er nicht vielmehr unter den von Lagrange für ihn eingeführten Voraussetzungen lediglich die Bedeutung einer Veranschaulichung des virtuellen Princips besitzt, wonach dann doch dem letzteren selber eine unmittelbare Evidenz zukommen würde. Angenommen, es wirkten auf einen Körper K eine Reihe von Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... in den Richtungen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ ... ein, so besteht die Anwendung der Vorstellung des Flaschenzuges darin, dass man an den Angriffspunkten $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... der Kräfte bewegliche Rollen, irgendwo in der Richtung des Kräftezugs dagegen feste Rollen $b_1$, $b_2$, $b_3$ ... angebracht und um eben diese Rollen einen einzigen unausdehnsamen und absolut biegsamen Faden geschlungen denkt, dessen Ende an der letzten beweglichen Rolle $a_5$ befestigt ist. Bringt man nun an einer beliebigen Stelle ausserhalb des Kräftesystems noch einmal eine feste Rolle c an, über welche der Anfang des Fadens gelegt wird, so lassen sich alle Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... durch ein hier angehängtes Gewicht q ersetzt denken, wenn man zwischen je zwei zusammengehörigen Rollen $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$ u. s. w. den Faden so oftmal geschlungen denkt, dass der durch q ausgeübte Zug successiv den Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... an Grösse gleichkommt. Bezeichnet also $n_1$, $n_2$, $n_3$ ... die Zahl der Fäden zwischen $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$, $a_3$ und $b_3$ ..., so sind diese Zahlen durch die Bedingung gegeben, dass $n_1 . q = P_1$, $n_2 . q = P_2$, $n_3 . q = P_3$ ... sein muss. Denkt man sich nun ferner, jede der Rollen $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... erführe durch das Gewicht q unendlich kleine Verrückungen $e_1$, $e_2$, $e_3$ ..., so wird offenbar ein Sinken dieses Gewichtes dann nicht eintreten können, wenn $n_1 . e_1 + n_2 . e_2 + n_3 . e_3 ... = 0$ ist, d. h. wenn die vorausgesetzten unendlich kleinen Verrückungen einander gegenseitig aufheben. Hieraus ergiebt sich aber, wenn man die zwischen $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... und q festgestellte Beziehung berücksichtigt, unmittelbar die Gleichung der virtuellen Momente

Fig. 16.



$$e_1 P_1 + e_2 P_2 + e_3 P_3 + \ldots = 0,$$

welche der gewöhnliche Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist. Diese Ableitung gewinnt noch eine abstractere Allgemeinheit, wenn man der Schwere des Gewichtes q eine beliebige Kraft p substituirt, die in irgend einer Richtung $b_1$ c wirken kann, und wenn man, wie dies in der Fig. 16 angedeutet ist, voraussetzt, die Rollen $a_1$, $b_1$ . . . seien von verschwindendem Durchmesser, so dass alle zwischen zwei zusammengehörigen Rollen verlaufenden Fäden in eine einzige gerade Linie zusammenfallen. Es wird aber dann zugleich noch deutlicher, dass dieser ganze Mechanismus des Flaschenzugs nur die Bedeutung einer mathematischen Hülfsvorstellung besitzt, die anschaulich machen soll, unter welcher Bedingung Kräfte, die auf einen Körper oder auf ein System unter einander verbundener Punkte wirken, im Gleichgewicht stehen. Auf den mathematischen Charakter der ganzen Vorstellung weist überdies die physikalisch unmögliche Annahme unausdehnsamer und absolut biegsamer Fäden hin, die auf den fingirten Rollen reibungslos gleiten sollen. In dieser Beziehung gleicht die Vorstellung des Flaschenzugs vollständig einer jener geometrischen Hülfsconstructionen, welche einen Satz, der aus der ursprünglichen Figur nicht entnommen werden kann, unmittelbar evident machen. (Vgl. S. 143 f.) Das Zwingende der Veranschaulichung liegt in diesem Falle darin, dass die Erfolge der Combination einer Mehrheit in verschiedenen Richtungen wirkender Kräfte durch die Beziehung auf eine einzige mehrfach gebrochene gerade Linie versinnlicht werden, deren einzelne Theile man durch angemessene Knickungen successiv mit den Richtungen sämmtlicher Kräfte zusammenfallen lässt, wodurch nun, unter der Voraussetzung, dass sich alle Kräftewirkungen längs derselben fortpflanzen, der Gesammteffect der auf das System ausgeübten Wirkung als eine Bewegung des freien Endes merklich werden muss. Demgemäss lässt sich dann umgekehrt dies als Bedingung des Gleichgewichts hinstellen, dass, wenn alle Kräfte momentan in Wirksamkeit gedacht werden, eine solche Bewegung nicht stattfinden darf. Die hypothetischen Eigenschaften des geschlungenen Fadens sind hier offenbar nur insofern berechtigt, als sie den unveränderlichen Zusammenhang der Massenpunkte des Körpers K in einer andern für den vorliegenden Zweck geeigneten Form zur Darstellung bringen. Im übrigen aber zeigt die obige Zergliederung, wie die ganze Veranschaulichung ihre zwingende Kraft nur dadurch gewinnt, dass man gewisse Voraussetzungen stillschweigend hinzudenkt. Erstens nämlich wird angenommen, dass Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie auf ein starres Massensystem einwirken, sich in Bezug auf diese Wirkungen algebraisch addiren lassen, und zweitens wird vorausgesetzt, dass die Grösse einer Kraft an sich nicht verändert wird, wenn man derselben durch irgend welche äussere Hülfsmittel eine veränderte Richtung giebt. Diese beiden Voraussetzungen sind es nun aber, welche allen Sätzen über die Combination von Kräftewirkungen, insbesondere also auch dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte

zu Grunde liegen. Das virtuelle Princip hat den Vorzug, dass es diese allgemeinsten Voraussetzungen der Combination von Kräften unmittelbar in ihrer einfachen Natur hervortreten lässt, während der Satz vom Kräfteparallelogramm in directerer Weise geeignet ist, zu gegebenen Kräften die Resultirende nach Grösse und Richtung zu finden oder eine Kraft von bestimmter Richtung auf eine beliebige andere Richtung zu reduciren. Uebrigens bietet auch der Satz vom Kräfteparallelogramm diesen Vortheil nur so lange dar, als die Kräfte auf einen einzigen Punkt wirken, während, sobald an einem System fest verbundener Punkte die Kräfte angreifen, die Möglichkeit des Eintritts rotirender Wirkungen ein Problem der Kräftecombination einschliesst, welches durch den Satz vom Kräfteparallelogramm nicht gelöst wird. In dieser Beziehung bildet der von Poinsot eingeführte Begriff des Kräftepaars eine wichtige Ergänzung jenes Satzes, indem derselbe eine ähnliche Reduction auf beliebige Richtungen auch für die drehende Bewegung gestattet*). In letzterer Hinsicht hat nun abermals das virtuelle Princip den Vorzug grösserer Allgemeinheit für sich, da es sich auf ein System beliebig vieler fest verbundener Punkte bezieht, so dass die Bedingungsgleichung, zu der es führt, ebensowohl die drehende wie die fortschreitende Bewegung umfasst. Endlich wird auch die Richtungsreduction bei dem virtuellen Princip verwerthet: sie besteht hier darin, dass alle Kräfte schliesslich auf eine einzige Richtung reducirt werden.

Auf diese Weise ergiebt es sich, dass alle die genannten Sätze nur verschiedene Gestaltungen eines einzigen Princips der Zusammensetzung der Kräfte sind. Es kommt auf die specielle Beschaffenheit der Aufgabe an, welche von ihnen zu bevorzugen ist; doch besitzt der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten wegen seiner Ausdehnung auf beliebig viele Kräfte von translatorischer oder rotatorischer Wirkung jedenfalls die grösste Allgemeinheit. In Folge dieser gemeinsamen Wurzel ist nun auch für keinen jener Sätze ein eigentlicher Beweis, d. h. eine Ableitung aus andern fundamentaleren Principien, möglich. Was man Beweis zu nennen pflegt, das besteht nur in einer Veranschaulichung, bei der das zu beweisende Princip schon vorausgesetzt ist. So beweist man z. B. angeblich den Satz vom Kräfteparallelogramm, indem man die simultane Wirkung der Componenten in eine successive auflöst und zeigt, dass, wenn man sich diese successiven Wirkungen in unendlich kleinen Zeittheilchen einander folgend denkt, der beschriebene Weg die Diagonale des Parallelogramms ist. Nun besteht aber das Princip gerade darin, dass die simultanen Wirkungen der Kräfte ebenso wie die successiven sich combiniren. Genau ebenso verhält es sich mit der Zusammensetzung der Kräftepaare, bei welcher man bekanntlich ganz nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm verfährt. Nicht minder hat für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Anwendung

*) Poinsot, Neue Theorie der Drehung der Körper. Deutsch von Schellbach. Berlin 1854.

des Flaschenzugs nur die Bedeutung der Veranschaulichung eines von vornherein feststehenden Princips.

Wollte man dem Princip der Zusammensetzung der Kräfte seinen abstractesten Ausdruck geben, so würde dasselbe offenbar lauten können: »Wenn Kräfte auf einen Punkt oder auf ein System fest verbundener Punkte wirken, so combiniren sich die von den einzelnen Kräften erzeugten Geschwindigkeiten nach den nämlichen Gesetzen, nach welchen die denselben entsprechenden Raumgrössen rein geometrisch combinirt werden können.« Da auf diesem Princip alle einzelnen Sätze über Kräftezusammensetzung beruhen, so ist es begreiflich, dass es der Willkür überlassen bleibt, welchen der letzteren man zur Lösung der statischen und dynamischen Aufgaben, bei denen Kräfteverbindungen in Betracht kommen, verwenden will. So kann man entweder den Satz vom Kräfteparallelogramm zur Grundlage nehmen, indem man denselben zur Ableitung des Hebelgesetzes und der Zusammensetzung von Drehungen benutzt, um ihn durch diese Erweiterungen auf alle Fälle anwendbar zu machen; oder man kann von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgehen, welches selbst schon eine hinreichend allgemeine Form besitzt und daher die Ableitung derartiger Folgesätze entbehrlich macht.

### e. Die phoronomischen und die dynamischen Voraussetzungen der Mechanik.

Der allgemeine, in allen einzelnen Sätzen über die Zusammensetzung von Kräften zur Geltung kommende Grundsatz, dass die Zusammensetzung einzig und allein durch die geometrischen Eigenschaften der erzeugten Bewegungen bestimmt wird, gestattet es, alle hier in Rede stehenden Principien unter einem veränderten Gesichtspunkte zu betrachten. Es wird nämlich bei allen Problemen über Kräftezusammensetzung von den Kräften selbst völlig abstrahirt werden können, und es werden dann die betreffenden Sätze eine rein phoronomische Gestalt annehmen, indem sie lediglich die allgemeinsten Gesetze über die Zusammensetzung von Bewegungen enthalten. In der That ist schon um desswillen diese phoronomische Gestaltung der Principien die allein correcte Form, weil die veranschaulichenden Beweise für dieselben lediglich phoronomischer Art sind, so dass die Einführung des Kraftbegriffs hier eine überflüssige Rolle spielt.

Dies führt uns auf denjenigen Punkt, in dem die systematische Gestaltung, welche die Mechanik bei Lagrange gefunden, ungenügend geblieben ist. Er betrifft die logische Scheidung der verschiedenen Gebiete der Mechanik nach den in ihnen vorausgesetzten Grundbegriffen, eine Scheidung, welche von ungleich grösserer Wichtigkeit ist als die alte Trennung in Statik und Dynamik, da diese beiden in ihrer neueren Entwicklung durchaus die nämlichen Grundbegriffe zur Anwendung bringen. Mit Rücksicht hierauf hat bereits in einzelnen Darstellungen der Mechanik eine

Gliederung Platz gegriffen, welche in der That bestimmt zu sein scheint, an die Stelle jener älteren Eintheilung in Statik und Dynamik zu treten: die Gliederung nämlich in Phoronomie (oder Kinematik) und Dynamik. Von ihnen hat sich die erstere mit den Gesetzen der Bewegung als solcher zu beschäftigen, abgesehen also von den Ursachen, welche Bewegungen erzeugen, und von den physischen Eigenschaften der Körper, an denen sie stattfinden*). Die Phoronomie in diesem Sinne ist eine der Geometrie nahe verwandte Disciplin; auch sie bezieht sich nur auf reine Anschauungen, sie fügt aber zu den geometrischen Grundbegriffen den der Bewegung hinzu. Auf diesem letzteren Umstande beruht ihre Selbständigkeit, welche in der Existenz besonderer phoronomischer Axiome ihren Ausdruck findet. Diese Axiome, zu denen neben dem Satz von der Relativität der Bewegung vor allem das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen gehört, haben gleich den geometrischen Axiomen eine anschauliche Gewissheit, d. h. ihre Richtigkeit kann nur durch den unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung festgestellt werden. (Vgl. Bd. I, S. 523.) Die Dynamik dagegen, von welcher die Statik nur einen Theil bildet, setzt ausser den phoronomischen Begriffen noch die beiden Begriffe der Kraft und der Masse voraus. Auf diese Begriffe beziehen sich zwei andere Fundamentalgesetze der Mechanik, welche darum als specifisch dynamische Axiome bezeichnet werden können, das Beharrungsgesetz und der Satz von der Gleichheit der Action und Reaction. Aus ihnen und aus den phoronomischen Axiomen können die andern dynamischen Principien, insbesondere die verschiedenen Erhaltungsprincipien abgeleitet werden. Dies schliesst übrigens nicht aus, dass sich für einzelne der letzteren, wie namentlich für den Satz von der Erhaltung der Energie, selbständige, wenn auch keine zwingenden Gründe der Evidenz in denjenigen Eigenschaften vorfinden, welche der materielle Substanzbegriff der Raumanschauung entlehnt. Während die phoronomischen Axiome ausschliesslich der Vorstellungen des Raumes und der Bewegung bedürfen, stützen sich die dynamischen Grundsätze ausser auf diese auch noch auf den Causal- und Substanzbegriff. So lässt sich das Beharrungsgesetz geradezu als Corollarsatz des Causalgesetzes auffassen, sobald man die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Substanz als gegeben annimmt. Die übrigen dynamischen Axiome aber gehen aus den phoronomischen Grundsätzen hervor, sobald man in sie den Causal- und Substanzbegriff mit den näheren Bestimmungen einführt, die sie durch das Zusammenwirken der Erfahrung und der Postulate der reinen Anschauung gewonnen haben. (Bd. I, S. 555 f.)

---

*) Anfänge einer rein phoronomischen Behandlung finden sich schon bei d'Alembert, der durch seine Skepsis gegenüber dem Kraftbegriff hierzu geführt wurde, namentlich aber bei L. M. N. Carnot. Vgl. dessen Grundsätze der Mechanik vom Gleichgewicht und der Bewegung. Deutsche Ausg. Leipzig 1805.

Die Begriffe von Kraft und Masse enthalten nun aber in der abstracten Fassung, die ihnen die Dynamik giebt, zunächst eine Unbestimmtheit, welche den dynamischen Untersuchungen einen weiten Spielraum sowohl innerhalb wie ausserhalb der concreten Bedingungen des Geschehens lässt. Die Kraft, indem sie lediglich eine Ursache der Bewegung bezeichnet, ist nur durch die phoronomischen Gesetze einerseits und durch die allgemeinen dynamischen Grundsätze anderseits bestimmt. Innerhalb dieser Voraussetzungen ist es aber der Dynamik vollkommen freigestellt, beliebige Annahmen über Grösse und Vertheilung der Kräfte zu machen. Trotzdem bleibt hier der Uebergang zu den concreten physikalischen Problemen stets ein sehr einfacher, weil der Begriff der Kraft selbst in diesen Anwendungen nur specielle Werthe annimmt, sonst aber ungeändert bleibt. Anders verhält es sich mit dem Begriff der Masse. Er enthält an und für sich nur die Vorstellung eines räumlich selbständigen Gebildes, auf welches die Kraft wirkt, und welches dieser Wirkung einen bestimmten messbaren Widerstand entgegensetzt, nach dem die Grösse der Masse geschätzt wird. Hier sind erstens die geometrischen Eigenschaften der Masse unbestimmt gelassen — in der That kann vom Punkt an bis zum beliebig ausgedehnten Körper jedes denkbare geometrische Gebilde auch im dynamischen Sinne als Masse gedacht werden, — sodann aber bleiben, wenn die Masse ausgedehnt ist, hinsichtlich des gegenseitigen Verhältnisses der einzelnen Punkte derselben die verschiedensten Vorstellungen möglich: die Verbindung dieser Punkte kann als eine absolut starre, als eine in einem gewissen Grade verschiebbare, als eine absolut verschiebbare gedacht werden, u. s. w. Es ist naturgemäss, dass die Dynamik gegenüber dieser unbeschränkten Zahl von Möglichkeiten zunächst die einfachste Voraussetzung über die Constitution der Massen macht. Sie besteht in der Annahme, dass der Masse, abgesehen von der in ihrem dynamischen Begriff gelegenen Eigenschaft eines Widerstandes von bestimmter Grösse, nur diejenigen Eigenschaften zukommen, die in ihrer geometrischen Vorstellung enthalten sind. Diese Annahme führt zu der in der Mechanik benützten Fiction absolut starrer, unausdehnsamer und in sich gleichartiger Linien, Flächen und Körper. Nimmt man zu diesen geometrischen Abstractionen die phoronomische Vorstellung der absoluten Beweglichkeit eines gegebenen Punktes hinzu, so entsteht die Annahme eines unausdehnbaren und absolut biegsamen Fadens, wie sie z. B. beim Princip des Flaschenzugs zur Anwendung kommt, oder bei noch allgemeinerer Ausdehnung die Annahme einer körperlichen Masse, deren einzelne Punkte absolut beweglich sind, wie eine solche zur Ableitung der abstracten hydrodynamischen Grundgesetze verwerthet wird*). Diejenige Behandlungsweise der Dynamik nun, welche sich auf den allgemeinen Kraftbegriff beschränkt und in den Begriff der Masse ausschliesslich gewisse mathematische Voraussetzungen von absolutem Cha-

*) Lagrange, Mécan. anal. I, p. 172.

rakter einführt, die in der Natur niemals verwirklicht sind, wollen wir als die abstracte oder mathematische Dynamik bezeichnen. Dagegen wird derjenigen Behandlungsweise, welche gewisse Bestandtheile dieser abstracten Voraussetzungen aufgiebt, um die Probleme den wirklich in der Natur gegebenen Bedingungen zu nähern, der Name der concreten oder physikalischen Dynamik beigelegt werden können. Es ist selbstverständlich, dass die abstracte der concreten Dynamik vorarbeiten muss. Diese würde niemals zu einer Lösung der verwickelteren physikalischen Aufgaben gelangen, wenn sie diese Aufgaben nicht zunächst auf ihre einfachste mathematische Form zurückführte. Aus diesem Grunde vollzieht sich auch der Uebergang von der mathematischen zur physikalischen Dynamik keineswegs mit einem Schritte, sondern successiv werden in die ursprünglich ganz abstracten dynamischen Voraussetzungen limitirende Annahmen eingeführt. Solange man im Gebiete der eigentlichen Mechanik verweilt, verlässt man aber niemals das Gebiet abstracter Betrachtungen. Denn selbst jene limitirenden Annahmen pflegen zunächst schon um der mathematischen Behandlung willen wiederum eine abstracte Form anzunehmen. Unmerklich erweitert sich auf diese Weise die Mechanik zur theoretischen Physik, deren ausgebildetere Theile geradezu als die einzelnen Zweige der concreten Dynamik betrachtet werden können.

## 4. Die allgemeinen Methoden und Hülfsmittel der Naturforschung.

### a. Allgemeiner Charakter der naturwissenschaftlichen Methoden.

Die allgemeinen Methoden der Naturforschung stimmen in allen wesentlichen Punkten überein mit den im ersten Abschnitte geschilderten Methoden der wissenschaftlichen Forschung überhaupt, zu deren Ausbildung jene hauptsächlich beigetragen haben. Die durch die specifische Beschaffenheit der Objecte bedingten Abweichungen aber gehören grossentheils den Einzelgebieten an und werden daher in den folgenden Capiteln zu erörtern sein. So bleibt uns hier nur übrig, auf einige allgemeine, in den gemeinsamen Merkmalen der Naturerscheinungen begründete Eigenthümlichkeiten der Untersuchung hinzuweisen.

Bei jeder Untersuchung unterscheiden wir von den Methoden selbst die Hülfsmittel, deren sich jene bedienen müssen. Während die Methode durchaus nur die logischen Verfahrungsweisen der Untersuchung umfasst, bezieht sich der Begriff eines Hülfsmittels auf die natürlichen oder künstlichen Werkzeuge und Operationen, welche im Dienste der Methode Verwendung finden. Die Analyse und Synthese der Naturerscheinungen, die Induction und Deduction sind Methoden der naturwissenschaftlichen For-

schung; die Beobachtung und das Experiment, die geometrische Construction und die mathematische Analysis sind Hülfsmittel derselben. Alle diese Hülfsmittel können innerhalb jeder der erwähnten Methoden zur Anwendung kommen, wenn auch die einen vorzugsweise für das inductive, die andern für das deductive Stadium der Untersuchung verwerthet werden. So dienen Beobachtung und Experiment zumeist der Induction und Abstraction, aber sie sind anderseits für die Verification und Determination der auf deductivem Wege gefundenen Resultate unerlässlich; die mathematischen Verfahrungsweisen sind die hauptsächlichsten Werkzeuge der naturwissenschaftlichen Deduction, doch kann auch die inductive Methode der arithmetischen und geometrischen Hülfsoperationen nicht entbehren.

Der grosse Vorzug der Naturwissenschaften besteht vor allem in dem reichen Vorrath an Hülfsmitteln, über den sie verfügen. Diese Hülfsmittel haben auf die Methoden selbst zurückgewirkt, deren Ausbildung durch jene gefördert wurde. Das ursprüngliche und fortan für alle Naturforschung unerlässliche Hülfsmittel ist die einfache Sinneswahrnehmung. Mit ihr verbindet sich sodann die Anwendung mannigfacher künstlicher Werkzeuge, welche die physikalische Methodik zur Verfügung stellt, und deren Beschaffenheit nach den speciellen Untersuchungsgebieten sich richten muss. (Vgl. unten Cap. II.) Die durch die Herbeiziehung dieser Hülfsmittel ermöglichte exacte Beobachtung kann nun in doppelter Weise die Erforschung eines Gegenstandes in Angriff nehmen: erstens indem sie in die Eigenschaften desselben oder in den Verlauf der untersuchten Vorgänge willkürlich verändernd eingreift, und zweitens indem sie eine möglichst grosse Zahl übereinstimmender oder analoger Erscheinungen mit einander vergleicht. Auf diese Weise ergeben sich die experimentelle und die vergleichende Beobachtung als die zwei einander ergänzenden methodischen Hülfsmittel der Naturforschung. Beide sind nicht strenge von einander zu scheiden, sondern können sich in der verschiedensten Weise combiniren. Dennoch bringt es das Wesen der experimentellen Methode mit sich, dass sie sich in der Regel mit einer verhältnissmässig kleinen Zahl von Beobachtungen begnügen kann, während umgekehrt, sobald aus irgend welchen Gründen das Experiment unanwendbar ist, eine um so umfassendere Sammlung vergleichender Beobachtungen erfordert wird. Ein erklärendes Verständniss der Naturerscheinungen aber kann fast immer nur dann vermittelt werden, wenn eine willkürliche Variation der Bestandtheile derselben möglich ist, wogegen eine bloss descriptive Auffassung und Ordnung der Gegenstände und Vorgänge meist mit der Vergleichung der unmittelbaren Beobachtungen sich begnügen darf. Die experimentelle Methode ist daher das hauptsächlichste Werkzeug der Naturerklärung, die comparative steht zunächst im Dienste der Naturbeschreibung.

### b. Die experimentelle Methode.

Von der unmittelbaren, nur die natürlichen Sinneswerkzeuge benützenden Beobachtung geht alle Untersuchung der Naturerscheinungen aus. Sobald aber diese unsern willkürlichen Eingriffen zugänglich sind, so verbindet sich die Beobachtung mit dem Experiment. Nachdem das letztere sich ausgebildet hat, wirkt es seinerseits zurück auf die Beobachtung, indem es derselben künstliche Werkzeuge zur Verfügung stellt. Erst durch die Verwendung jener technischen Hülfsmittel, die auf experimentellem Wege entstanden sind, wird die Beobachtung zur exacten Beobachtung. Wie daher das Experiment selbst nichts anderes als eine Beobachtung ist, die von willkürlichen Einwirkungen des Beobachters auf die Erscheinungen begleitet wird, so greifen auch im ganzen Verlauf der Untersuchung beide Hülfsmittel fortwährend in einander ein. Der Beobachter bedient sich der Werkzeuge, die aus experimentellen Untersuchungen hervorgegangen sind, und die auch in solchen Fällen, in denen das Experiment selbst unmöglich ist, wenigstens der Beobachtung eine grössere Sicherheit und Genauigkeit geben sollen. Fast jede bedeutendere Untersuchung fügt ausserdem zu diesem im Laufe der Zeiten allmählich gewaltig angewachsenen Inventar technischer Hülfsmittel neue hinzu, welche die Genauigkeit der Beobachtung unter neuen Bedingungen sicherstellen oder neue Formen experimenteller Einwirkung möglich machen.

Alle Beobachtung ist ursprünglich von zufälligen Wahrnehmungen ausgegangen. Soll sich die Wahrnehmung zur Beobachtung erheben, so muss die wahrgenommene Erscheinung aus irgend einem Grunde unser Interesse erregen. Letzteres ist aber nur dann vorhanden, wenn sich die Aufmerksamkeit auf die Erscheinung mit der Frage nach der Art ihres Eintritts, nach ihrem Verlauf, nach ihrer Beziehung zu andern Vorgängen verbindet. Wer Blitzschlag und Donner hört, hat ein Gewitter wahrgenommen. Wer es beobachten will, wird auf die Form und die räumliche Ausbreitung des Blitzstrahls, die Zeit, die zwischen ihm und dem Eintritt des Donners verfliesst, die Häufigkeit der Blitze, die begleitende Wolkenbildung und ähnliches achten. Mit der Beobachtung beginnt daher schon jene Fragestellung an die Natur, in welcher alle Untersuchung der Naturerscheinungen ihre Quelle hat. Die Beobachtung fordert den höchsten Grad activer Aufmerksamkeit, denn sie will nicht nur die Erscheinung selbst in allen ihren Stadien, sondern auch ihre etwaigen Begleiterscheinungen wahrnehmen. Damit ihr von diesem ganzen Verlauf nichts entgeht, bereitet sich wo möglich, ehe ein Ereigniss eintritt, die Aufmerksamkeit auf dasselbe vor. Darin liegt schon für die fernere Beobachtung ein Impuls, um, wenn es irgend geschehen kann, zum Experimente fortzuschreiten; denn in dem Experiment beherrschen wir in der Regel den Eintritt der Erscheinungen und können ihn daher nun leicht gerade in den Augenblick verlegen, wo unsere Aufmerksamkeit am besten vorbereitet ist.

Fällt aus irgend einem Grunde, etwa weil es sich um ein unerwartetes Ereigniss handelt, jene vorläufige Richtung der Aufmerksamkeit hinweg, so leidet darunter stets die Genauigkeit der Beobachtung, und zwar wird nicht bloss die Bestimmung des Eintritts der Erscheinung, sondern meist auch die Verfolgung des weiteren Verlaufs derselben unsicherer, da die Aufmerksamkeit eine gewisse Zeit braucht, um sich zu sammeln.

Jeder Beobachtung liegt die Frage nach dem Wie der Erscheinungen zu Grunde. Das Ziel der Beobachtung als solcher ist erreicht, wenn sich die Erscheinung in Bezug auf ihren Verlauf und auf die ihn begleitenden Umstände aufs genaueste beschreiben lässt. Das Experiment sucht nun zunächst, indem es den Eintritt der Erscheinungen beherrscht, die Sicherheit der Beobachtung zu vergrössern; vor allem aber schreitet dasselbe, indem es die Bedingungen des Geschehens selber verändert, zu der Frage nach dem Warum der Erscheinungen fort. Nur in seltenen Fällen, unter der Voraussetzung theils einer zureichenden Einfachheit der Vorgänge, theils einer in der Natur von selbst sich darbietenden Variation der Bedingungen, vermag die Beobachtung ohne die Hülfe des Experimentes dieser zweiten Frage näher zu treten. Die Astronomie bietet das hauptsächlichste Beispiel dieser Art dar. Aber auch sie würde wahrscheinlich niemals ihr descriptives Stadium verlassen haben, wären ihr nicht die experimentellen Untersuchungen im Gebiete der irdischen Gravitation zu Hülfe gekommen. Die Kepler'schen Gesetze, in denen alles enthalten ist, was die astronomische Beobachtung der Gravitationstheorie entgegenbrachte, besitzen einen rein beschreibenden Charakter. Das Mittel, durch welches das Experiment jener Frage nach dem Warum näher tritt, besteht in der Isolirung und Variirung der Umstände. Unter ihnen ist es namentlich die erstere, die durch die blosse Beobachtung niemals erreicht werden kann; denn es ist ein kaum zu erwartender und darum nie mit der erforderlichen Regelmässigkeit eintretender Zufall, dass zwei Ereignisse nur in einer unter den zahllosen Bedingungen, die ihren Eintritt begleiten, verschieden sind. Anderseits führt aber die Isolirung der Umstände nothwendig von der blossen Beschreibung der Thatsachen zu der causalen Auffassung derselben. Denn sobald die isolirte Veränderung eines Umstandes regelmässig bestimmte Veränderungen in dem Ablauf der Ereignisse nach sich zieht, so sehen wir uns durch das logische Princip von Grund und Folge genöthigt, jener isolirten Veränderung einen causalen Werth beizulegen. In Wahrheit ist jedoch nicht die causale Betrachtung aus dem experimentellen Verfahren hervorgegangen, sondern sie hat umgekehrt mit Nothwendigkeit zu jener willkürlichen Isolirung und Variirung der Umstände geführt, in welchen das Wesen des Experimentes besteht.

Die Umstände einer Erscheinung werden uns nun stets durch die Beobachtung gegeben. Sie bestehen aus allen den Thatsachen der Beobachtung, welche den Eintritt und Verlauf der Erscheinung begleiten. Der Umstand unterscheidet sich von der Bedingung dadurch, dass die

letztere stets in einer causalen Beziehung zu der untersuchten Erscheinung steht, während solches bei dem Umstande vorläufig dahingestellt bleibt. Es ist gerade die Aufgabe des Experimentes, nachzuweisen, ob und inwiefern irgend ein das beobachtete Ereigniss begleitender Umstand eine Bedingung desselben ist oder nicht. Indem die Umstände isolirt und variirt werden, erweist sich ein Theil derselben als gleichgültig, ein anderer als wesentlich für den Eintritt eines Ereignisses, und durch die weitere Anwendung jener Verfahrungsweisen wird dann die specielle Beziehung ermittelt, in der die einzelnen Umstände zu den verschiedenen Theilen der Erscheinung stehen. Hier sind es die früher erörterten allgemeinen Regeln der inductiven Methode, welche dem Experimente den Weg zeigen. (Abschnitt I, S. 22 f.)

Eine gewisse Einschränkung erfährt die experimentelle Methode nothwendig dadurch, dass nur die Gegenstände unserer Umgebung derselben unmittelbar zugänglich sind. Gleichwohl überschreitet sie gelegentlich diese Grenzen, indem sie, statt die untersuchten Erscheinungen selbst, andere, die ihnen ähnlich oder künstlich nachgebildet sind, willkürlichen Einwirkungen aussetzt. So bildet man bei dem Plateau'schen Versuch die Bedingungen, unter denen muthmasslich die Abplattungen der Planeten nebst dem Ringsystem des Saturn entstanden sind, künstlich nach, indem man eine Oelkugel in einem Gemisch gleicher specifischer Schwere durch Drehung einer Kurbel in schnelle Rotation versetzt*). G. Bischof zeigte durch Schmelzen einer Basaltkugel, deren Temperaturverhältnisse er mehrere Stunden nach dem Gusse untersuchte, dass das Gesetz, nach welchem die Temperatur des Erdinnern mit der Tiefe zunimmt, der Annahme eines dereinst feuerflüssigen Zustandes entspricht**). Durch spektroskopische Versuche mit bekannten irdischen Körpern sucht man über die physische Constitution der Gestirne Aufschluss zu gewinnen oder durch chemische Versuche im kleinen unter Anwendung physikalischer Hülfsmittel, wie höherer Druck- und Temperaturgrade, die Bedingungen für die einstige Bildung gewisser Gesteine zu ermitteln***), u. s. w. Diese indirecten Experimente im Gebiet der Astrophysik und Geologie sind natürlich von um so grösserem Werthe, je mehr es gelingt, die Bedingungen des Versuchs denjenigen der wirklichen Erscheinungen ähnlich zu machen. Aber da dies niemals vollständig möglich ist, weil wir in unsern Laboratorien über die Massen und die Kraftgrössen, die bei den zu erklärenden Erscheinungen vorkommen, nicht verfügen können, so sind die Ergebnisse immer bis zu einem gewissen Grade hypothetisch. Sie bleiben dies namentlich dann, wenn solche indirecte Versuche unmittelbar zur inductiven Erforschung gewisser Naturerscheinungen verwendet werden, wie z. B. bei der Erforschung der physischen Constitution der Gestirne oder der geologischen

*) Plateau, Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II, 1848, S. 249.

**) Naumann, Lehrbuch der Geognosie, 2. Aufl., I, S. 54 f.

***) A. Daubrée, Experimentalgeologie. Deutsche Ausgabe, S. 12 f.

Bedingungen bei der Entstehung von Mineralien. Günstiger ist es, wenn das indirecte Experiment, im Dienste der Deduction stehend, bloss zur Bestätigung von Ergebnissen dient, die aus anderweitigen Voraussetzungen abgeleitet sind, wie z. B. bei den Versuchen von Plateau und Bischof. Dagegen besitzt es in diesen Fällen insofern einen geringeren Werth, als die Sätze, die es bestätigt, häufig schon ohne dasselbe eine zureichende Sicherheit besitzen, so dass es sich manchmal sogar, wie bei dem Plateau-schen Experiment, mehr um eine sinnreiche Veranschaulichung als um einen wirklichen Beweis handelt. In Folge dieses geringeren Werthes indirecter Experimente wird in allen den Gebieten, in welchen sie vorkommen, eine ungleich grössere Betheiligung der comparativen Methode erforderlich als in den eigentlichen Experimentalgebieten. So sind insbesondere die Astrophysik, Geologie und Meteorologie zunächst vergleichende Beobachtungswissenschaften, die nur für gewisse Fundamentalfragen die experimentelle Methode in ihrer indirecten Anwendung zur Ergänzung herbeiziehen. Zugleich gehört dabei immer das experimentelle Verfahren selbst andern Gebieten, nämlich der Physik oder Chemie, an und wird daher in seiner Durchführung von den hier gültigen Principien geleitet; immerhin gewinnt es durch die besonderen Probleme jener vergleichenden Wissenschaften einen eigenartigen Charakter. Die isolirende Abstraction, welche in den grundlegenden Disciplinen vorwaltet, wird hier wieder aufgehoben, indem man untersucht, wie sich unter bestimmten complexen, von mehreren Naturkräften gleichzeitig abhängigen Bedingungen bestimmte Einzelerscheinungen verhalten. Trotz der aushülfsweisen Anwendung der hierbei vorkommenden Experimente bilden diese übrigens einen äusserst charakteristischen Bestandtheil der oben genannten vergleichenden Wissenschaften; denn sie legen ein sehr beredtes Zeugniss dafür ab, dass die Aufwerfung bestimmter Causalprobleme mit unwiderstehlicher Gewalt zur Anwendung der experimentellen Methode drängt, so dass diese in solchen Fällen selbst da sich Anerkennung verschafft, wo ihrer unmittelbaren Anwendung unwiderstehliche Hindernisse im Wege stehen.

### c. Die vergleichende Methode.

Jede Beobachtung, die darauf ausgeht, die Naturerscheinungen in ihrem Zusammenhange aufzufassen, bedarf der Vergleichung, der Verbindung des Aehnlichen und der Unterscheidung des Widerstreitenden, wie es überall schon den einfachen Methoden der Analyse und Synthese, der Abstraction und Determination zu Grunde liegt. In diesem Sinne ist die Vergleichung ein unerlässlicher Bestandtheil auch des experimentellen Verfahrens. Dagegen reden wir von einer Anwendung der vergleichenden Methode nur da, wo die Vergleichung zum logischen Princip der Methode wird. Wie also der Schwerpunkt des Experimentes in der willkürlichen Abänderung der Erscheinungen liegt, so besteht das Wesen des vergleichenden Ver-

fahrens darin, dass die vergleichende Beobachtung, die Sammlung übereinstimmender Erscheinungen und die Abstufung der nicht übereinstimmenden nach den Graden ihres Unterschieds, zur Gewinnung allgemeiner Ergebnisse benützt wird. Auf diese Weise angewandt ergänzt die vergleichende Methode die experimentelle in doppelter Hinsicht: erstens ist jene bei allen denjenigen Gegenständen anwendbar, welche dieser unzugänglich sind, und zweitens dient überall da, wo eine Verbindung beider möglich ist, die vergleichende Beobachtung zur Ausfüllung der Lücken des experimentellen Verfahrens. Beide zusammen erschöpfen aber die allgemeinen Formen naturwissenschaftlicher Methodik. Willkürliche Veränderung der Erscheinungen und vergleichende Beobachtung derselben in den Verhältnissen, in denen sie unmittelbar uns gegeben sind, bilden zusammen die einzig möglichen Hülfsmittel einer wissenschaftlichen Bearbeitung der Natur.

Da die experimentelle Methode in ungleich höherem Grade geeignet ist, die causalen Bedingungen der Erscheinungen zu erforschen, so steht sie überall, wo sie überhaupt anwendbar ist, in erster Linie. Ihr aber tritt die vergleichende Methode in doppelter Weise ergänzend zur Seite: erstens indem sie die Probleme für die experimentelle Behandlung vorbereitet, durch die Sammlung einer genügenden Anzahl zusammengehöriger exacter Beobachtungen, und zweitens indem sie die experimentellen Resultate ergänzt, durch die Anwendung derselben auf eine grosse Anzahl einzelner der Beobachtung gegebener Erscheinungen. So hat die Astronomie von ihren frühesten Anfängen an bis auf Kepler die vergleichende Methode in bloss vorbereitender Weise benützt. Noch die Kepler'schen Gesetze, mit denen diese Periode abschliesst, bestehen nur in Verallgemeinerungen der durch die Vergleichung erzielten Ergebnisse. Das zweite Stadium beginnt mit Newton's Gravitationstheorie, die eine causale Interpretation der Kepler'schen Gesetze an der Hand der Fallversuche Galilei's giebt. Seitdem dient die vergleichende Methode zur Vervollständigung und feineren Ausarbeitung der auf die Gravitationstheorie gegründeten Mechanik des Himmels. Die Astronomie bildet zugleich für diese letztere Form der Anwendung ein besonders günstiges Beispiel, weil sie die einzige Wissenschaft ist, in welcher, obgleich sie ein directes Experiment nicht zulässt, dennoch die Resultate der Vergleichung einen experimentellen Werth gewinnen. Diese günstige Lage verdankt die Astronomie zwei Umständen: der relativ grossen Einfachheit der Erscheinungen und der Existenz des Mondes. Wäre unserer Erde nicht dieser fortwährend gegen sie fallende Trabant beigegeben, der sich unmittelbar mit den zu irdischen Fallversuchen verwendeten Körpern vergleichen lässt, so würde die Gravitationstheorie für immer eine unverificirbare Hypothese geblieben sein. In der That fehlt in den meisten andern Fällen, wo die Wissenschaft auf die vergleichende Methode angewiesen ist, diese unmittelbare Bestätigung; doch kann auch dann bald mittelst der Anwendung bekannter physikalischer Thatsachen, bald durch indirecte Experimente, bald auch durch die blosse Benützung der Ver-

gleichungsresultate zur Hypothesenbildung eine theoretische Anschauung gewonnen werden, welche einen ähnlichen Umschwung in der Benützung der comparativen Methode herbeiführt. So ist Dove zu seinem Drehungsgesetz der Winde zunächst bloss durch statistische Beobachtungen geführt worden; er hat es dann aber durch die rein theoretische Erwägung der Wechselwirkungen zwischen der Erdrotation und den durch Temperaturdifferenzen verursachten Luftströmungen in ein meteorologisches Grundgesetz umgewandelt, welches nun wieder umgekehrt die Beurtheilung der Windbeobachtungen leitet. So ist ferner Kirchhoff bei seiner Theorie des Sonnenspektrums von den seit Fraunhofer vielfach ausgeführten Beobachtungen über die dunkeln Linien ausgegangen, mit denen er experimentelle Untersuchungen über die Spektra irdischer Elemente verband; hierauf ist aber die vergleichende Beobachtung des Sonnenspektrums wiederum von dieser Theorie geleitet worden. Dagegen hat Darwin's Theorie der organischen Entwicklung auf keinerlei allgemeingültige Gesetze oder indirecte Experimente von entscheidender Bedeutung sich stützen können, sondern sie war genöthigt, ausschliesslich auf die Resultate der comparativen Methode selbst eine Hypothese zu bauen, die sie dann den weiteren vergleichenden Untersuchungen zu Grunde legte. Desshalb ist nun aber auch die so entstandene Theorie selbstverständlich dem Angriffe ausgesetzt, und es fehlt namentlich an den geeigneten Hülfsmitteln zur Bestätigung oder Widerlegung der speciellen Voraussetzungen, welche in sie eingehen. Unter solchen Umständen ist es begreiflich, wenn manche Forscher es vorziehen, vorläufig überhaupt auf eine theoretische Verwerthung der durch die Vergleichung festgestellten Thatsachen zu verzichten. Es entsteht dann eine rein beschreibende Form der Wissenschaft, wie sie überall, selbst in der Astronomie, der Erklärung voranging, namentlich aber auf solchen Gebieten längere Zeit bestehen blieb, denen die Hülfe des Experimentes gänzlich versagt ist.

In den beiden oben geschilderten Stadien der vergleichenden Methode, die durch das Auftreten einer bestimmten, meist auf experimentellem Wege vermittelten theoretischen Anschauung sich scheiden, ist zwar die Verwerthung der Ergebnisse eine abweichende; der logische Charakter der Methode selbst bleibt aber der nämliche. Er besteht im allgemeinen überall in der oben schon hervorgehobenen Sammlung übereinstimmender Erscheinungen und in der Abstufung der nicht übereinstimmenden nach den Graden ihres Unterschieds. In dieser Beziehung stimmen die Vorschriften, welche Baco in seinem neuen Organon für die naturwissenschaftliche Forschung überhaupt aufstellt, am meisten mit dem Bild der vergleichenden Methode überein. Denn die Thatsache, dass jede Vergleichung aus der Verbindung des Uebereinstimmenden und der Trennung des Verschiedenen besteht, findet in Baco's Tafeln der positiven und negativen Instanzen ihren Ausdruck. Freilich aber wird die Vergleichung von vornherein allzu sehr von bestimmten allgemeinen, durch vorangegangene

Analyse und Abstraction entstandenen Gesichtspunkten geleitet, als dass übereinstimmende und unterscheidende Beobachtungen in der Baconischen Weise systematisch sich trennen liessen; und die weiteren Vorschriften, die Baco in seinen Tafeln der Grade und prärogativen Instanzen zusammenstellt, enthalten ein buntes Gemisch von Gesichtspunkten, die theils unter die comparative, theils unter die experimentelle Methode gehören. Vollends verschoben wurde das Verhältniss dieser beiden Methoden durch diejenigen neueren Logiker, welche nach Baconischem Vorbild Regeln des experimentellen Verfahrens aufzustellen suchten und dazu nun vorzugsweise die Instanzen der Uebereinstimmung und Unterscheidung benützten. Es konnte nicht fehlen, dass darüber die charakteristischen Eigenthümlichkeiten des experimentellen Verfahrens, wie sie besonders in der physikalischen Induction zur Ausbildung gelangt sind, völlig verloren gingen. (Vgl. unten Cap. II.) Aber auch die comparative Methode wird durch die Baconischen Regeln in unzureichender Weise bestimmt. Weit bedeutsamere Anwendungsformen als in der Uebereinstimmung und Unterscheidung, die überall sich begleitende Denkacte und eben darum nicht besondere Methoden sind, begegnen uns in den Formen der individuellen und der generischen Vergleichung. Beide schliessen zum Theil an die Arten der Abstraction, die isolirende und die generalisirende, sich an, und beide stehen zu einander in einem ähnlichen Verhältniss wie diese: die individuelle muss überall der generischen Vergleichung vorausgehen, aber sie besitzt ausserdem eine selbständige Bedeutung.

Die individuelle Vergleichung sammelt nämlich die Beobachtungen, die irgend ein einzelner Gegenstand oder eine einzelne Naturerscheinung in Bezug auf sämmtliche coëxistirende Bestandtheile und auf einander folgende Zustände darbietet, um auf diese Weise ein vollständiges Gesammtbild des Beobachtungsobjectes zu gewinnen. Analyse und Synthese, Isolation und Colligation kommen hierbei als logische Hülfsmethoden zur Anwendung. Die generische Vergleichung dagegen verwerthet Beobachtungen, die von verschiedenen, jedoch zusammengehörigen Gegenständen oder Erscheinungen gewonnen sind, und ordnet dieselben nach den mit einander verwandten Erscheinungsgebieten. Ihr Zweck ist, auf diesem Wege ein vollständiges Bild der mannigfachen Gestaltungen zu gewinnen, in denen eine Theilerscheinung oder ein einzelnes Merkmal eines Objectes auftreten kann, und von den begleitenden Umständen Rechenschaft zu geben, unter denen solche Variationen vorkommen. Neben der Analyse und Synthese, der Isolation und Colligation werden hier noch die Generalisation und Specification als elementare Methoden herbeigezogen, und häufiger als bei der individuellen Vergleichung befähigt die Prüfung der Beobachtungen zur Ausführung mehr oder minder umfassender Inductionen. Demnach dient die individuelle Vergleichung mehr der reinen Beschreibung, und sie gehört dem vorbereitenden Stadium der Untersuchung an; die generische Vergleichung kann zwar ebenfalls noch auf dem descrip-

tiven Standpunkte verbleiben, es liegt aber in ihr stets die Tendenz, denselben zu überschreiten und zum Versuch einer Erklärung der Erscheinungen zu gelangen, worauf dann in der Anwendung der comparativen Methode der oben bezeichnete Wendepunkt eintritt.

In Folge dieser Beziehung der beiden Formen der Vergleichung zu den logischen Functionen der Beschreibung und Erklärung bilden nun aber beide nicht bloss auf einander folgende Stadien einer und derselben Methode, sondern es kann auch zu bestimmten wissenschaftlichen Zwecken die eine oder die andere bevorzugt werden, ohne dass dabei freilich jemals eine vollständige Trennung durchführbar ist. Es sind besonders die so genannten descriptiven oder systematischen Naturwissenschaften, in welchen so die individuelle Vergleichung überwiegt, während die generische bloss insoweit herbeigezogen wird, als es zu den Zwecken der Classification erforderlich ist. Dennoch zeigt es sich gerade hier, dass die blosse Beschreibung das wissenschaftliche Bedürfniss nicht auf die Dauer befriedigt. Im Zusammenhange mit der früher (Abschnitt I, S. 43 f.) geschilderten Entwicklung der Systematik, welche an die Stelle der descriptiven genetische Classificationen treten liess, sind daher den auf dem Boden der individuellen Vergleichung stehenden Wissenschaftsgebieten andere zur Seite getreten, in denen die generische Vergleichung vorherrscht. So haben sich neben der Zoologie und Zootomie die vergleichende Anatomie, neben der Botanik die allgemeine Morphologie der Pflanzen, neben der Mineralogie die Geognosie erhoben. Das jüngere Alter der an zweiter Stelle genannten Disciplinen zeigt, wie selbst in der allgemeinen Entwicklung der Wissenschaft die generische der individuellen Vergleichung nachfolgt. Zugleich ist aber hier überall zu bemerken, dass es immer nur um ein Uebergewicht der einen oder andern Methode sich handeln kann, da beide auf das innigste in einander eingreifen. So sucht die Zootomie von jeder Gattung oder Familie des Thierreichs ein vollständiges anatomisches Bild zu gewinnen, und sie beschränkt sich zu diesem Zweck nicht selten auf die Auswahl einer oder mehrerer charakteristischer Species, an denen sie die Untersuchung ausführt. Die vergleichende Anatomie dagegen verfolgt eine und dieselbe Organgruppe wo möglich durch das ganze Thierreich oder mindestens durch eine grössere Anzahl verwandter Thierclassen, um die verschiedenen Entwicklungsformen derselben nachzuweisen. Dort waltet also die individuelle, hier die generische Methode vor. Aber der Zootom kann offenbar bei der Anordnung der von ihm untersuchten Formen ebenso wenig der letzteren wie der vergleichende Anatom bei der Einzeluntersuchung, der er das Material für seine allgemeineren Vergleichungen entnimmt, der ersteren entbehren. Alles dies weist darauf hin, dass auch die Zwecke dieser Wissenschaften, die Beschreibung der Naturobjecte und die Erklärung ihrer Entstehung, höchstens vorübergehend von einander getrennt werden können.

### d. Naturbeschreibung und Naturerklärung.

Beschreibung und Erklärung sind zwei Functionen, die in keiner naturwissenschaftlichen Untersuchung und Darstellung entbehrt werden können. Es liesse sich ihnen, der dritten Grundform des Urtheils entsprechend, auch die Erzählung noch anschliessen. (Bd. I, S. 161.) Aber die in der Zeit verlaufenden Naturereignisse fordern, sobald sie unserer eigenen Beobachtung sich darbieten, unmittelbar eine causale Erklärung heraus; gehören sie dagegen einer entfernten Vergangenheit an, so lässt sich auf sie nur aus einer Reihe von Momenten zurückschliessen, die zunächst durch die Beschreibung festgehalten werden müssen. Mit Rücksicht auf diese letztere Verbindung sind daher lange Zeit die Namen Naturgeschichte und Naturbeschreibung in fast übereinstimmender Bedeutung gebraucht und der Naturerklärung gegenübergestellt worden.

Ohne Zweifel wird nun auch diese Trennung eine gewisse praktische Bedeutung behalten, da es fortan Gebiete der Naturwissenschaft geben wird, in denen, wie z. B. in der Geographie, in der systematischen Mineralogie, Botanik und Zoologie, die Function der Beschreibung vorherrscht. Aber als eine principielle Unterscheidung ist jene Trennung nicht aufrecht zu erhalten. Jede Naturwissenschaft hat schliesslich die Aufgabe der Erklärung, und keine kann hierbei der Hülfe der Beschreibung entbehren. Theils dient die letztere als Vorbereitung für die causale Interpretation der Erscheinungen, theils sucht sie auf Grund einer solchen die Erkenntniss der einzelnen Naturobjecte zu vermitteln. In diesem Sinne bestehen insbesondere die systematischen Naturwissenschaften, sobald sie die Stufe der genetischen Classification erreicht haben, lediglich in Anwendungen der ihnen entsprechenden erklärenden Zweige der Naturlehre auf die Einzelerscheinungen, und sie suchen aus diesen das Material zu vervollständigen, mittelst dessen eine Einsicht in die Entstehung der Objecte ermöglicht wird. Treffend weist der Name »Naturgeschichte« auf diese Aufgabe der systematischen Naturwissenschaften hin: sie sollen nicht bloss einen Ueberblick verschaffen über die Fülle der Naturgegenstände, sondern über deren Entstehungs- und Entwicklungsbedingungen Rechenschaft geben, und die Principien der Systematik sollen daher zugleich Erklärungsgründe der Objecte selbst sein.

Im Gegensatze zu diesem in der Geschichte deutlich hervorgetretenen Streben, die Naturbeschreibung der Naturerklärung dienstbar zu machen, hat man nun zuweilen auch umgekehrt geglaubt, eine einheitliche Auffassung der wissenschaftlichen Aufgaben dadurch herbeiführen zu können, dass man diese überall auf die exacte Beschreibung der Erscheinungen beschränkte. Nicht bloss August Comte suchte hierdurch jenen Verzicht auf alle über das Thatsächliche hinausgehenden Voraussetzungen zu erreichen, den sein Positivismus verlangte, sondern innerhalb der exacten Wissenschaften selbst hat das Streben, thunlichst exact zu sein, ähnliche Anschauungen begünstigt. Schon der Mechanik wurde so die Aufgabe

gestellt, »die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben«*). Trotzdem beginnt diese Darstellung der Mechanik nicht bloss mit dem mathematischen Punkt, der nirgends in der Natur vorkommt, sondern sie zerlegt auch sofort die Geschwindigkeit in drei Componenten nach den Richtungen des Raumes und führt den Begriff der bewegenden Kraft ein; sie operirt also, statt die Erscheinungen zu beschreiben, mit Abstractionen und Constructionen, von denen die letzteren bereits die allgemeinsten Bewegungsgesetze voraussetzen, und sie vermeidet nicht einmal den logischen Hülfsbegriff der Naturerklärung, der einer rein descriptiven Auffassung der Dinge völlig fremd bleibt, den Kraftbegriff. Es scheint, dass hier, wie in andern Fällen, die skeptische Tendenz aus einer dunkeln Furcht vor metaphysischen Gespenstern entsprungen ist. Man meint, die Naturerklärung wolle irgend etwas Unsagbares, was in keiner Erfahrung entdeckt werden könne, entschleiern; und in Wahrheit bezweckt sie doch nichts anderes, als die regelmässigen Relationen festzustellen, die zwischen den Erscheinungen stattfinden, und zu deren Ausdruck sich der Causalbegriff als das einfachste Hülfsmittel darbietet. Nun lässt sich natürlich jede Relation von Erscheinungen auch in die Form einer Beschreibung bringen, wenn man der letzteren die Bemerkung beifügt, dass die beschriebene Relation eine ausnahmslos gültige sei. Aber dieser Zusatz selbst ist eben keine Beschreibung mehr, und das Wort Naturerklärung soll gar nichts anderes ausdrücken als die Feststellung der regelmässigen Beziehungen, welche sich durch die experimentelle und vergleichende Untersuchung zwischen den Objecten der Beschreibung ergeben. Da aber auf dem Streben, die gegebenen Thatsachen nach ihren wechselseitigen Beziehungen in einen logischen Zusammenhang zu bringen, alle Wissenschaft beruht, so ist auch die Naturwissenschaft nur insoweit eigentliche Wissenschaft, als sie bestrebt ist, Naturerklärung zu sein.

Dieser Aufgabe kommt nun die Naturwissenschaft nach, indem sie die Hülfsmittel der Analyse und Synthese, der Induction und Deduction in den besonderen Modificationen anwendet, welche durch den Charakter der Erscheinungen in den Hauptgebieten der Naturforschung gefordert werden. In dieser Beziehung sondern sich namentlich drei Gebiete von einander: die Physik, Chemie und Biologie. Die logische Methodenlehre kann sich auf die Betrachtung der Methoden, Hülfsmittel und leitenden Principien dieser drei Fundamentalwissenschaften beschränken, da in den specielleren Theilen der Naturerklärung keine wesentlich neuen Gesichtspunkte zur Geltung kommen. Hinsichtlich der systematischen Principien der Naturforschung aber darf hier auf die allgemeine Erörterung der Formen der systematischen Darstellung verwiesen werden.

*) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig 1876. Vorl. I.

## Zweites Capitel.

# Die Logik der Physik.

## 1. Die physikalischen Methoden.

### a. Die Analyse der Naturerscheinungen.

Die physikalische Untersuchung entspringt überall aus der Wahrnehmung bestimmter Naturerscheinungen. Sobald diese in ihrer eigenen Beschaffenheit oder in ihrem Zusammenhang mit andern Erscheinungen Eigenschaften darbieten, welche zu irgend einer Fragestellung Anlass geben, so ist damit auch der erste Antrieb zu einer Zergliederung gegeben, welche die Absicht verfolgt, die zusammengesetzte Erscheinung auf ihre einfachen Bestandtheile zurückzuführen. Diesen allgemeinen Ausgangspunkten der physikalischen Forschung entsprechend können die nächsten Anlässe derselben doppelter Art sein. Entweder wird sie durch zufällige Wahrnehmungen oder durch Resultate, die verwandten Erfahrungen entnommen sind, angeregt und zugleich in ihrer Richtung bestimmt. Im ersten Fall pflegt auch die Untersuchung zunächst den Charakter des Zufälligen an sich zu tragen; sie wird, ehe sie selbst bereits zu einigen Resultaten geführt hat, mehr durch ein instinctives Tactgefühl als durch einen bestimmten Plan geleitet. Im zweiten Fall ist dieser Plan, in seinen allgemeinsten Zügen wenigstens, durch die anderwärts gewonnenen Ergebnisse vorgezeichnet, und er ist darum auch um so bestimmter, je nähere Beziehungen die sich beeinflussenden Untersuchungsgebiete zu einander besitzen. Im Beginn der wissenschaftlichen Entwicklung ist natürlich die erste Entstehungsweise der Probleme vorherrschend. Mit der Ausbildung der physikalischen Forschung nehmen die Motive der zweiten Art immer mehr zu; doch hören jene zufälligen Anlässe niemals ganz auf: wo sie nicht mehr völlig neue Untersuchungsgebiete eröffnen können, da lassen sie wenigstens neue Gesichtspunkte und Methoden entstehen. Die durch den Luftzug bewegten Kronleuchter im Dom zu Pisa veranlassten, wie man erzählt, Galilei zuerst, über die Gesetze der Bewegung nachzudenken. Die Beobachtung, dass ein starker und ein schwacher Schall in der nämlichen Zeit in der Entfernung zu hören waren, brachte Gassendi auf den Gedanken, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in der Luft zu messen. Auf das Phänomen der Beugung des Lichtes wurde Grimaldi durch die Wahrnehmung der Verbreiterung des Schattens und seiner farbigen Säume aufmerksam gemacht*). Zuweilen ist es auch nur eine specielle Problemstellung, die auf solche Weise angeregt wird. So berichten die Gebrüder Weber, dass ihre Untersuchungen über Wellenbewegung in

*) Fischer, Geschichte der Physik, I, S. 41 u. 471; II, S. 103.

Folge einer Beobachtung geplant wurden, die einer von ihnen machte, als er durch einen Papiertrichter Quecksilber goss und dabei die verwickelte, aber regelmässige Figur bemerkte, die der auslaufende Strahl auf der Quecksilberoberfläche verursachte*).

In einen gewissen Gegensatz zu diesen durch die nicht beabsichtigte Wahrnehmung entstandenen Ausgangspunkten der Untersuchung treten nun jene Fälle, wo die Thatsachen erst aufgesucht werden, an welche die weitere Analyse anknüpfen soll, und wo daher zur Vermuthung derselben irgend eine Voraussetzung geführt hat, die auf bereits gewonnene Resultate sich stützt. Dabei können freilich Voraussetzung wie Vermuthung die verschiedensten Grade der Klarheit und Bestimmtheit besitzen, so dass in manchen Fällen kaum ein Unterschied von der zufälligen Entdeckung zu bestehen scheint, während in andern eine präcise Voraussage von vornherein den Gang der Untersuchung regelt. So hat man häufig Oersted's Entdeckung der Wirkung des galvanischen Stromes auf die Magnetnadel als eine zufällige bezeichnet. Dennoch hat Oersted selbst gegen diese Behauptung protestirt, und gewiss mit Recht, obgleich die ihn leitenden naturphilosophischen Vermuthungen sehr vager Natur waren, und daher das Gelingen des Versuchs immerhin der Gunst des Zufalls bedurfte. Denn je unbestimmter eine Vermuthung ist, um so leichter wird natürlich die Aufsuchung der vermutheten Thatsache zu einem unsichern Umhertasten, welches dann in um so höherem Masse Geduld und Ausdauer von Seiten des Beobachters erfordert. In dieser Beziehung ist Faraday ein hervorragendes Beispiel glücklicher Begabung. Keine seiner Entdeckungen verdankt ihren Ursprung dem blinden Zufall. Aber die Voraussetzungen, von denen er ausging, waren meist sehr allgemeiner Art, und er gelangte daher oft erst nach manchen Misserfolgen zu einem günstigen Ergebniss. Seine Entdeckung der magnetoelektrischen Erscheinungen wurde durch den allgemeinen Gedanken geleitet, dass jeder Wirkung eine Gegenwirkung entsprechen müsse. Da der Nachweis erbracht war, dass der elektrische Strom die Fähigkeit besitzt, Eisen und andere des Magnetismus fähige Körper zu magnetisiren, so schloss er, dass umgekehrt auch der Magnet die Eigenschaft besitzen werde, einen elektrischen Strom zu erregen, eine Vermuthung, welche das Experiment vollkommen bestätigte. Noch unbestimmter war der Anlass, dem er die Entdeckung der Wirkung des Magnetismus und galvanischer Ströme auf das polarisirte Licht verdankte. Da ihm die Versuche über elektrische Induction die Annahme wahrscheinlich machten, dass die elektrische und magnetische Fernwirkung, ähnlich der des Schalls und des Lichtes, auf der Fortpflanzung durch ein Medium beruhe, so vermuthete er, dass Elektricität und Magnetismus von Einfluss auf die Lichtbewegung sein würden. Erst als seine Versuche, das gewöhnliche Licht durch einen starken Elektromagneten zu verändern, erfolglos

*) Wellenlehre. Leipzig 1825. Vorrede S. VI.

blieben, nahm er polarisirtes Licht zu Hülfe, das er durch eine Flüssigkeit leitete, und so entdeckte er die magnetische Drehung der Polarisationsebene.

Weit planmässiger kann natürlich von Anfang an die Untersuchung verfahren, wenn aus irgend welchen Gründen sogleich eine präcise Fragestellung möglich ist, welche den Beobachtungen ihre Richtung anweist. Nachdem man längst die Schwingungsknoten tönender Saiten beobachtet und ausserdem bemerkt hatte, dass die Bewegungen leichter Körperchen auf schwingenden gespannten Membranen an verschiedenen Stellen mit sehr verschiedener Energie erfolgen, konnte die Entstehung der von Chladni entdeckten Klangfiguren im allgemeinen mit Sicherheit vorausgesagt werden, wenn auch die einzelnen Formen und Bedingungen dieser Erscheinung erst durch den Versuch festzustellen waren. Nicht minder war den Versuchen Melloni's über die Reflexion, Brechung und Beugung der Wärmestrahlen der Weg vorgezeichnet, da die Probleme durch die entsprechenden Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in vollkommen bestimmter Weise gegeben waren, so dass die Aufgabe hauptsächlich nur noch in der Erfindung der Apparate und Methoden bestand, mit deren Hülfe die Erscheinungen nachgewiesen und gemessen werden konnten.

Wie in den zwei letzten Beispielen von bestimmten Erfahrungen aus andere Erfahrungen, die mit jenen in naher Beziehung stehen, vorausgesagt wurden, so können nun auch aus rein theoretischen Betrachtungen sich Folgerungen ergeben, die auf noch unbekannte Thatsachen hinweisen, deren Bestätigung Aufgabe der Untersuchung wird. Dabei kann dieser Hinweis bald einem wirklichen Beweis gleichkommen, bald bloss die Berechtigung zu Vermuthungen gestatten. So folgerte W. R. Hamilton aus den Voraussetzungen der Undulationstheorie des Lichtes die Thatsache der conischen Refraction durch zweiaxige Krystalle, und Lloyd gelang es sodann, die entsprechenden Erscheinungen am Arragonit experimentell aufzufinden*). Ohm hatte sein Grundgesetz der galvanischen Kette, wonach die Intensität des Stromes der durch die Verschiedenheit der Metalle bestimmten elektromotorischen Kraft direct und dem Strömungswiderstand umgekehrt proportional ist, zunächst als eine Hypothese aufgestellt. Diese Hypothese gab aber exacte Gesichtspunkte für die Untersuchung der Gesetze des Stromes an die Hand, eine Untersuchung, welche zur Bestätigung des Ohm'schen Gesetzes, zugleich aber zu einer genaueren Bestimmung der Begriffe von elektromotorischer Kraft und Widerstand geführt hat**). Aehnlich war der physikalischen Analyse der Klänge durch die mathematische Untersuchung der Klangbewegungen der Weg vorgezeichnet. Da man irgendwie gestaltete regelmässige Schwingungen eines Körpers, einer ge-

*) Poggendorff's Ann., Bd. 28, S. 91.

**) Fechner, Massbestimmungen über die galvanische Kette. Leipzig 1831.

zupften Saite z. B., mathematisch durch eine Sinusreihe darstellen kann, von der sich jedes Glied als Ausdruck einer einfachen pendelartigen Tonbewegung betrachten lässt, so folgerte zuerst Ohm, dass auch der Klang eine Summe einfacher in harmonischen Verhältnissen stehender Töne sei, eine Folgerung, welche sodann von Helmholtz experimentell bestätigt wurde.

Wo die Untersuchung, wie in den zuletzt angeführten Beispielen, von der Folgerung aus andern Erfahrungen oder von bestimmten theoretischen Ergebnissen ausgeht, da ist von selbst auch die Fragestellung gegeben, welche zur Aufsuchung der geeigneten Methode überführt. Wenn dagegen irgend eine zufällige Wahrnehmung oder eine unbestimmte Vermuthung die erste Anregung bietet, so sind stets verschiedene Fragestellungen möglich. Denn jede Naturerscheinung ist zunächst vieldeutiger Art. Sie tritt uns als Glied eines verwickelten Causalzusammenhanges entgegen. Welche unter den Umständen, die den Eintritt der Erscheinung begleiten, für denselben unerlässlich, und welche bloss zufällig, welche die directen und welche die entfernteren oder indirecten Bedingungen sind, alles dies können wir nicht unmittelbar wahrnehmen, sondern zur Entscheidung dieser Fragen bedarf es der planmässigen Untersuchung. Die letztere wird aber um so sicherer ihren Weg gehen, je erschöpfender und geordneter die Fragestellung die einzelnen Aufgaben, welche die Analyse der Erscheinungen bewältigen muss, zum Bewusstsein bringt.

Die einzelnen Fragen, in deren Beantwortung die analytische Untersuchung besteht, können nun entweder vor dem Beginn derselben entwickelt werden, oder sie kommen erst während ihres Verlaufs dem Beobachter zum Bewusstsein. Meistens findet beides zugleich statt: eine Reihe von Fragen erhebt sich sofort bei der Wahrnehmung der Erscheinung, andere ergeben sich im Laufe der Untersuchung, weil sich ihnen entweder erst in Folge der verneinenden Antwort des Experimentes auf die zunächst gehegten Vermuthungen die Aufmerksamkeit zuwendet, oder weil sie erst aus den schon gewonnenen Resultaten hervorgehen. Nach der Natur der auf einander folgenden Fragestellungen zerfällt aber die ganze Untersuchung wieder in zwei Stadien. Eine erste Reihe von Fragen bezieht sich auf die allgemeinen Bedingungen der beobachteten Erscheinung, eine zweite auf die specielleren Eigenschaften und causalen Beziehungen derselben. Das erste Stadium können wir als das der Voruntersuchung, das zweite als das der eigentlichen Untersuchung bezeichnen. Die Beschaffenheit der Aufgaben bringt es mit sich, dass die Voruntersuchung vorzugsweise qualitativer Art ist, während in die eigentliche Untersuchung quantitative Bestimmungen als wesentliche Bestandtheile eingehen; doch ist dieses Kriterium nicht entscheidend, da auch schon in der Voruntersuchung zur Entscheidung einzelner Fragen Messungen erforderlich sein können. Aus den Resultaten der Voruntersuchung gewinnt die eigentliche Untersuchung die Gesichtspunkte für ihre Fragestellungen und

für die Methoden und Hülfsmittel, deren sie sich zur Beantwortung derselben bedienen muss. Die praktische Vorprüfung dieser Methoden und Hülfsmittel pflegt daher ebenfalls noch, und meistens sogar vorzugsweise, der Voruntersuchung zugerechnet zu werden, obgleich sie schon den Uebergang zur definitiven Untersuchung bildet. Beide Stadien unterscheiden sich sehr augenfällig durch die Art der in ihnen herrschenden Fragestellungen. Auf die Fragen der Voruntersuchung wird ein Ja oder Nein als Antwort erwartet. Indem sie eine Reihe möglicher Bedingungen A, B, C..., welche bei einer Erscheinung X wirksam gedacht werden können, durchgeht, zerfällt sie in ebenso viele Einzeluntersuchungen, als solche Bedingungungen in Erwägung gezogen werden. Auf die Fragen, ob A, ob B, ob C eine Bedingung sei oder nicht, haben die successiv geführten Einzeluntersuchungen eine bejahende oder verneinende Antwort zu geben. Fällt die Antwort verneinend aus, so hat die Voruntersuchung ohne weiteres zu einer ferneren Frage überzugehen. Ist sie bejahend, so bildet das Resultat einen Ausgangspunkt für die definitive Untersuchung, die sich entweder sofort oder nach Erledigung weiterer Vorfragen anschliesst. Die letztere kann nun, anknüpfend an die positiven Ergebnisse der Voruntersuchung, zunächst bestätigende Thatsachen aufsuchen, welche jene Ergebnisse völlig sichern sollen. Hier bleibt das Verfahren noch ein ähnliches; der Unterschied besteht nur darin, dass jede Frage schon von einer bestimmten Anschauung über die Natur der beobachteten Erscheinung geleitet, und dass daher eine bestimmte Antwort im voraus erwartet wird. Uebrigens kann auch hier die Fragestellung bald auf eine bejahende, bald auf eine verneinende Antwort abzielen. Denn eine Bestätigung kann ebensowohl in der Feststellung übereinstimmender Thatsachen bestehen wie in der Beseitigung der Möglichkeit solcher Resultate, die der Annahme widerstreiten würden.

Nach dieser Verification der Ergebnisse der Voruntersuchung, welche den Beginn der eigentlichen Untersuchung bildet, wendet sich die letztere ihrer wichtigsten Aufgabe zu, nämlich der Ermittelung der quantitativen Eigenschaften der Erscheinungen. Während bis dahin das experimentelle Verfahren wesentlich in einer Variation der äusseren Umstände bestanden hatte, von denen die Erscheinung begleitet ist, besteht es nunmehr in einer genauen Messung der einzelnen Elemente der Erscheinung unter den für ihre Herbeiführung günstigsten Bedingungen. Die Art der Fragestellung ist in diesem abschliessenden Theil der Analyse eine völlig andere. Sie geht nicht mehr auf ein Ja oder Nein, sondern auf die besondere Art oder den Grad des Eintritts der Erscheinung unter den gegebenen Bedingungen. Die Antwort ist daher stets eine bejahende, aber sie enthält zugleich die näheren qualitativen oder quantitativen Verhältnisse, auf deren Ermittelung speciell die Frage gerichtet war. Sind auf diese Weise alle wesentlichen Fragen erledigt, die sich auf die Beschaffenheit einer beobachteten Erscheinung beziehen, so werden nun in der Regel die

Resultate unmittelbar oder in Verbindung mit den Ergebnissen anderer Analysen zur Ableitung eines allgemeinen Gesetzes verwerthet, welches die Erscheinung als speciellen Fall in sich enthält. Hiermit tritt die Analyse der Naturerscheinungen in den Dienst der physikalischen Induction. Ehe jedoch die letztere beginnt, pflegt das gewonnene Ergebniss durch eine Umkehrung des Untersuchungsweges einer nochmaligen Prüfung und Vervollständigung unterworfen zu werden, wenn nicht etwa, wie es meistens der Fall ist, schon dieses umgekehrte oder synthetische Verfahren gelegentlich in die Analyse der Erscheinungen eingegriffen hat. Bevor wir hierzu übergehen, wollen wir versuchen, den oben dargestellten Gang der analytischen Untersuchung an einem möglichst vollständigen Beispiele zu erläutern. Ich wähle hierzu Newton's Untersuchung der Farbenzerstreuung des Lichtes bei der Brechung im Prisma. Newton selbst hat zwar in der späteren Ausführung seiner Optik in Folge seiner Vorliebe für die synthetische Darstellung den wirklichen Gang der Analyse verdeckt; dieser lässt sich aber mit Hülfe der vorangegangenen einzelnen Arbeiten über den Gegenstand unschwer reconstruiren*). Wenn bemerkt worden ist, dass die Optik das schwächste Product des Newton'schen Geistes sei**), so mag diesem Ausspruch hinsichtlich des bleibenden Erfolgs der Theorien eine gewisse Wahrheit zukommen; für die experimentelle Analyse verwickelter Erscheinungen aber ist sie noch heute ein mustergültiges Beispiel.

Die Entdeckung der Farbenzerstreuung hat aus einer zufälligen Wahrnehmung ihren Ursprung genommen. Das Farbenspiel eines dreiseitigen gläsernen Primas beobachtend, gerieth Newton auf den Gedanken, dasselbe vor die Oeffnung eines Fensterladens zu halten, durch welchen das Sonnenlicht fiel. Zu seiner Ueberraschung bemerkte er, dass die an der gegenüberliegenden Wand des verdunkelten Zimmers erscheinenden Farben nicht ein der Gestalt der Ladenöffnung entsprechendes kreisrundes, sondern ein längliches Bild mit geraden Seitenlinien darboten. Er vermuthete zunächst, Unterschiede in der Dicke oder in der Gestalt des Glases möchten die Erscheinung veranlassen; er liess daher das Licht durch verschiedene Stellen des Glases fallen, veränderte die Grösse der Ladenöffnung, brachte das Prisma ausserhalb statt innerhalb derselben an, ohne dass sich jedoch die Erscheinung veränderte. Nunmehr legte er sich die Frage vor, ob Unregelmässigkeiten in der Structur des Glases die Ursache der Lichtzerstreuung sein könnten. Demgemäss stellte er dicht hinter dem ersten Prisma ein zweites ihm völlig gleiches auf, welchem aber eine entgegen-

---

*) Neben der Optik kommen hier in Betracht die Abhandlungen in den Philos. Transact. von 1672—1688. Die letzteren sind auszugsweise ins Deutsche übersetzt in dem Werk: Abhandlungen aus den Philosophical Transactions. Leipzig 1779, S. 192 f.

**) Vgl. Poggendorff, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, S. 691.

gesetzte Lage gegeben war. Er schloss, die regelmässigen Wirkungen der Prismen würden auf diese Weise sich aufheben, während irgend welche irreguläre Wirkungen nicht aufgehoben, sondern möglicher Weise verstärkt würden. Es zeigte sich, dass das durch das zweite Prisma gebrochene Licht eine vollkommen kreisrunde Form annahm; die Frage nach der Existenz jener irregulären Wirkungen war also in verneinendem Sinne entschieden. Nun war noch die Vermuthung möglich, es könnten die von verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe ausgehenden Strahlen unter verschiedenen Winkeln in das Prisma eintreten und dadurch eine abweichende Brechung erfahren. Newton mass daher alle bei dem Versuch in Betracht kommenden Linien und Winkel; es fand sich, dass die Breite des prismatischen Bildes genau dem scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe entsprach, dass dagegen die Länge um mehr als das fünffache grösser war. Ausserdem zeigte sich, dass sehr geringe Veränderungen in den Neigungen des Prismas ebenfalls nur sehr geringe Verschiebungen des prismatischen Bildes bewirkten. Dadurch war die vermuthete Wirkung einer verschiedenen Neigung der einfallenden Lichtstrahlen beseitigt. Endlich blieb eine letzte Annahme zu prüfen: die Lichtstrahlen könnten, analog einem elastischen Ball, der einen schrägen Schlag erhalten hat, nach dem Durchtritt durch das Prisma in Folge einer möglicher Weise stattfindenden Combination fortschreitender und drehender Bewegung krumme Linien beschreiben, wodurch die Lichttheilchen in Folge ihres Zusammenstosses von den Orten grössten nach denen kleinsten Widerstands abgelenkt würden. Newton mass demnach die Gestalt des prismatischen Bildes in verschiedenen Entfernungen vom Prisma; dabei ergab sich aber, dass sich alle gebrochenen Strahlen geradlinig fortpflanzten; auch diese Frage war also verneinend entschieden. Nun war als einzige Auskunft die übrig, anzunehmen, dass das Sonnenlicht in Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt werde, und dass diese verschieden brechbaren Strahlen zugleich von verschiedener Farbe seien. Um diese Annahme zu prüfen, fing Newton das prismatische Bild auf einem Schirm auf, in welchem ein kleines Loch angebracht war, durch welches nur ein kleiner Theil des gebrochenen Lichtes hindurchtreten konnte. Hinter dem Loch brachte er dann ein zweites Prisma an, in welchem der hindurchgetretene Strahl abermals gebrochen wurde. Verschob man nun den Schirm so, dass successiv die einzelnen Farbestrahlen nach dem zweiten Prisma gelenkt wurden, so zeigte es sich, dass sie in diesem eine verschieden starke Brechung erfuhren, das rothe Licht die schwächste, das violette die stärkste. Hiermit war die letzte Frage endlich bejahend entschieden: nach Ausschluss aller andern Möglichkeiten war bewiesen, dass das Sonnenlicht Strahlen von verschiedener Farbe und Brechbarkeit enthält. Mit Recht hat Newton den Versuch, der diesen Beweis erbrachte, und der im wesentlichen die noch heute geläufige Form für die Darstellung der verschiedenen Brechbarkeit der Farben ist, ein Experimentum

crucis genannt. Wenn irgend einem, so kann am ehesten demjenigen Versuch, welcher die Voruntersuchung abschliesst und der eigentlichen Untersuchung ein erstes allgemeines Resultat zur näheren Analyse überliefert, die Rolle eines entscheidenden Experimentes zuerkannt werden.

Zunächst suchte nun Newton das gewonnene Ergebniss durch verschiedene Versuche zu bestätigen. Er combinirte zwei Prismen in solcher Weise, dass das erste, wie gewöhnlich, ein vertical stehendes Farbenband entwarf, das zweite aber, welches gegen jenes um 90° gedreht war, das Spektrum nach der Seite ablenkte. Wären andere Bedingungen als die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenfarbigen Strahlen wirksam, so würde in diesem Fall eine horizontale Verbreiterung des Bildes durch das zweite Prisma zu erwarten sein; eine solche trat aber nicht ein, und sie blieb auch dann aus, als durch ein hinzugefügtes drittes und viertes Prisma sehr starke seitliche Ablenkungen des Bildes erzielt wurden. In einem weiteren Versuch brachte er zwei Oeffnungen über einander in dem Fensterladen und vor jeder derselben ein Prisma an, so dass zwei verticale über einander stehende Spektren entworfen wurden. Liess er nun aus beiden Prismen die gebrochenen Strahlen durch ein drittes gehen, dessen brechende Kante vertical gestellt war, so wurden beide Spektren vollkommen gleichmässig nach der Seite abgelenkt. Eine weitere Modification des Versuchs mit zwei Spektren bestand darin, dass er den zwei vor die beiden Oeffnungen gestellten Prismen eine solche Lage gab, dass auf einem weissen Papier das rothe Ende des einen Spektrums dicht neben das violette des andern zu liegen kam. Betrachtete er nun das Bild durch ein drittes Prisma, so erschienen das Roth und Violett wegen ihrer verschiedenen Brechbarkeit durch einen Zwischenraum getrennt. Von hier aus schritt Newton endlich zur quantitativen Bestimmung der einzelnen Elemente der beobachteten Erscheinung. Zu diesem Zweck mussten zunächst möglichst günstige Versuchsbedingungen für die deutliche Entwerfung des Spektrums getroffen werden. Das Zimmer wurde stark verdunkelt, das durch eine Ladenöffnung eintretende Sonnenlicht durch eine Linse gesammelt und unmittelbar hinter dieser das Prisma aufgestellt, welches, am Rand mit schwarzem Papier bedeckt, einen brechenden Winkel von 65—70° hatte und aus reinstem Glase oder aus Spiegelglasplatten, zwischen welche Bleizuckerlösung gebracht war, bestand. In dem auf einem weissen Papier aufgefangenen Spektrum wurden dann die Grenzen der einzelnen Farben durch gerade Linien bezeichnet. Die Distanzen dieser Linien konnten den Unterschieden des Brechungssinus proportional gesetzt werden. Nachdem das Brechungsverhältniss der am stärksten und der am wenigsten brechbaren Strahlen für sich ermittelt war, ergab sich daher nun das aller andern.

Nicht immer ist es nöthig, dass alle Fragen, die sich im Laufe der Untersuchung ergeben, so wie in dem erörterten Beispiel auf experimentellem Wege erledigt werden. Zuweilen lassen sich gewisse Vermuthungen

a priori beseitigen, da sie zu Folgerungen führen, die mit bereits bekannten Erfahrungen im Widerspruch stehen. Für solche Theile der Untersuchung pflegt dann die mathematische die Stelle der experimentellen Analyse zu vertreten. Insbesondere kann auf diese Weise die Voruntersuchung theilweise oder ganz vom Gebiete der Physik auf dasjenige der mathematischen Speculation verlegt werden. Natürlich findet dies namentlich in jenen Fällen statt, wo neue Thatsachen auf Grund bereits bekannter vermuthet oder vorausgesagt werden. Ueberhaupt aber liegt hierin ein grosser Vorzug, den der analytische Scharfsinn vor dem blossen Beobachtungstalente voraus hat, dass er zur Erledigung gewisser Fragestellungen gar nicht des Experimentes bedarf und dadurch eine Menge unnützer experimenteller Arbeit zu ersparen weiss. Es kann dann geschehen, dass der Beobachter sogleich mit der richtigen Vermuthung an die Untersuchung herantritt und diese mit einem Experimentum crucis beginnen lässt. So beseitigte Galilei die zu seiner Zeit verbreitete und anfänglich von ihm selbst getheilte Annahme, dass die Geschwindigkeit frei fallender Körper im Verhältniss des zurückgelegten Weges zunehme, einfach durch den Nachweis, dass nach dieser Voraussetzung die Körper beliebige Höhen von verschiedener Grösse in der nämlichen Zeit durchlaufen müssten. Ebenso aber prüfte er die richtige Annahme, dass die Geschwindigkeit im Verhältniss der verflossenen Zeit zunehme, zunächst in Bezug auf alle ihre Folgen, ehe er zu der Bestätigung durch den Versuch schritt. In noch andern Fällen kann der Gang der wissenschaftlichen Analyse desshalb scheinbare Abweichungen darbieten, weil die einzelne Untersuchung nur einen Theil einer zusammenhängenden Reihe von Forschungen bildet, die sich unter Umständen über lange Perioden der wissenschaftlichen Entwicklung erstrecken. Hier füllt dann natürlich die Arbeit des einzelnen Forschers nur eine einzelne Lücke in dem grösseren Zusammenhang aus, und erst durch die Betrachtung des letzteren lässt sich ein Ueberblick über den Gang der Analyse im ganzen gewinnen. Nimmt man zu dieser historischen Continuität der wissenschaftlichen Arbeit noch das schon berührte Eingreifen der mathematischen Analyse sowie die oft sich ereignende Thatsache hinzu, dass zur Erreichung des nämlichen Zieles nicht selten verschiedene Wege bald neben, bald nach einander eingeschlagen werden, so wird es begreiflich, dass es nicht wenige Analysen physikalischer Erscheinungen giebt, deren vollständige Schilderung die geschichtliche Darstellung ganzer Gebiete der Physik voraussetzen würde.

### b. Die synthetische Erzeugung der Naturerscheinungen.

Die Analyse der Erscheinungen kann für sich allein genügen, um eine exacte Beschreibung derselben möglich zu machen. Ein Beispiel einer in dieser Beziehung vollständigen Analyse haben wir in Newton's Untersuchung der Farbenzerstreuung kennen gelernt. Es kann aber auch sich ereignen,

dass die Analyse ein mehrdeutiges Resultat liefert, und dass zwischen den verschiedenen Möglichkeiten, die sie offen lässt, auf analytischem Wege keine Entscheidung zu gewinnen ist. So kann man z. B. bei der von Helmholtz gelehrten Analyse der Klänge mittelst Resonatoren, welche auf die in dem Klang vermutheten Partialtöne abgestimmt sind, successiv jeden einzelnen der letzteren für das Ohr verstärken und auf diese Weise den ganzen Klang in seine Bestandtheile zerlegen. Es bleibt aber hier der Einwand, der in der That erhoben worden ist, dass in dem mit dem Ohr verbundenen verstärkenden Resonatorrohr möglicher Weise die Töne erst entstehen, und dass sie also in dem objectiven Klang gar nicht enthalten seien. Im ersten dieser Fälle, wo die Analyse für sich schon ein unzweifelhaftes Resultat liefert, wird die Hinzufügung der synthetischen Untersuchung wünschenswerth sein, da sie immerhin einen bestätigenden Werth besitzt und gegen etwa übersehene Einwände sichert; im zweiten Fall, wo das analytische Ergebniss mehrdeutig ist, wird sie unerlässlich sein, da hier ein Experimentum crucis eigentlich erst auf dem synthetischen Wege möglich wird.

Zur Bestätigung des analytischen Ergebnisses seiner Untersuchungen über das prismatische Spektrum hat Newton selbst schon zwei Versuche von synthetischem Charakter ausgeführt: er hob erstens die durch ein Prisma erhaltene Farbenzerstreuung wieder auf, indem er entweder dicht hinter dem ersten ein zweites von derselben Beschaffenheit aber entgegengesetzter Lage anbrachte, oder indem er das zerstreute Licht durch eine in einiger Entfernung angebrachte Sammellinse treten liess; in beiden Fällen wurde durch die Verbindung sämmtlicher Farbestrahlen wieder Weiss erhalten. Zweitens mischte er pulverige Pigmente in dem Verhältnisse, welches die Farben im Spektrum zeigten, und gewann auf diese Weise ein graues oder bei starker Beleuchtung weisses Pulver. Diese Versuche enthalten nicht mehr als eine weitere Bestätigung der auf analytischem Wege gewonnenen Ergebnisse. Der Hauptnutzen einer vollständig durchgeführten synthetischen Untersuchung besteht aber darin, dass sie es am leichtesten möglich macht, in willkürlicher Weise die qualitativen und quantitativen Bedingungen der Erscheinungen zu variiren. In dieser Beziehung hat zum Theil erst die auf Newton gefolgte Entwicklung der Optik die synthetische Untersuchung vervollständigt. Dies ist namentlich unter der Anwendung von zwei Methoden geschehen: erstens durch die Mischung von Spektralfarben in beliebiger Zahl und in beliebigen Intensitätsverhältnissen, und zweitens durch die Mischung von Farbeneindrücken mittelst der zuerst von Muschenbroek angewandten rotirenden Scheiben. Hierdurch ist es möglich geworden, eine grosse Zahl von Thatsachen zu ermitteln, die auf analytischem Wege niemals zu gewinnen waren. So fand man mittelst der synthetischen Methode, dass durch Mischung zweier einander im Spektrum nahestehender Farben die zwischenliegende Farbe erhalten wird, dass jede Farbe zusammen mit einer bestimmten andern,

ihrer so genannten Ergänzungsfarbe, Weiss erzeugt; und die Vergleichung der in Bezug auf die Ergänzungsfarben festgestellten Thatsachen führte endlich zur Annahme der drei Grundfarben als derjenigen drei einfachen Farben, aus denen alle möglichen Farben sammt dem Weiss durch Mischung entstehen können, eine Annahme, die schliesslich ebenfalls direct auf synthetischem Wege bestätigt wurde, indem man die drei Grundfarben in den verschiedensten Mengenverhältnissen am Farbenkreisel mischte. Man sieht aus diesem Verlauf, dass auch die synthetische Untersuchung aus einer Reihe von Fragestellungen sammt den darauf gesuchten und gefundenen Antworten besteht. Diese Fragestellungen knüpfen im allgemeinen an zuvor gewonnene Ergebnisse an, und sie zerfallen wieder in zwei Classen: in eine erste, bei der man einfach eine Umkehrung der vorher ausgeführten Zerlegung der Erscheinungen verlangt, und in eine zweite, bei der eine genauere Bestimmung und Messung der Erscheinungen mit Rücksicht auf ihre Factoren gefordert wird.

Dieses Verhältniss zwischen analytischer und synthetischer Methode wird nur in jenen schon oben (S. 288) berührten Fällen verschoben, wo nicht eine unmittelbar gegebene Erscheinung Gegenstand der Untersuchung ist, sondern wo die Existenz einer noch unbekannten Erscheinung aus irgend welchen Gründen vermuthet wird, und es sich nun vor allem um die Herstellung der Bedingungen zur Erzeugung der Erscheinungen handelt. Hier ist die vermuthete Erscheinung in der Regel von zusammengesetzter Art, und sie muss durch die Combination bestimmter, bis jetzt noch nicht in ihrer Verbindung beobachteter Bedingungen hergestellt werden. So begannen Oersted, als er die Wirkung des elektrischen Stromes auf die Magnetnadel, und Faraday, als er die Wirkung des Magnetes auf das polarisirte Licht nachzuweisen versuchte, mit einem synthetischen Verfahren. In beiden Fällen schloss dann erst an die Entdeckung der Erscheinung die Analyse derselben sich an.

### c. Die physikalische Induction.

Bei der Analyse der Naturerscheinungen ist der Gegenstand der Untersuchung die einzelne Erscheinung. Die Analyse ist vollendet, wenn sie dieselbe in ihre sämmtlichen Bestandtheile zerlegt und damit alle bei ihr vorkommenden Bedingungen ermittelt hat. Ebenso bezieht sich die synthetische Erzeugung unmittelbar nur auf einzelne Erscheinungen, jedoch mit dem Unterschiede, dass sie den Gang der Analyse umkehrt, indem sie durch die Combination bestimmter Erscheinungen andere hervorbringt, die entweder durch eine vorangegangene Analyse in jene zerlegt worden sind, oder von denen man aus irgend welchen Gründen vermuthet, dass sie aus ihrer Verbindung entstehen können. Das Ziel beider ist daher die vollständige Kenntniss aller Einzelthatsachen, aus denen sich eine Erscheinung zusammensetzt, und der Art ihrer Verbindung. Hiermit ist nun aber

der Zweck der physikalischen Untersuchung noch nicht erreicht. Diese will dem logischen Erklärungsbedürfniss Genüge leisten, indem sie aus den einzelnen Erscheinungen allgemeine Naturgesetze gewinnt, aus denen wiederum die Erscheinungen selbst als nothwendige Folgen abgeleitet werden können. Letzteres Geschäft fällt nicht der Analyse und Synthese als solchen zu, sondern der physikalischen Induction, welche dabei die ersteren als Hülfsmittel verwendet. Nichts desto weniger kann auch hier über die logischen Grenzen dieser Methoden kein Zweifel sein, da die Zerlegung oder Zusammensetzung einer Erscheinung und die Gewinnung allgemeiner Sätze aus einzelnen Thatsachen sehr verschiedene Processe sind, deren logisches Verhältniss es begründet, dass die beiden ersten dem letzteren vorausgehen müssen. Insofern die Gesetze, die sich als Resultate von Inductionen ergeben, die verschiedensten Grade der Allgemeinheit besitzen können, ist es aber begreiflich, dass die Induction nicht etwa bloss das Geschäft der Untersuchung abschliesst, indem sie aus den Ergebnissen einer Reihe von Analysen und Synthesen einen allgemeinen Satz ableitet, sondern dass sie nicht selten schon ein einzelnes analytisches oder synthetisches Resultat in ein Gesetz umformt, dessen weitere Prüfung und Verallgemeinerung sie dann der ferneren Untersuchung überlässt. Doch ist in solchen Fällen das Resultat der Analyse von der daran geknüpften Induction logisch immerhin leicht zu unterscheiden; auch hat der aufgestellte Satz, so lange die weitere Prüfung nicht eingetreten ist, immer nur einen hypothetischen Werth. So war es zunächst eine Hypothese, wenn Newton auf das analytische Resultat, dass das Prisma einen Sonnenstrahl in farbige Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt, den Satz gründete, dass das Sonnenlicht aus Farbenstrahlen zusammengesetzt sei. Wäre z. B. der Versuch, durch die Mischung der Spektralfarben wieder Weiss zu erzeugen, dauernd misslungen, so würde es nöthig geworden sein, zu einer andern Voraussetzung zu greifen und diese durch weitere Versuche zu prüfen. In diesem Fall bestand also der nächste Schritt zum Vollzug der Induction in der Umkehrung des analytischen Verfahrens, in der Synthese des weissen Lichts durch Farbenmischung. Weitere Unterstützung fand dann die Induction in der bereits von Newton selbst unternommenen Analyse der Körperfarben mittelst des Prismas und späterhin in den Resultaten, welche die Untersuchung der unter anderweitigen Bedingungen, wie bei der Beugung und Interferenz, auftretenden Farbenerscheinungen lieferte.

Wie die Analyse der Erscheinungen in der Regel von einer zufälligen Wahrnehmung ausgeht, so pflegt die Induction an das Resultat einer ersten Analyse anzuknüpfen und von diesem aus den ganzen Gang der weiteren Untersuchung zu lenken. Die Induction bestimmt so die Reihe der Fragestellungen und dadurch die Ordnung, in welcher die einzelnen analytischen und synthetischen Untersuchungen ausgeführt werden. Diese letzteren können an und für sich betrachtet sehr vollkommen, und dennoch kann

die daran geknüpfte Induction fehlerhaft sein — sei es, dass die Resultate in unrichtiger Weise verknüpft wurden, oder dass man nicht alle einzelnen Untersuchungen ausgeführt hat, die zum Vollzug einer triftigen Induction erforderlich sind. So ist Newton's Untersuchung der Farbenzerstreuung ein Muster vorzüglicher Analyse. Dagegen war es eine fehlerhafte Induction, als er auf die Messung der Farbenbänder des prismatischen Spektrums den Schluss gründete, die Raumverhältnisse der sieben prismatischen Farben entsprächen den relativen Saitenlängen der phrygischen Tonleiter. Hier versäumte er es, das an seinen Prismen gewonnene Resultat durch Versuche mit verschieden brechenden Substanzen zu prüfen, d. h. die Analyse der einen Erscheinung durch weitere Analysen ähnlicher Erscheinungen unter veränderten Bedingungen zu vervollständigen. In dieser Beziehung wurde die Untersuchung erst durch Dollond*) zu Ende geführt, welcher die Abhängigkeit der Farbenzerstreuung von der brechenden Substanz des Prismas und damit zugleich die Unrichtigkeit der Induction Newton's nachwies.

Auch die physikalische Induction kann sich in den drei Stadien vollziehen, die wir als die Stufen einer vollständigen Induction kennen lernten: in der Aufstellung empirischer Gesetze, der Verallgemeinerung der letzteren, und der Ableitung von Causalgesetzen zum Zweck der logischen Verbindung der Thatsachen. (Vgl. Abschn. I, S. 23.) Aber die Tendenz der Erklärung, welche von Anfang an die physikalische Wissenschaft erfüllt, drängt hier rasch über die beiden ersten Stadien hinweg und verursacht, dass man namentlich bei den einfacheren Naturerscheinungen sofort den empirischen Resultaten eine causale Interpretation zu geben sucht. Diese Ueberholung der ersten Inductionsstufen ist natürlich um so auffallender geworden, je mehr durch den Fortschritt der Wissenschaft sich überall in bereits festgestellten Causalgesetzen Beziehungen darboten, an welche neue Ergebnisse anknüpfen konnten. Während daher in den vorangegangenen Jahrhunderten immerhin so einfache Gesetze wie das Snell'sche Brechungsgesetz des Lichtes oder das Mariotte'sche Gesetz der Zusammendrückbarkeit der Luft zunächst als rein empirische Formulirungen auftraten, besitzt gegenwärtig der Ausdruck empirisches Gesetz in der Physik geradezu die Nebenbedeutung einer regelmässigen Beziehung, die wegen ihrer verwickelten Beschaffenheit einer causalen Analyse vorläufig unzugänglich ist. Durch diesen raschen Uebergang zur causalen Betrachtung ist in der Physik weit mehr als in andern Erfahrungswissenschaften die Induction in innige Verbindung mit der Deduction getreten, von der sie sich nur durch den provisorischen Charakter der hinsichtlich der causalen Beziehungen aufgestellten Hypothesen und durch die zur Prüfung dieser provisorischen Hypothesen eingeschlagenen Methoden unterscheidet.

Die Hypothese schliesst nicht, wie zuweilen angenommen wird,

*) Philos. Transact. Vol. X, p. 733.

das Geschäft der Induction ab, sondern auf physikalischem Gebiete begleitet sie dieselbe in der Regel während ihres ganzen Verlaufes. Die Aufstellung der Hypothesen wird hier schon vorbereitet innerhalb jener Analyse der Erscheinungen, welche die der eigentlichen Induction vorausgehende exacte Beschreibung der Thatsachen vermittelt. Denn hier bereits besteht die Analyse in der Prüfung von Vermuthungen, welche bestimmte experimentell zu lösende Fragestellungen an die Hand geben. Ein wichtiger Unterschied liegt nur darin, dass diese Vermuthungen sich zunächst nur auf das Wie, nicht aber auf das Warum der Erscheinungen beziehen. Die Vermuthung wird zur Hypothese erst in dem Augenblick, wo sie die Frage nach den Ursachen des Geschehens in sich schliesst. Die Erfordernisse einer brauchbaren provisorischen Hypothese bestehen darin, dass dieselbe einerseits dem durch die exacte Beschreibung an die Hand gegebenen Inhalt der Erscheinung selbst oder (bei erst zu entdeckenden Erscheinungen) dem Inhalt des die Hypothese liefernden verwandten Erscheinungsgebietes angepasst ist, und dass sie anderseits mit den allgemeinen Principien der Naturerklärung in Uebereinstimmung steht. Hiermit bleibt immer noch für die Gestaltung der Hypothesen ein weiter Spielraum, und es ist daher begreiflich, dass namentlich im Anfang einer physikalischen Untersuchung verschiedene gegen einander kämpfen können. Gerade hierin liegt jedoch ein wesentliches Hülfsmoment der Induction, indem die widerstreitenden Anschauungen zur Aufsuchung von Thatsachen anregen, welche zwischen ihnen entscheiden. So hat die Optik ihre grössten Fortschritte gemacht in der Zeit, in welcher die Emanations- und Undulationshypothese um die Herrschaft stritten. Volta's Fundamentalversuche über die Entstehung der Elektricität durch den Contact der Metalle verdanken hauptsächlich ihre Anregung der Bestreitung der Hypothese Galvani's von dem thierischen Ursprung des galvanischen Stroms, und in noch späterer Zeit hat der Streit der Contact- mit der chemischen Hypothese dem nämlichen Gebiet wichtige Untersuchungen zugeführt. Uebrigens wird durch eine in rein descriptiver Absicht unternommene vorläufige Analyse der Erscheinungen die Zahl möglicher Annahmen immer bereits erheblich eingeschränkt; darum ist es schon aus diesem Grunde wünschenswerth, dass der eigentlichen Induction wo möglich eine bis zur exacten Beschreibung des Thatbestandes führende Analyse vorausgehe.

Die Prüfung der provisorischen Hypothesen besteht aus einer Reihe analytischer und synthetischer Untersuchungen, welche zunächst einen vorwiegend qualitativen Charakter besitzen. Ist für ein bestimmtes Gebiet von Erscheinungen eine grössere Zahl sich gegenseitig ausschliessender Hypothesen aufgestellt, so repräsentirt jede derselben einen als möglich angenommenen Causalcomplex. Um unter diesen ursächlichen Momenten das geeignete wählen zu können, genügt es im allgemeinen, bestimmte Bedingungen einzuführen oder hinwegzulassen; und wo dabei

eine quantitative Abstufung der Bedingungen nöthig wird, da ist immerhin eine genaue Messung in diesem Stadium der Untersuchung noch nicht erforderlich. Die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Ermittelung der ursächlichen Bedingungen einer Erscheinung liegt nun aber in der Complication der Bedingungen. Die Umstände, unter denen eine Naturerscheinung zur Beobachtung kommt, sind meistens sehr zahlreich; die wichtigste Aufgabe des inductiven Verfahrens besteht daher in einer Variation dieser Umstände, welche darauf gerichtet ist, die wesentlichen von den unwesentlichen zu sondern und für die ersteren wiederum die Beziehungen nachzuweisen, in denen sie zu den einzelnen Theilen des beobachteten Phänomens stehen. Die allgemeine logische Regel, welche hierbei massgebend ist, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Unter den eine Erscheinung begleitenden Umständen sind diejenigen als wesentliche Bedingungen derselben anzusehen, deren Beseitigung die Erscheinung selber beseitigt, und deren quantitative Veränderung eine quantitative Veränderung der Erscheinung herbeiführt.

Diese Regel weist auf zwei experimentelle Methoden hin, die wir kurz als Elimination und als Gradation der Bedingungen bezeichnen können. Die Eliminationsmethode wird, wo es möglich ist, zuerst angewandt, und die Gradationsmethode dient dann zur weiteren Bestätigung der Ergebnisse. Die erste Methode kann wieder in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung kommen: entweder auf directe Weise, indem man die zu eliminirenden Umstände völlig beseitigt, oder auf indirecte Weise, indem man dieselben constant erhält, während alle andern Bedingungen successiv verändert werden.

Abweichend von dem oben aufgestellten Inductionsgesetz und in näherem Anschlusse an die Baconischen Vorschriften haben John Herschel und John Stuart Mill eine grössere Zahl logischer Regeln für die experimentelle Forschung entwickelt*). Mill namentlich hat fünf Methoden aufgestellt, von denen die erste und zweite, die er als Methoden der Uebereinstimmung und des Unterschieds bezeichnet, den positiven und negativen Instanzen, die fünfte, als die Methode der begleitenden Veränderungen, der Tabula graduum bei Baco entspricht. Die dritte und vierte Regel dagegen sind nur Specialisirungen der zweiten, so dass diese Vorschriften im wesentlichen auf die Baconischen zurückführen, mit dem Unterschiede, dass sie nicht eine streng successive Anwendung der drei Grundregeln verlangen, sondern ein wechselndes Ineinandergreifen derselben zugeben, während sie freilich ebenso wie Baco die massgebende Bedeutung provisorischer Hypothesen verkennen. Prüft man nun aber die Beispiele, welche die Anwendung dieser Methoden erläutern sollen, so zeigt es sich sogleich,

---

*) Herschel, Ueber das Studium der Naturwissenschaft. Deutsch von Henrici. Göttingen 1836, S. 156 f. Mill, Logik, I, S. 453 f.

dass die Regel der Uebereinstimmung in keiner Weise zu einer Induction verhelfen kann, sondern dass bei ihr immer schon zugleich eine Anwendung der Unterscheidungsmethode stattfindet. So soll in dem von Herschel angeführten, der Interpretation nach Baconischen Regeln besonders günstigen Beispiel der Theorie der Thaubildung die Methode der Uebereinstimmung darin ihre Anwendung finden, dass man als übereinstimmende Eigenschaft aller bethauten Körper ihre kältere Beschaffenheit im Vergleich mit der umgebenden Luft feststellte. Das Wesentliche dieses Verfahrens ist aber offenbar gar nicht die Ermittelung einer Uebereinstimmung, sondern die eines Unterschieds, nämlich des Temperaturunterschieds, welcher eine constante Bedingung der Thaubildung ist. Dass diese Bedingung an vielen Körpern beobachtet wurde, ist von verhältnissmässig untergeordneter Bedeutung; am allerwenigsten lässt sich aber eine solche Sammlung übereinstimmender Beobachtungen als eine besondere Methode der Uebereinstimmung auffassen, da hier die Häufung von Beobachtungen lediglich das Mittel ist, um die Constanz der betreffenden Bedingung festzustellen, und daher bei jedem methodischen Verfahren wiederkehrt. Ebenso zeigt dieses Beispiel, dass sich mit der Methode der Unterscheidung meistens von selbst diejenige der gradweisen Abstufungen verbindet, da hier unmittelbar an die Constatirung des Temperaturunterschieds die Beobachtung der steigenden Effecte dieses Unterschieds sich anschliesst. Elimination und Gradation sind eben zwei nicht nur nach ihrem logischen Zweck, sondern auch in Bezug auf ihre äussere Anwendung einander nahe verwandte und bei einem bestimmten Punkte völlig in einander übergehende Methoden. Aus diesem Grunde erscheint es angemessen, beide, wie es oben geschehen ist, einer einzigen Grundregel der Induction unterzuordnen.

Wie in dem hier angeführten, so lässt es sich bei allen andern von Mill benutzten Beispielen leicht zeigen, dass in die Methode der Uebereinstimmung bereits die Differenzmethode hereinreicht, und dass aus ihr (oder vielmehr theils aus der Elimination, theils aus der Gradation der begleitenden Umstände) immer die eigentliche Induction entspringt. So ist für Liebig's Theorie der schädlichen Wirkung der Metallgifte das nächste Motiv nicht dies, dass die Lösungen schwerer Metalle innerhalb des Organismus ebenso wie ausserhalb desselben mit den Gewebsstoffen Verbindungen eingehen, welche der Fäulniss widerstehen, sondern die Thatsache, dass solche Verbindungen erfahrungsgemäss zu den Functionen des Stoffwechsels unfähig sind. Bei der Feststellung der Gesetze der Induction durch statische Elektricität soll das Verfahren der Uebereinstimmung darin bestehen, dass man nachwies, wie in allen Fällen, in welchen ein Conductor mit einer bestimmten Elektricität geladen ist, eine in der Nähe befindliche leitende Fläche die entgegengesetzte Elektricität annimmt. Hier liegt das Wesen der logischen Induction abermals nicht in der Sammlung übereinstimmender Fälle, sondern einerseits in der Vergleichung des durch Influenz geladenen Leiters mit seinem vorherigen neutralen Zustande, anderseits in dem Nachweis,

dass es niemals möglich ist, eine der beiden Elektricitäten abzuleiten, ohne dass zugleich die andere entladen wird. Das erste beruht aber so gut wie das zweite auf einer Anwendung der Differenzmethode.

Nachdem die Ursachen festgestellt sind, welche sich bei dem Eintritt der Erscheinungen wirksam erweisen, müssen nun diese Ursachen in genau messbarer Weise quantitativ variirt und gleichzeitig die quantitativen Veränderungen der untersuchten Erscheinungen durch messende Beobachtungen ermittelt werden. Diese Aufgabe gestaltet sich verhältnissmässig einfach in denjenigen Fällen, wo die Erscheinung auf eine einzige ursächliche Bedingung zurückgeführt werden kann; sie wird verwickelter, wenn mehrere Ursachen in einander eingreifen. Hier muss dann jede einzelne Ursache für sich unabhängig verändert und ihr Einfluss quantitativ bestimmt werden. Es findet dabei abermals das Eliminations- und Gradationsverfahren seine Anwendung, das erstere meistens in der Form der Constanterhaltung der übrigen Bedingungen. Wo es nicht möglich ist, eine einzelne Ursache isolirt zu verändern, da ist auch die Induction für sich nicht ausreichend, das complexe Gesetz der Erscheinung in die einfacheren Gesetze aufzulösen, aus denen es sich zusammensetzt. In solchen Fällen müssen dann entweder hypothetische, wo möglich an anderweitige Erfahrungen sich anlehnende Voraussetzungen über die Verbindung der Ursachen eingeführt werden, oder man ist genöthigt, das complexe Gesetz lediglich als einen die zusammengesetzte Erfahrung repräsentirenden Ausdruck stehen zu lassen. Derartige Gesetze pflegen dann, wie schon oben bemerkt, hier speciell empirische Gesetze genannt zu werden. Wegen ihres verwickelten Charakters ist in der Regel bei ihnen eine Verallgemeinerung durch Verknüpfung mit Inductionen verwandten Inhalts nicht möglich. Denn wenn es sich auch leicht ereignen kann, dass verschiedene empirische Gesetze eine ähnliche Form besitzen, so weist dies doch immer nur auf eine ähnliche Entstehung aus einfacheren Gesetzen hin; es wird aber dadurch nicht möglich, die einzelnen complexen Gesetze als Specialfälle einer allgemeinen Gesetzmässigkeit aufzufassen. Dies ist dagegen regelmässig der Fall, wenn die durch Induction gewonnenen Gesetze vermöge der isolirten Variabilität der Bedingungen einen einfacheren Charakter besitzen. So lassen sich die Gesetze der Reflexion, Beugung, Brechung und Interferenz des Lichtes ohne weiteres mit den entsprechenden Schallgesetzen vereinigen. Wenn dagegen eine beliebige zusammengesetzte Klangbewegung durch eine ähnliche Reihe dargestellt werden kann wie die Fortpflanzung der Wärme durch die Erdrinde, so lässt sich daraus über die innere Beziehung der physikalischen Vorgänge nicht das geringste entnehmen. Doch kann es geschehen, dass ein complexes empirisches Gesetz dieser Art durch eine weiter eindringende Analyse noch in einfache Gesetze von causaler Bedeutung zerlegt wird. Dies hat sich z. B. bei der Darstellung der Klangbewegungen durch eine Sinusreihe ereignet, wo sich ergab, dass die Glieder der letzteren als wirkliche Repräsentanten einfacher

Schwingungsgesetze zu betrachten sind. An einer solchen Zerlegung complexer empirischer Gesetze pflegt übrigens die deductive Methode schon wesentlich betheiligt zu sein. Denn meist ist es die mathematische Analysis, die in dem Functionsausdruck des empirischen Gesetzes einfachere Beziehungen nachweist, deren Uebereinstimmung mit physikalischen Gesetzen von allgemeiner Bedeutung unmittelbar erkennbar ist. Der experimentellen Untersuchung bleibt dann nur noch die Bestätigung der etwa in die Voraussetzungen eingehenden Hypothesen oder die Ermittelung bestimmter physikalischer Constanten überlassen. So zeigt es sich auch hier, dass vermöge der umfassenden Grundlagen, welche in den mechanischen Principien und in den einfacheren Gebieten der Physik für die Deduction der Naturerscheinungen gegeben sind, bei dem heutigen Zustande der Wissenschaft nur selten das Inductionsverfahren unvermischt angewandt wird. Am ehesten ist letzteres natürlich noch bei solchen Untersuchungen der Fall, bei denen es sich zugleich um die Entdeckung bisher unbekannter Erscheinungen handelt. Es mag daher an einem klassischen Beispiel dieser Art der oben geschilderte allgemeine Verlauf der physikalischen Induction erläutert werden: ich wähle hierzu die elektrische Induction, mit besonderer Rücksicht auf Faraday's grundlegende Untersuchungen über dieselbe.

Bei der Erzeugung statischer Elektricität durch Reibung hatte du Fay zuerst beobachtet, dass die Beschaffenheit der Elektricität je nach der Natur des geriebenen Körpers eine verschiedene sein könne, da leicht bewegliche Körperchen sich abstiessen, wenn die ihnen mitgetheilte Elektricität von einerlei Quelle herstammte, dagegen sich anzogen, wenn die Elektricität verschiedenen Ursprungs, z. B. durch Reiben von Glas und Harz hervorgebracht war. Als man dann weiterhin beobachtet hatte, dass regelmässig das Reibzeug eine andere Elektricität annimmt als der geriebene Körper, so schloss Franklin, das Wesen der Elektricitätserregung bestehe in einer Uebertragung von Elektricität, wobei der eine Körper, der positiv elektrische, einen Ueberschuss derselben aufnehme, der andere, der negativ elektrische, solche abgebe; eine Bestätigung dieser Ansicht fand er darin, dass der Funke nur von dem positiv auf den negativ elektrischen Körper übergehe, nicht umgekehrt. Dagegen erhoben sich zunächst Bedenken aus Anlass der Anziehungs- und Abstossungserscheinungen. Konnte man auch nach Franklin's unitarischer Hypothese allenfalls begreifen, dass positiv und negativ elektrische Körper sich anziehen und positiv elektrische sich abstossen, so war doch kaum einzusehen, warum auch negativ elektrische einander fliehen sollten. Diese Erwägungen veranlassten Robert Symmer zur Aufstellung der dualistischen Hypothese, welcher dann die zuerst von Wilke und Aepinus beobachteten Influenzerscheinungen vollends zum Sieg verhalfen. Diese zeigten, dass ein elektrischer Körper auf einen in seine Nähe gebrachten neutralen Leiter derart einwirkt, dass auf der dem Körper zugewandten Seite ein entgegengesetzter, auf der

abgewandten ein gleichartiger elektrischer Zustand entsteht. Hierdurch wurde man gezwungen, die Anziehungs- und Abstossungserscheinungen elektrischer Körper auf die Anziehungen und Abstossungen der beiden Elektricitäten zurückzuführen, die man als eine neue Art unwägbarer Fluida ansah. Es lag dann aber auch die Vermuthung nahe, dass Erscheinungen, die der elektrischen Influenz entsprächen, überall da auftreten würden, wo überhaupt eine Quelle von Elektricitätserregung gegeben sei. Diese Vermuthung fand eine Stütze in Oersted's Entdeckung der bewegenden Wirkung des galvanischen Stromes auf die Magnetnadel und in den an diese Entdeckung sich anschliessenden Beobachtungen im Gebiet des Elektromagnetismus. Nachdem zuerst durch Arago's und dann besonders durch Faraday's Versuche nachgewiesen war, dass Stahl und Eisen durch einen elektrischen Strom in den magnetischen Zustand übergeführt werden können, nachdem ferner Ampère gezeigt hatte, dass ein bewegter Magnet auf einen in der Nähe befindlichen beweglichen Stromleiter, und dass ebenso zwei bewegliche Stromleiter auf einander eine bewegende Wirkung äussern, die von der Richtung der Ströme bez. der Bewegungsrichtung der Magnetpole abhängt, war die Vermuthung gerechtfertigt, dass auch ein elektrischer Strom oder ein Magnetpol in benachbarten leitungsfähigen Körpern eine elektrische Vertheilung hervorbringen werde. Diese Vermuthung gründete sich demnach theils auf das allgemeine Princip der Correspondenz von Wirkung und Gegenwirkung, theils auf eine erwartete Analogie mit den statisch-elektrischen Erscheinungen. War der elektrische Strom fähig, Magnetismus zu erregen, so konnte man annehmen, dass umgekehrt der Magnetismus auf einen benachbarten Leitungsdraht stromerregend werde wirken können. Da man ferner auf statisch-elektrischem Gebiete von den Anziehungs- und Abstossungserscheinungen elektrischer Körper aus zu der Fähigkeit der letzteren auf umgebende Leiter eine vertheilende Wirkung zu äussern gelangt war, so war umgekehrt zu erwarten, dass der wechselseitigen bewegenden Wirkung von Magneten und durchströmten Leitern eine vertheilende Wirkung elektrischer Ströme und Magnete auf benachbarte Conductoren entsprechen werde. Dies waren die Gesichtspunkte, von denen Faraday bei seiner Untersuchung ausging, bei der es sich demnach zunächst um eine Aufsuchung der vermutheten Erscheinungen und dann um die nähere Analyse derselben handelte. Die Untersuchung selbst zerfällt wieder in zwei logische Inductionen, von denen die eine auf die volta-elektrische, die andere auf die magneto-elektrische Induction sich bezieht*).

Um vertheilende Wirkungen durch den galvanischen Strom nachzuweisen,

*) Vgl. namentlich die erste und zweite Reihe von Faraday's elektrischen Untersuchungen. Philos. Transact. 1832. Poggendorff's Annalen d. Physik, Bd. 25, S. 91 u. 142.

wickelte Faraday einen Kupferdraht in mehreren von einander isolirten Windungen auf einen Holzcylinder, überzog denselben mit einer isolirenden Schichte und umgab dann die letztere mit einem zweiten Kupferdraht: die Enden des ersten Drahts wurden mit einer Volta'schen Säule, die des zweiten mit einem Galvanometer verbunden. Es zeigte sich aber zunächst keine Wirkung auf die Magnetnadel. Erst als eine stärkere Batterie gewählt wurde, zeigte sich im Moment der Schliessung und ebenso im Moment der Oeffnung derselben eine schwache Ablenkung der Magnetnadel; dagegen blieb diese während der Dauer der Schliessung völlig ruhig. Diese Erscheinungen blieben auch bei noch stärkeren Strömen ungeändert; zugleich erfolgte regelmässig die Ablenkung bei der Oeffnung in entgegengesetztem Sinne als bei der Schliessung, und sie war etwas schwächer. Faraday's anfängliche Vermuthung, dass der Strom während seiner Dauer eine vertheilende Wirkung ausüben werde, schien also der Berichtigung zu bedürfen; es handelte sich aber noch darum, die sicher beobachtete Schliessungs- und Oeffnungsinduction durch weitere Versuche zu bestätigen. Zu diesem Zweck brachte Faraday die Enden des inducirten Drahtes statt mit dem Galvanometer mit einer auf eine Glasröhre gewickelten Drahtrolle in Verbindung: befand sich nun, während eine Schliessung oder Oeffnung des Batteriestroms erfolgte, eine unmagnetische Stahlnadel in der Glasröhre, so war dieselbe magnetisch geworden, und zwar nahm sie bei der Oeffnung entgegengesetzten Magnetismus an als bei der Schliessung; wurde aber die Nadel während der Dauer des Stroms in die Glasröhre gebracht und vor der Oeffnung wieder entfernt, so zeigte sie keine Spur von Magnetismus. Ebenso liess sich an der Nadel des Galvanometers keine Ablenkung wahrnehmen, wenn die Verbindung während der Dauer des Stromes erfolgte. Zur weiteren Bestätigung der sich hieraus ergebenden Bedingungen der Inductionswirkung wurden endlich zwei Kupferdrähte in langen Zickzackbiegungen auf zwei getrennten Brettern befestigt; der eine Draht wurde mit der Batterie, der andere mit dem Galvanometer verbunden: als nun das eine Brett dem andern rasch genähert wurde, zeigte das Galvanometer einen Strom an, einen entgegengesetzten bei der Entfernung; so lange dagegen beide Drähte in constanter Nähe blieben, war kein Strom wahrzunehmen. Bei der Näherung der Drähte war die Richtung des inducirten Stromes die nämliche, wie sie bei der Schliessung beobachtet wurde, und in beiden Fällen hatte der erregte Strom die entgegengesetzte Richtung wie der erregende. Umgekehrt verhielt es sich bei der Entfernung der Drähte oder der Oeffnung der Kette, die ebenfalls in ihrem Effect einander entsprachen. Aus allen diesen Thatsachen ergab sich demnach durch logische Induction der Satz: das Entstehen eines galvanischen Stromes erregt in einem benachbarten geschlossenen Leiter einen kurz dauernden elektrischen Strom von entgegengesetzter Richtung, das Verschwinden eines Stromes erregt einen ähnlichen Strom von gleicher Richtung.

Um die Fundamentalerscheinungen der magnetelektrischen Induction aufzufinden, umwickelte Faraday einen starken Ring aus Schmiedeeisen mit zwei von isolirenden Hüllen umgebenen Kupferdrähten, die einander so gegenüberlagen, dass zwischen ihnen eine zolllange Strecke Eisen unbedeckt blieb. Die Enden des einen Drahts konnten mit einer galvanischen Batterie, die des andern mit einem Galvanometer verbunden werden. Auch hier zeigte sich im Moment der Schliessung und Oeffnung eine Wirkung, und zwar war dieselbe weit stärker als bei der volta-elektrischen Induction, so dass, wenn an die Enden des zweiten Drahtes Kohlenspitzen angebracht waren, zwischen denselben bei ihrer Näherung ein starker Funke übersprang. Zum Behuf der genaueren Vergleichung der volta-elektrischen und der magneto-elektrischen Induction wurde nun ein hohler Pappcylinder mit zwei isolirt gewundenen Drahtlagen umgeben, von denen wieder die eine mit einer Kette, die andere mit dem Galvanometer in Verbindung stand: es erfolgte beim Schliessen und Oeffnen der Kette eine kaum merkliche Wirkung; als aber ein Cylinder von weichem Eisen in die Pappröhre gesteckt wurde, war diese Wirkung sehr bedeutend. Aehnliche Wirkungen wie die Elektromagnete übten natürliche Magnete sowie der Erdmagnetismus aus, und zwar zeigte es sich, dass, wenn ein Kupferdraht einem Magnete genähert wurde, die Richtung des inducirten Stromes derjenigen entgegengesetzt war, welche nach Ampère's Theorie in dem Magnete selber anzunehmen ist. Unter dieser Voraussetzung liessen sich also die Thatsachen der magneto-elektrischen einfach dem Gesetz der volta-elektrischen Induction unterordnen. Beide Entstehungsweisen der Induction variirte endlich Faraday, indem er verschiedene Metalle zur Verfertigung des inducirten Leiters wählte: es ergab sich, dass in allen Fällen die Erscheinungen in gleicher Weise auftraten, abgesehen von den Intensitätsunterschieden, die durch das verschiedene Leitungsvermögen der Metalle für den Strom bedingt waren.

Noch zu einer weiteren Folgerung gaben aber die Beobachtungen über die Induction eines vom Strom durchflossenen Leiters auf einen andern, der von ihm räumlich getrennt ist, Anlass, zu einer Folgerung, deren experimentelle Bestätigung wiederum eine wichtige Erweiterung dieses Erscheinungsgebietes herbeiführte. Offenbar war man nämlich berechtigt zu vermuthen, dass die einzelnen von einander isolirten Windungen eines Kupferdrahtes auch eine wechselseitige Inductionswirkung ausübten. In der That glaubte Faraday auf eine solche Wirkung schon aus der Beobachtung schliessen zu dürfen, dass ein in vielen Spiralwindungen aufgerollter Schliessungsdraht beim Oeffnen der Kette einen viel stärkeren Funken giebt als ein kurzer Schliessungsdraht, und er wies dann den durch Induction des Leiters auf sich selbst entstehenden Strom, den er den Extrastrom nannte, direct nach, indem er eine Inductionsspirale gleichzeitig mit einer galvanischen Batterie und einem Galvanometer verband und die Einrichtung so traf, dass die Magnetnadel desselben an der Ablenkung

durch den Batteriestrom durch eine angebrachte Hemmung verhindert wurde, während der Extrastrom, dessen Wirkung in entgegengesetzter Richtung erfolgte, auf sie einwirken konnte*).

Der letzte Schritt aller auf die elektrische Induction sich beziehenden Untersuchungen, die Feststellung der quantitativen Gesetze der Erscheinungen, war bei der statisch-elektrischen Induction mit verhältnissmässig geringen Schwierigkeiten verbunden, da hier der zeitliche Verlauf der Vorgänge ausser Betracht bleiben konnte und es also genügte, die Gesetze zu ermitteln, nach denen mit der Veränderung der Stärke der Ladung des Influenzerregers einerseits und der verschiedenen räumlichen Bedingungen (Gestalt, Grösse, gegenseitige Stellung und Entfernung der Körper) anderseits die beobachteten Wirkungen sich änderten. Diese Gesetze wurden bereits von Coulomb in seinen für die quantitative logische Induction mustergültigen Untersuchungen im wesentlichen vollständig erledigt. Nachdem er in der Drehwage ein zur Messung anziehender oder abstossender Wirkungen geeignetes Hülfsmittel aufgefunden, ermittelte er den Einfluss der Stärke der Ladung, indem er dieselbe quantitativ variirte, alle übrigen Umstände aber constant erhielt; ähnlich stellte er den Einfluss der Entfernung der Körper fest, ihrer Gestalt, der Existenz einer isolirenden Zwischensubstanz u. s. w., wobei er überall in gleicher Weise die Eliminationsmethode mit der Gradationsmethode verband, nämlich die zu eliminirenden Einflüsse constant erhielt, während die speciell zu untersuchende Bedingung in messbarer Weise variirt wurde**). Ungleich schwieriger war die Untersuchung der volta-elektrischen und der magneto-elektrischen Induction, da es sich hier um einen Vorgang handelt, der in sehr kurzer Zeit abläuft, in dieser Zeit aber stetige Veränderungen seiner Intensität erfährt. Faraday's Untersuchung war daher auch im wesentlichen auf den qualitativen Nachweis der Erscheinungen beschränkt geblieben. Wollte man von hier aus zu quantitativen Bestimmungen übergehen, so konnte an eine unmittelbare Messung des ganzen zeitlichen Verlaufs der Inductionswirkung nicht gedacht werden, weil die Magnetnadel eines Galvanometers ein allzu träges Werkzeug ist, als dass sie momentanen Veränderungen zu folgen vermöchte, und es nur möglich schien, den Gesammteffect eines einzelnen Inductionsstromes durch ihre Ablenkung zu messen. In diesem Falle ist es daher nöthig gewesen, aus den sonst bekannten Thatsachen erst ein hypothetisches Gesetz in mathematischer Formulirung über den Verlauf der Inductionswirkung zu entwickeln und dieses dann durch Messungen zu prüfen. Hierbei musste man aber wieder zuerst den Verlauf der Entstehung des Stromes im inducirenden Leiter

---

*) Faraday's Untersuchungen, neunte Reihe. Philos. Transact. 1834. Poggendorff's Ann., Bd. 35, S. 413. Jacobi, ebend. Bd. 45, S. 132.

**) Coulomb, Mémoires de l'Acad. Paris 1775. Vgl. Gehler's physikal. Wörterbuch, 2. Aufl., Bd. 3, 2. Abth., S. 690 f.

einer theoretischen Untersuchung unterziehen, da dieser Vorgang kein momentaner ist, sondern in Folge der Induction auf sich selbst bestimmte Veränderungen darbietet*). Im Gegensatze zu dem ganz und gar inductiven Weg, auf welchem Coulomb die Gesetze der statischen Induction feststellte, bildet daher diese allgemeinere Untersuchung der Inductionsgesetze ein Beispiel für jene Fälle, wo die Aufstellung quantitativer Gesetze zunächst ein Problem der Deduction ist, und der experimentellen Untersuchung nur die Aufgabe der Bestätigung und der Ermittelung der in der Theorie unbestimmt gelassenen numerischen Werthe zufällt.

Blicken wir auf die Gesammtheit der Untersuchungen zurück, welche dieses ganze Erscheinungsgebiet allmählich der Erkenntniss zugänglich machten, so bietet dieselbe beinahe für alle Variationen der logischen Induction, die oben erwähnt wurden, Belege dar. Die Untersuchung der statisch-elektrischen Induction geht aus von zufälligen Wahrnehmungen, die zu verschiedenen Hypothesen Anlass geben, unter denen schliesslich die dualistische, verbunden mit der Annahme der Fernewirkung der elektrischen Flüssigkeiten, den Sieg davonträgt. Auf Grund dieser Hypothese unternimmt dann Coulomb die Feststellung der quantitativen Gesetze der Influenz. Der Nachweisung der übrigen Formen der Induction ist ihre hypothetische Annahme vorangegangen. Da man auch hier zunächst einen dauernden Einfluss des Stromes oder des Magnetes auf den benachbarten Leiter vermuthete, so fand die provisorische Hypothese sofort in der Beobachtung der wirklichen Erscheinungen ihre Berichtigung. Immerhin bedurfte es dazu einiger Zeit. In Faraday's anfänglicher Annahme, dass der inducirte Leiter auch in der Zeit zwischen der Schliessungs- und der Oeffnungsinduction in einem veränderten Zustand verharre, welchen er den »elektrotonischen Zustand« nannte, ist ein Reflex jener ursprünglichen Vermuthung erhalten geblieben; in Folge der Erkenntniss, dass sich in dem genannten Zustand die Eigenschaften der Metalle in nichts von ihren gewöhnlichen unterscheiden, hat Faraday später jene Annahme aufgegeben. An die Nachweisung der qualitativen Erscheinungen der Induction schloss sich dann sofort die Verknüpfung der einander nahe stehenden volta- und magneto-elektrischen Induction, die überdies durch die Ampère'schen Beobachtungen und Theorien von anderer Seite her vorbereitet war. Zur statisch-elektrischen Induction blieb dagegen die Beziehung so lange eine sehr allgemeine, bis eine eindringendere theoretische Untersuchung der Inductionsgesetze vorgenommen war, und die letztere hat in diesem Fall auch erst eine Bestimmung der quantitativen Inductionsgesetze möglich gemacht. Die Anwendung der allgemeinen logischen Inductionsregel lässt sich durch alle diese Untersuchungen verfolgen. So greifen in Faraday's Arbeiten das Eliminations- und das Gradations-

---

*) Vgl. Wiedemann, Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus, 2. Aufl., Bd. II, S. 89 f.

verfahren fortwährend in einander ein. Das letztere wendet er an, indem er die Stärke des erregenden Stromes oder Magnetes, die Zahl der Drahtwindungen verändert; das erstere, indem er eine unmagnetische Nadel in die inducirte Rolle bald während der Schliessung oder Oeffnung, bald nur während der Strom geschlossen ist, bringt, oder indem er die Effecte der inducirten Rolle bald mit der Einfügung von Eisenstäben, bald ohne dieselbe prüft, u. s. w. Für die Anwendung beider Methoden bei quantitativen Untersuchungen ist Coulomb's Feststellung der Influenzgesetze geradezu mustergültig. Er eliminirt die Bedingungen der Erscheinungen meistens dadurch, dass er sie constant erhält, während die eine Bedingung, deren Einfluss ermittelt werden soll, gradatim verändert wird. Nur bei der Feststellung des allgemeinen Gesetzes der elektrischen Fernewirkung eliminirt er den Einfluss der Grösse und Gestalt der Körper, indem er die Entfernungen so gross wählt, dass dagegen die Dimensionen der Körper verschwinden.

### d. Die physikalische Abstraction.

Nächst der Mechanik ist die Physik diejenige Naturwissenschaft, welche von dem Verfahren der Abstraction den ausgiebigsten Gebrauch macht. Schon die Trennung der physikalischen Forschung von andern Zweigen der naturwissenschaftlichen Untersuchung ist ein specieller Fall der isolirenden Abstraction. (S. 11.) Die Naturgegenstände werden zu Objecten physikalischer Analyse, indem man übereinstimmende Erscheinungen, absehend von den sonstigen Eigenschaften der Körper, an denen sie vorkommen, zergliedert. So können die Gesetze der Lichtbrechung an beliebigen festen oder flüssigen durchsichtigen Körpern untersucht werden; die Aggregatform, die elastischen, thermischen und andern Eigenschaften der auf ihr Brechungsvermögen untersuchten Körper bleiben dabei zunächst ganz aus dem Spiele. Wie die Unterscheidung der Physik von andern Wissenschaften, so beruht daher auch die Gliederung derselben in ihre einzelnen Zweige auf dem nämlichen Abstractionsverfahren. Schwere, Schall, Wärme, Licht u. s. w. sind Classen von Naturerscheinungen, bei deren jeder die übrigen so viel als möglich ausser Betracht bleiben. Ursprünglich ist diese Isolation von den unmittelbaren Unterschieden der sinnlichen Wahrnehmung ausgegangen. Schwere und Wärme entsprechen den beiden Empfindungsqualitäten des Tastsinns, der Schall ist das Object des Gehörs, das Licht das Object des Gesichtssinns. Elektricität und Magnetismus legten zuerst eine Bresche in dieses System einer naiven physikalischen Abstraction; denn die Wirkungen jener Kräfte äussern sich bald in diesem, bald in jenem Sinnesgebiet, während doch eine unmittelbare Zurückführung auf die andern Naturkräfte unmöglich ist. Dazu kamen die Beziehungen, die sich zwischen den verschiedenen Erscheinungsgebieten, wie zwischen Licht und Schall, zwischen diesem und den Wellenbewegungen

der Flüssigkeiten, ergaben. Je mehr die Physik dazu gelangt ist, bestimmte Anschauungen über die Natur der den einzelnen Erscheinungen zu Grunde liegenden Bewegungsformen schon bei ihren fundamentalen Abstractionen zu verwerthen, um so mehr haben daher jene ersten Gliederungen rationelleren Eintheilungsversuchen Platz gemacht, wenn auch für die erste Auffassung des empirischen Thatbestandes die Scheidung nach den Sinnesgebieten schon insofern eine gewisse Bedeutung behält, als den verschiedenartigen Sinneseinwirkungen tiefere Unterschiede der hypothetisch angenommenen oder objectiv nachweisbaren Vorgänge selbst entsprechen.

Auf die physikalische Abstraction folgt ihre Umkehrung, die Colligation der elementaren Erscheinungen. Nachdem diese an einem gegebenen Object oder an einem bestimmten Zusammenhang von Objecten jede für sich untersucht sind, sucht man sich über die Art ihrer Verbindung Rechenschaft zu geben. In der Regel hat dabei eine Erscheinung den Vortritt, und die Untersuchung der übrigen schliesst sich erst an in Folge der Fragen, die von jener aus angeregt werden. Nachdem man z. B. die doppelbrechende Eigenschaft eines Krystalls erkannt hat, geht man zu der Untersuchung der thermischen, elastischen und thermo-elektrischen Erscheinungen an demselben über. Auf diese Weise gelangt die Physik durch die Verbindung der Untersuchungen zu einer umfassenden Erkenntniss sowohl der complexen Naturerscheinungen wie der einzelnen Naturobjecte, die auch als specielle Formen complexer Erscheinungen betrachtet werden können. Dadurch arbeitet sie einerseits der naturhistorischen Forschung in die Hände, der sich erst mit Hülfe der physikalischen Untersuchung eine tiefere Einsicht in die Beschaffenheit der Naturobjecte eröffnet; anderseits gewinnt sie Aufschluss über den Zusammenhang der einzelnen Erscheinungsgebiete und wird so zu allgemeineren Vorstellungen über deren Substrat und zu allgemeineren Naturgesetzen geführt.

In allen diesen Beziehungen ist die physikalische Abstraction eine Weiterführung der in der Mechanik geübten Abstractionsmethode, und sie ist mit dieser der mathematischen Abstraction am nächsten verwandt. Von der letzteren trennt sie nur jenes besondere Merkmal des mathematischen Verfahrens, wonach dasselbe überhaupt von dem physischen Object abstrahirt und bloss auf die zur Auffassung desselben erforderliche intellectuelle Thätigkeit Rücksicht nimmt. Dagegen haben beide Abstractionen dies mit einander gemein, dass sie nicht generalisiren, sondern isoliren. Die Mathematik scheidet aus den sinnlichen Erscheinungen die in sie eingehenden subjectiven Elemente von allgemeingültigem Charakter, die Zahlwerthe und Raumconstructionen, aus. Die in den letzteren bereits enthaltene Bewegungsanschauung aufnehmend, fügt dazu die Mechanik zwei auf alle physikalische Erfahrung anwendbare Begriffe, die Begriffe von Kraft und Masse. Die physikalische Abstraction führt auf ihren verschiedenen Gebieten immer nur zu speciellen Formen dieser Begriffe. Diesem Umstand verdankt die Mechanik ihre Stellung als die allgemeinere, zunächst der Mathematik

untergeordnete Disciplin. Hinsichtlich des Ursprungs ihrer Begriffe stehen aber Physik und Mechanik auf einem Boden: beide empfangen die Anregung zu ihren Abstractionen aus der objectiven Erfahrung, und zwar ist hier die Physik die vorausgehende Wissenschaft, weil sie die speciellere ist. Auf die einzelnen Begriffe, welche die Physik von den verschiedenen Formen der Materie und ihren Bewegungsgesetzen gewinnt, gründet die Mechanik durch eine generalisirende Abstraction jene allgemeinen Begriffe von Kraft und Masse, die sie zu den geometrischen und phoronomischen Anschauungen hinzufügt. Da sich diese Generalisation nur allmählich vollziehen konnte, so hat die Mechanik in ihren Anfängen noch ganz den Charakter eines Zweigs der Physik: sie fliesst mit der Physik der Schwere zusammen und wird aus dieser Verbindung erst unter dem Miteinfluss geometrischer und phoronomischer Betrachtungen getrennt.

Mit der isolirenden vereinigt sich aber auch in der Physik die generalisirende Abstraction. Wie die Mechanik von allen einzelnen Kraftformen und von den specifischen Unterschieden der materiellen Substanz absieht, um bloss die allgemeinen Begriffe von Kraft und Masse zurückzubehalten, so vollzieht sich innerhalb der Physik selbst schon ein allmählicher Uebergang von den besonderen zu den allgemeineren Begriffen und Gesetzen. Für die wissenschaftliche Entwicklung der Physik ist es aber charakteristisch, dass hier die Generalisation stets die nachfolgende Abstractionsform ist. Die Galilei'schen Fallgesetze, die Kepler'schen Gesetze sind Erzeugnisse einer isolirenden Abstraction, das Newton'sche Gravitationsgesetz dagegen ist durch eine Generalisation aus diesen Gesetzen hervorgegangen. Indem man das Gravitationsgesetz hinwiederum mit andern einzelnen Gesetzen der Fernewirkung zusammennimmt, lässt sich daraus als letzte Verallgemeinerung das Gesetz der Abnahme der fernwirkenden Kraft mit dem Quadrat der Entfernung gewinnen. Der letztere Begriff gehört aber bereits der allgemeinen Mechanik an, da in ihm von den besonderen Bedingungen der einzelnen Naturerscheinungen abgesehen wird. Auf diese Weise führt überhaupt die physikalische Generalisation stets bei einem bestimmten Punkte aus dem Gebiete der Physik in das der Mechanik. Dieser Grenzpunkt ist daran leicht zu erkennen, dass über ihn hinaus die Verallgemeinerung eine rein begriffliche ist, während, so lange sie sich auf physikalischem Gebiete bewegt, der allgemeinere Begriff zugleich eine reale Bedeutung besitzt, insofern er die gemeinsame Ursache für eine Anzahl verschiedener Erscheinungen bezeichnet. So ist die Gravitation die gemeinsame Ursache der irdischen Schwere und der Planetenbewegungen; die nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen wirkende Kraft ist aber eine bloss begriffliche Conception, der in der Wirklichkeit keine gemeinsame Ursache der Erscheinungen, die ihr subsumirt werden können, entspricht. Ebenso beruht die Annahme einer Wellenbewegung des Aethers auf Grund der übereinstimmenden Gesetze der Fortpflanzung des Lichts und der strahlenden Wärme auf einer realen Gene-

ralisation, der allgemeine Begriff einer Wellenbewegung dagegen hat nur eine begriffliche Bedeutung, und die Untersuchung der abstracten Gesetze dieser Bewegung fällt darum dem Gebiet der Mechanik anheim. In allen diesen Beziehungen bewährt die Mechanik ihre vermittelnde Stellung zwischen der Physik und den mathematischen Wissenschaften. Die Generalisationen der Physik werden in dem Momente zu mechanischen Abstractionen, wo sie die unmittelbare Beziehung zu concreten Erfahrungen verlieren, so dass nur jene Reflexion auf die intellectuelle Form zurückbleibt, welche überall den Charakter der mathematischen Abstraction ausmacht. Von der reinen Mathematik unterscheidet sich aber die Mechanik wiederum dadurch, dass ihre Abstractionen nicht schon bei den allgemeinen Formen der Erfahrung beginnen, sondern erst an die specifisch physikalische Erfahrung, an die Wahrnehmung der verschiedenen Formen natürlicher Vorgänge und ihre Beziehung auf gemeinsame Ursachen, sich anschliessen.

Mit Rücksicht auf ihr Verhältniss zur vorausgehenden isolirenden Abstraction hat die Generalisation der physischen Gesetze eine gewisse Verwandtschaft mit der Umkehrung jenes ersteren Verfahrens, mit der Colligation. Beide führen in verschiedener Richtung die Untersuchung, die mit der Isolation begonnen, weiter, und beide sind Verbindungsformen ursprünglich getrennter Untersuchungsgebiete, deren charakteristischer Unterschied hauptsächlich darin liegt, dass nur die Generalisation zugleich Abstraction ist. Während die Colligation verschiedenartige Erscheinungen an demselben Object verbindet, ohne dabei irgend einen Bestandtheil dieser Erscheinungen zu eliminiren, verknüpft die physikalische Generalisation gleichartige Erscheinungen an verschiedenen Objecten, indem sie zugleich diejenigen Elemente eliminirt, in denen die betreffenden Erscheinungen sich unterscheiden. Uebrigens kann auch die Colligation zu neuen Abstractionen Anlass bieten, indem sie aus der Regelmässigkeit der Verbindung gewisser Erscheinungen allgemeinere Voraussetzungen gewinnt, welche über diese Verbindung Rechenschaft geben. So lassen sich z. B. die Erscheinungen der Cohäsion, der Lichtbrechung, der Leitung der Wärme und Elektricität, welche ein Körper zeigt, vereinigen, um daraus ein allgemeines Schema seiner Molecularstructur zu gewinnen. Wesentlich gefördert werden die auf solcher Grundlage ausgeführten Abstractionen, wenn es möglich ist, die verschiedenen Erscheinungsgebiete auch experimentell zu verknüpfen, indem man also z. B. den Einfluss ermittelt, welchen die Erwärmung des Krystalls auf seine optischen Eigenschaften besitzt. In diesem auf die Colligation der Erscheinungen folgenden Abstractionsverfahren begegnen uns die Eigenschaften der isolirenden Abstraction wieder, jedoch mit einer eigenthümlichen Umgestaltung, die für die allgemeinsten Begriffe der Physik charakteristisch ist. In den Vorstellungen über die Constitution der Körper, die zum Zweck der Erklärung der Erscheinungen entwickelt werden, abstrahirt man nämlich von allen denjenigen Eigenschaften der materiellen

Substrate, die für die betreffende Erklärung nicht nothwendig in Rücksicht gezogen werden müssen. In diesem Sinne betrachtet die kosmische Gravitationstheorie die Weltkörper als Punkte, in denen die von ihnen ausgehenden Wirkungen concentrirt gedacht werden. Die Molecularphysik benützt schematische Vorstellungen, in denen die zur Ableitung der einzelnen Thatsachen nothwendigen Voraussetzungen auf ihren einfachsten anschaulichen Ausdruck gebracht sind. Sie betrachtet die Körper bald als absolut homogene Massen, deren einzelne Theile Wirkungen auf einander ausüben, die nach einem bestimmten Gesetze von ihren Entfernungen abhängen, bald als Complexe physischer Punkte, die anziehend oder abstossend auf einander wirken, oder für die bestimmte Bewegungszustände vorausgesetzt werden, u. s. w. In allen diesen Fällen ist man sich bewusst, dass solchen Abstractionen höchstens eine annähernde Gültigkeit für die Erfahrung zukommen kann. Die Abstraction selbst ist eine isolirende, insofern bei ihr ausschliesslich auf die für die Erklärung gewisser Erscheinungen wesentlichen Eigenschaften der Substanzen Rücksicht genommen wird. Sie unterscheidet sich aber von jener Abstraction, welche den Anfang der physikalischen Untersuchung bildet, dadurch, dass sie sich nicht auf die Erscheinungen selbst bezieht, sondern auf die Voraussetzungen, die man zu ihrer Erklärung erforderlich hält. Es herrscht daher bei dieser Abstraction eine viel grössere Willkür; denn unter Umständen können abstracte Voraussetzungen von verschiedener Beschaffenheit den empirischen Forderungen genügen. Namentlich aber zeigt es sich, dass sich diese hypothetischen Abstractionen unter dem Einfluss der Colligation der Thatsachen verändern. Indem die letztere regelmässige Beziehungen kennen lehrt zwischen ursprünglich getrennt gehaltenen Erscheinungsgebieten, müssen auch die abstracten Begriffe über das materielle Substrat der Vorgänge jenen Beziehungen genügen. Auf diese Weise entsteht schliesslich die Forderung, die letzten Abstractionen der Physik so zu gestalten, dass in ihnen zwar keine überflüssige Voraussetzung gemacht ist, dass sie aber doch über alle Erscheinungen Rechenschaft geben, welche die wirklichen Naturkörper unserer Beobachtung darbieten.

Die Abstractionen dieser letzten Stufe der physikalischen Untersuchung bilden die Grundlage für die Deduction der Naturerscheinungen. So ist es die isolirende Abstraction, die in ihren verschiedenen Formen zugleich den verschiedenen logischen Methoden der physikalischen Forschung parallel geht. Durch Trennung der Erscheinungen leitet sie die Induction ein und begleitet sie auf allen ihren Stadien; mittelst der Bildung abstracter Voraussetzungen über das Substrat der Erscheinungen eröffnet sie das deductive Verfahren und bildet einen wesentlichen Bestandtheil der theoretischen Naturerklärung.

### e. Die physikalische Deduction.

Nachdem durch Analyse, Induction und Abstraction die allgemeinen Voraussetzungen über die Grundlagen bestimmter Naturvorgänge sowie die Gesetze, denen sie folgen, gewonnen sind, beginnt das Geschäft der physikalischen Deduction. Diese kann zwei Methoden einschlagen. Als synthetische Deduction vermittelt sie die Erklärung der zusammengesetzten Erscheinungen durch Verbindung einfacher Annahmen, die entweder aus der Erfahrung abstrahirt oder zum Zweck der Deduction hypothetisch eingeführt werden. Als analytische Deduction entwickelt sie die einzelnen Erscheinungen und deren specielle Gesetze durch Zerlegung der allgemeinen Gesetze, unter denen sie als besondere Fälle enthalten sind. Da nun einfache Annahmen in der Regel durch eine Analyse der zunächst in einer mehr oder weniger verwickelten Gestalt gegebenen concreten Erfahrungen gewonnen werden, und da umgekehrt die allgemeinen aus der Verbindung specieller Gesetze zu entstehen pflegen, so setzt überall die synthetische Deduction eine analytische Untersuchung und dagegen die analytische Deduction ein synthetisches Verfahren voraus; auch kann es vorkommen, dass beide Methoden theils mit einander, theils mit inductiven Erläuterungen abwechseln.

Die synthetische Deduction physikalischer Thatsachen ist in ihrer historischen Entwicklung wesentlich durch das Beispiel der Mathematik bestimmt worden. Die physikalische Untersuchung selbst würde niemals zu jenem Beweisverfahren geführt haben, wie es in den Arbeiten eines Newton und Huygens herrscht und lange Zeit als die mustergültige Darstellungsform auch in der Physik galt. Vielmehr ist es der äussere Einfluss der geometrischen Demonstrationsmethode Euklid's, der sich hier das widerstrebende Material der physikalischen Deduction dienstbar gemacht hat. Gerade das bedeutendste Werk dieser Richtung, Newton's »Principien der mathematischen Naturphilosophie«, zeigt dies in der augenfälligsten Weise. Die Definitionen und Axiome, welche Euklid an die Spitze seiner Elemente und ihrer Hauptabschnitte stellt, bieten für die Auffassung keinerlei Schwierigkeiten; sie erzwingen sich durch die anschauliche Beschaffenheit der Objecte, auf die sie sich beziehen, unmittelbare Anerkennung, so dass sie selbst für einen elementaren Lehrgang als naturgemässe Ausgangspunkte angesehen werden können. Ganz anders verhält es sich mit den Definitionen der Masse, der Geschwindigkeit und der Kraft und mit den drei mechanischen Axiomen, auf die Newton seine Entwicklungen gründet. (S. 252.) Sie sind von so abstracter Natur, dass an eine unmittelbare Nachweisung derselben in der Anschauung nicht zu denken ist, und sie stützen sich so sehr auf Inductionen, die erst auf dem Wege wissenschaftlicher Zergliederung möglich sind, dass eine Begründung mittelst dieser Inductionen nicht entbehrt werden kann. Dies macht sich denn auch deutlich in Newton's Darstellung geltend. Jene Begründungen

die ihm die gewählte systematische Form den Principien voranzustellen verbietet, sieht er sich genöthigt in ausführlichen Anmerkungen nachfolgen zu lassen. So schliessen sich an seine Definitionen Auseinandersetzungen über absolute und relative Zeit, absoluten und relativen Raum, wirkliche und scheinbare Bewegung, über den Begriff der Ursache und seine physischen Anwendungen; und die mechanischen Axiome erläutert er, hinweisend auf die Versuche von Galilei, Wren, Wallis und Huygens, durch experimentelle Erfahrungen. Alle diese Betrachtungen besitzen einen inductiven und zugleich analytischen Charakter. In diesem Sinne bilden sie den näheren Beleg zu der von Cotes in der Vorrede zur zweiten Auflage der Principien gemachten Bemerkung, dass die Methode eine zweifache, eine analytische und eine synthetische, sei: die Kräfte der Natur und ihre einfachen Gesetze würden aus einigen ausgewählten Erscheinungen mittelst der Analyse abgeleitet und dann mittelst der Synthese als Eigenschaften der übrigen Erscheinungen dargelegt. Wenn dies der naturgemässe Entwicklungsgang der synthetischen Deduction ist, so wird aber augenscheinlich die Darstellung desselben durch die unveränderte Annahme der Euklidischen Demonstrationsform beeinträchtigt, da diese für jene grundlegende Analyse keinen Platz lässt, so dass die letztere an einer ihrer Bedeutung nicht entsprechenden Stelle Unterkunft suchen muss.

Ein weiterer Uebelstand dieser Demonstrationsform tritt in der Art der Verwendung von Hülfslehren hervor, welche für die Deduction nicht entbehrt werden können, aber doch dem Gegenstand derselben eigentlich fremd sind. Dieser Uebelstand wird um so fühlbarer, je zahlreicher die Voraussetzungen werden. Schon Euklid's Elemente bringen fast die ganze damals bekannte Arithmetik in der Form einer Einschaltung, welche zu denjenigen geometrischen Messungsaufgaben, deren Lösung nur mittelst der Kenntniss der Zahlen möglich ist, vorbereiten soll. In den physikalischen Darstellungen, welche die synthetische Methode wählen, nehmen solche Einschaltungen und Vorbereitungen in der Regel noch einen grösseren Raum ein. So eröffnet Newton das erste Buch seiner Principien mit einer rein mathematischen Abhandlung »über die Methode der ersten und letzten Verhältnisse«, und der ganze Inhalt der beiden ersten Bücher, der die reine Mechanik behandelt, namentlich des ersten, verfolgt sichtlich den Zweck, die Entwicklungen des dritten Buchs über das Weltsystem vorzubereiten. Denn mit Rücksicht hierauf werden von Anfang an die mechanischen Probleme ausgewählt. Die Bewegungen von Körpern durch Centripetalkräfte, in excentrischen Kegelschnitten, in beweglichen Bahnen, die Bewegungen kugelförmiger Körper, welche durch Centripetalkräfte gegen einander hingezogen werden, u. s. w., alle diese Probleme sind so beschaffen, dass bei dem Uebergang zu den speciellen Bedingungen des Weltsystems nur noch die Einführung einzelner durch die Erfahrung gegebener Data, nirgends mehr die Lösung einer neuen mechanischen Aufgabe erfordert wird. Wohl aber wird bei diesem abschliessenden Theile der

Darstellung von neuem das Bedürfniss nach einer Herbeiziehung der Induction fühlbar; denn erst die durch die letztere ermittelten Thatsachen gestatten die Anwendung der zuvor gewonnenen allgemeinen mechanischen Sätze auf die concreten Erscheinungen. Da nun solche einzelne Data der Erfahrung bei der synthetischen Deductionsmethode in die Demonstration der einzelnen Lehrsätze nicht wohl eingeführt werden können, weil das gesammte Material, über das der Beweis des Lehrsatzes verfügt, als gegeben in vorangegangenen Sätzen vorausgesetzt ist, so sieht sich Newton genöthigt, jenen Daten der Erfahrung eine ähnliche Stellung anzuweisen wie zuvor den Definitionen und Axiomen: er stellt sie unter dem Titel »Erscheinungen« neben einigen allgemeinen methodischen Regeln über die Erforschung der Natur an die Spitze des dritten Buchs der Principien. Darin liegt freilich insofern keine Incongruenz, als jene die Mechanik einleitenden Sätze ebenfalls durch Induction begründet werden; immerhin handelt es sich dort um allgemeinste Principien, hier um specielle, meistens in einzelnen numerischen Werthen auszudrückende Thatsachen.

In vielen Fällen hat übrigens eine solche kurze und beiläufige Ergänzung des synthetischen Ganges durch Ausführungen von inductivem Charakter dem Bedürfnisse nach anschaulicher Begründung, welches besonders bei der Darstellung neuer physikalischer Lehren obwaltet, nicht Genüge geleistet, sondern die Urheber derselben sahen sich gedrungen, inductiven Entwicklungen und analytischen Deductionen einen grösseren Spielraum zu lassen, wodurch die letzteren nun als völlig selbständige Begründungen der synthetischen Deduction, die ihnen entweder vorausgehen oder nachfolgen kann, gegenübertreten. Ein hervorragendes Beispiel hierfür bilden Galilei's Discorsi*). Wie die Begabung dieses grossen Physikers eine in eminentem Masse analytische ist, so bevorzugt er auch durchaus die analytische Deductionsmethode, in die er jedoch theils inductive Entwicklungen, theils kritische und polemische Ausführungen einstreut. Dadurch erscheint der in der Zeit der Wiedererneuerung des Platonismus beliebt gewordene Dialog bei ihm als eine nicht bloss äusserlich angeeignete, sondern dem inneren Gedankengang vollkommen angepasste Darstellungsform. Im dritten und vierten Tag der Discorsi wird aber diese Form durch synthetische Deductionen in Euklidischer Weise unterbrochen, für welche zugleich die lateinische Sprache gewählt ist, während der ungezwungenere Dialog in leichtem Italienisch dahinfliesst. Dieser dritte und vierte Tag handeln von den Bewegungen schwerer Körper, und die einleitenden Worte Galilei's verrathen deutlich, dass er mit Absicht gerade den wichtigsten Theil seiner Forschungen in einer Anzahl streng formulirter Axiome und Theoreme zusammenfasst. Aber der Dialog wird durch die so geänderte Form der Darstellung nicht ganz unterdrückt. Wo es nöthig scheint, setzt er in der Form einer Unterhaltung über die vorgetragenen Sätze ein, um dieselben näher

*) Opere di Galileo Galilei, edit. E. Albèri, t. XIII.

zu erläutern und dem Leser den analytischen Gedankengang vorzuführen, durch welchen sie gefunden sind. Uebrigens wählte auch Newton, der die synthetische Demonstrationsmethode so hoch schätzte, in der früher von ihm verfassten populären Abhandlung über das Weltsystem, die den Principien beigegeben ist, einen vorzugsweise analytischen Weg. Er war eben der Ueberzeugung, dass die synthetische Methode zwar die logisch strengere, aber desshalb die schwierigere sei, weil die Resultate selbst immer analytisch gefunden würden. In der That war diese Ansicht gegenüber jener Handhabung der analytischen Deduction, wie sie noch zu Newton's Zeit auf physikalischem Gebiet die herrschende war, und für die uns Descartes' Naturphilosophie ein augenfälliges Beispiel darbietet, vollkommen berechtigt. Gerade sie verzichtete nämlich fast ganz auf die Anwendung mathematischer Hülfsmittel. Höchstens bediente sie sich einfachster arithmetischer Operationen oder geometrischer Constructionen von ähnlicher Beschaffenheit, wie sie auch das synthetische Verfahren zu Hülfe zog. Noch aber hatte sie sich die mathematische Analysis nicht dienstbar gemacht. Erst die mathematische Physik des 18. Jahrhunderts vollzog diesen schon durch Descartes' analytische Geometrie nahe gelegten und durch die Erfindung der Infinitesimalmethode vollends unvermeidlich gewordenen Schritt. Hiermit war nun aber auch der einzige Grund hinweggefallen, der gegen die sonstigen Nachtheile der synthetischen Methode ins Gewicht fiel: die mit den Hülfsmitteln der mathematischen Analysis ausgerüstete analytische Deduction liess an Strenge nichts zu wünschen übrig, und sie verband damit den grossen Vorzug, dass sie nicht bloss fertige Resultate in eine beweiskräftige Form brachte, sondern dass sie sich vor allem als ein wichtiges Hülfsmittel der Forschung selbst erwies.

Die analytische Deduction der Naturerscheinungen geht von Erfahrungsgesetzen oder von hypothetischen Voraussetzungen allgemeinster Art aus und sucht aus denselben successiv die einzelnen Erscheinungen und die speciellen Gesetze, von welchen dieselben beherrscht werden, abzuleiten. Es geschieht dies durch die Zerlegung jener allgemeinen Sätze in die besonderen Fälle, die unter ihnen enthalten sind. Der Weg, der hier eingeschlagen wird, besitzt demnach den Charakter einer Begriffsanalyse. Er unterscheidet sich aber von Begriffsanalysen anderer Art durch die anschauliche Form, welche die Allgemeinbegriffe der physikalischen Deduction vermöge der Forderung, dass sie zur Ableitung bestimmter Naturerscheinungen dienlich sein sollen, besitzen müssen. Schliesslich enthalten nämlich jene Allgemeinbegriffe Voraussetzungen, die sich theils auf die Beschaffenheit des materiellen Substrates, theils auf die causalen Beziehungen der Theile dieses Substrates zu einander beziehen. Da nun die Materie von der Physik als die unveränderliche in räumlicher Form gegebene Grundlage der Erscheinungen angesehen wird, die Gesetze ihrer Wechselwirkungen aber wegen der qualitativen und quantitativen Constanz der Materie nur die Form von Bewegungsgesetzen besitzen können, so

wird durch die Festhaltung dieser allgemeinen Voraussetzungen jene Forderung der Anschaulichkeit bereits erfüllt, und im Einzelnen haben die Prämissen der Deduction nur noch der Maxime zu folgen, dass die aus ihnen abgeleiteten Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen müssen.

Die Zergliederung der allgemeinen Voraussetzungen, in welcher das Wesen der analytischen Deduction besteht, vollzieht sich nun, wie bei jeder Begriffsanalyse, durch die Einführung specieller Bedingungen, mittelst deren man sich den in der wirklichen Erfahrung gegebenen Verhältnissen schrittweise zu nähern sucht. Eine solche Einführung besonderer Bedingungen kann stets als ein Verfahren der Substitution angesehen werden, indem man dabei für solche Begriffselemente, denen in den ursprünglichen Voraussetzungen eine unbestimmtere und darum allgemeinere Bedeutung angewiesen war, speciellere Begriffe einführt, die irgend einem concreten Fall der physikalischen Erfahrung entsprechen. Dieses Substitutionsverfahren zerfällt in der Regel wieder in zwei Acte: in einen ersten, durch den aus der allgemeinen Voraussetzung ein einzelnes Erscheinungsgebiet nur in abstracter Weise abgeleitet wird, so dass die concreten Werthe der Erscheinungen noch nicht in Betracht kommen, sondern die in den Ausdruck der Gesetze eingeführten Grössen eine unbestimmte Bedeutung bewahren. Daran schliesst sich dann als zweiter Act die Einführung concreter Werthe in die abstract formulirten Gesetze und die damit zusammenhängende numerische Feststellung gewisser constanter Grössen, die für die messende Vergleichung der Erscheinungen wesentlich sind. Der erste dieser Acte fällt noch vollständig in den Bereich der reinen Deduction. Wenn auch bei der Substitution specieller Bedingungen eine Rücksicht auf die Erfahrung niemals fehlen kann, so ist doch diese hier keine andere als bei der Gewinnung der allgemeinsten Prämissen der Deduction: es werden Annahmen aufgestellt, von denen man erwartet, dass sie sich als conform den in der Erfahrung gegebenen Bedingungen erweisen werden, wobei aber doch der wirkliche Nachweis dieser Conformität erst durch das Gelingen der Deduction erbracht wird, zu welchem Gelingen immer auch noch der zweite Act der Substitution, die Einführung concreter Einzelwerthe an Stelle der bis dahin festgehaltenen abstracten Grössen, erfordert wird. Demgemäss beruht dieser zweite Act auf einer Herbeiziehung der Induction. Die fraglichen Einzelwerthe sind numerische Data, welche durch Beobachtung oder Experiment festgestellt werden müssen. Es kann nun freilich geschehen, dass sie schon vor dem Beginn der Deduction durch eine derselben vorangehende Induction gefunden wurden; aber ebenso oft ereignet es sich, dass sich die Induction erst an die analytische Deduction anschliesst, oder dass mindestens eine Revision der früher gewonnenen experimentellen Data vorgenommen werden muss, weil die deductiv abgeleiteten Gesetze erst die exacten Fragestellungen enthalten, deren empirische Beantwortung die Theorie der Erscheinungen abschliesst.

Die Induction, welche diese Vollendung der analytischen Deduction

bewirkt, verfolgt regelmässig wieder zwei Ziele. Erstens sucht sie eine Bestätigung für die Voraussetzungen der Deduction zu gewinnen, indem sie nachweist, dass die experimentell gefundenen Thatsachen mit den abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen. Dies ist die verificirende Induction, in welcher wesentlich nur relative Grössenbestimmungen vorkommen, da aus abstracten Voraussetzungen zwar Schlüsse über die quantitativen Verhältnisse der Naturerscheinungen, niemals aber solche über die absoluten Werthe gewisser Wirkungen gewonnen werden können. Sodann sucht man die abstracten Werthe, die in die abgeleiteten Naturgesetze eingehen, durch die Messung zu fixiren, um auf diese Weise die Constanten zu ermitteln, in denen die Wirkung bestimmter Ursachen ihren quantitativen Ausdruck findet. Dies können wir die determinirende Induction nennen. Bei ihr handelt es sich stets um absolute Massbestimmungen, durch welche die concrete Grösse der Erscheinungen, über welche der abstracte Inhalt der Gesetze nichts aussagt, festgestellt werden soll. Ueberblicken wir demnach den ganzen Verlauf der analytischen Deduction sammt ihren Vorbereitungen und Ergänzungen, so lässt sich derselbe in vier Stadien trennen, von denen jedoch nur die zwei ersten der eigentlichen Deduction, die zwei letzten der auf sie folgenden Induction angehören. Sie sind: 1) die Aufstellung abstracter Voraussetzungen, 2) die Ableitung einzelner Gesetze aus diesen Voraussetzungen, 3) die Verification der Gesetze, und 4) die Determination der in die Gesetze eingehenden Constanten der Naturerscheinungen.

Bei Deductionen verwickelterer Art, bei welchen die abgeleiteten Thatsachen meistens wieder in verschiedene Gruppen zerfallen, deren jede besondere Voraussetzungen erfordert, pflegt dieser regelmässige Verlauf Abänderungen zu erfahren, die sich dadurch oft noch mannigfaltiger gestalten, dass eine möglichst vollständige Darstellung naturgemäss auch jene vorbereitende Induction, die dem Beginn der analytischen Deduction vorangeht, herbeizuziehen sucht, um durch sie von vornherein die Aufstellung der Voraussetzungen zu rechtfertigen. Da nun die Verification und die Determination der Grössenwerthe der Erscheinungen ebenfalls der Induction zufallen, so kann es geschehen, dass die letztere der eigentlichen Deduction nur einen verhältnissmässig kleinen Raum übrig lässt. Aber gerade hierin verräth sich nicht zum wenigsten, wie sehr die analytische Deduction den Bedürfnissen der Naturerklärung angepasst ist, indem sie es gestattet, einen solchen Wechsel der logischen Hülfsmittel in jedem Augenblick eintreten zu lassen, wo er durch die Beschaffenheit des Gegenstandes gefordert ist, ohne dass dadurch der naturgemässe Gang der Entwicklungen unterbrochen wird.

Ein hervorragendes Beispiel dieser Art ist schon das bahnbrechende Werk der neueren Naturwissenschaft, die Schrift des Copernikus »De revolutionibus orbium coelestium«. Das erste Buch bringt die Begründung der allgemeinen Voraussetzungen des neuen Weltsystems. Abgesehen von specu-

lativen Betrachtungen, denen wir heute keine bindende Kraft mehr beimessen, und die sich hauptsächlich auf die Forderungen der Vollkommenheit und der Symmetrie in der Anordnung der Gestirne beziehen, besteht diese Begründung aus einer Reihe von Inductionen. Die erste derselben bringt den Nachweis für die kugelförmige Gestalt der Erde, eine zweite stellt fest, dass die Erde nicht den Mittelpunkt der Planetenbahnen bilde, und eine dritte zeigt, dass die Grösse der Erde verschwindend im Verhältniss zu der Entfernung der Fixsterne sein müsse. Theils auf diese Gründe, theils auf den Nachweis der Unzulänglichkeit der Ptolemäischen Anschauung stützt dann Copernikus seine im 10. und 11. Capitel aufgestellte neue Hypothese von der Ordnung der Himmelskreise und von der dreifachen Bewegung der Erde. Hiermit ist die allgemeine Voraussetzung für die Deduction der Erscheinungen gewonnen. Doch setzt die letztere noch einige geometrische Hülfsmittel voraus, welche in den letzten Capiteln des ersten Buchs in der von der Entwicklung der astronomischen Lehren völlig abweichenden synthetischen Form der Euklidischen Demonstration auseinandergesetzt werden. Nun beginnt erst mit dem zweiten Buch die eigentliche Deduction. Diese gliedert sich aber wieder in mehrere Theile, bei deren jedem sich sofort die Verification und Determination der Erscheinungen mit der Ableitung aus der vorangestellten Grundhypothese verbindet. In dieser Weise umfasst das zweite Buch die Theorie der täglichen Bewegungen der Erde, das dritte die der jährlichen Bewegungen und der secularen Veränderungen, das vierte die Bewegung des Mondes, das fünfte und sechste die Planetenbewegungen. Man findet hier überall das Beobachtungsmaterial an den geeigneten Stellen eingefügt in die Darstellung. Dennoch bringt es der logische Gang der letzteren mit sich, dass in der Auseinandersetzung der einzelnen Lehren die verschiedenen Stadien der analytischen Deduction meistens ihre normale Stellung bewahren.

Hatten wir hier das Beispiel einer Naturerklärung vor uns, welche sich auf das engste an Thatsachen der Erfahrung anschliesst und darum eines reichen Unterbaues von Inductionen sowie einer fortwährenden Beihülfe der letzteren bedarf, so liefert dagegen Descartes' Naturphilosophie den ersten umfassenden Versuch einer physikalischen Theorie, deren Voraussetzungen der inductiven Begründung fast ganz entbehren, so dass sie nur durch die nachträgliche Anpassung an die Erfahrung sich legitimiren können. Es wird gestattet sein, dieses Beispiel trotz seiner grossen Mängel hier anzuführen, da es für eine bestimmte Classe physikalischer Theorien eine prototypische Bedeutung gewonnen hat. In der That können wir zwei Hauptrichtungen unterscheiden, in denen seit den Anfängen der neueren Naturwissenschaft die physikalische Deduction sich bewegt. Die eine sucht im Sinne des grossen Werkes des Copernikus aus allgemeinen durch Induction gefundenen Erfahrungssätzen die Erscheinungen abzuleiten. Die bedeutendste Leistung in dieser Richtung, die übrigens für die Darstellung den synthetischen Weg wählt, sind Newton's Prin-

cipien. Die andere sucht aus willkürlichen oder auf speculativem Wege gewonnenen Annahmen die Thatsachen der Erfahrung zu entwickeln. Hier ist Descartes' Naturphilosophie das Vorbild, das später in zahlreichen mathematischen Theorien Nachfolge gefunden hat. Die Begründung, welche Descartes im Eingang des zweiten Theils seiner »Principien der Philosophie« von seinen Voraussetzungen über die Materie zu geben sucht, nimmt denselben, physikalisch betrachtet, kaum den Charakter willkürlicher Hypothesen, abgesehen von der strengen Leugnung des leeren Raumes und der Annahme der qualitativen Gleichartigkeit und Constanz der Materie, für welche zwar nicht die von Descartes geltend gemachten Gründe, aber doch bestimmte Motive der Anschauung eintreten. (Vgl. Bd. I, S. 493.) Zu dieser allgemeinen Hypothese kommen dann noch drei Bewegungsgesetze, von denen die zwei ersten mit den Galilei'schen Principien der Trägheit und der geradlinigen Bewegung identisch sind, während das dritte eine falsche Anwendung des speculativen Gesetzes von der Erhaltung der Quantität der Bewegung ist. Aber diese Bewegungsgesetze spielen keine erhebliche Rolle in der nachfolgenden Deduction. Indem die letztere sich auf qualitative Betrachtungen beschränkt, macht sie im wesentlichen nur von den vorausgegangenen Annahmen über die Constitution der Materie Gebrauch. Nach einander werden die verschiedenen Erscheinungsgebiete, die kosmischen Bewegungen, die geophysischen Thatsachen, Schwere, Wärme, Licht, Magnetismus, aus den angenommenen Elementen der Materie und ihren Wechselbeziehungen abgeleitet, indem der Verfasser, gemäss dem Princip der analytischen Deduction, darzuthun sucht, dass sie in dem aufgestellten Begriff der Materie bereits als nothwendige Folgen enthalten seien und darum aus ihm mittelst der Einführung einiger besonderer Voraussetzungen über die Lage- und Bewegungsverhältnisse der Elemente gewonnen werden könnten. Bei dieser Substitution ist dann freilich eine Anpassung an die durch die Erfahrung gegebenen Thatsachen nicht zu verkennen; immerhin tritt die Deduction mit dem Anspruche auf, dass die nachträgliche Induction ihr höchstens die Richtung anweise, für die erste Aufstellung der Voraussetzungen aber nirgends massgebend gewesen sei. Mit der Erklärung der einzelnen Erscheinungen verbindet sich ausserdem noch eine Art von Verification, bei der auf die Uebereinstimmung mancher Nebenumstände mit der angenommenen Grundhypothese hingewiesen wird, wogegen die determinirende Induction in diesem Fall wegen der qualitativen Natur der Entwicklungen keine Stelle findet. Der wesentlichste Unterschied dieser Anwendungsform der analytischen Deduction von der vorigen besteht offenbar darin, dass hier die vorbereitende Induction völlig hinwegfällt, da den aufgestellten Voraussetzungen eine ihnen vor jeder einzelnen physikalischen Erfahrung zukommende Nothwendigkeit beigemessen wird. Die spätere Entwicklung der Physik hat speculative Begründungen, wie sie zu diesem Zweck Descartes anwendet, allmählich ausgeschlossen. Nichts desto weniger hat sich diese Form der Deduction erhalten. Nur

wurden die gemachten Voraussetzungen entweder geradezu als willkürliche Hypothesen behandelt, die ihre Rechtfertigung nachträglich durch die gelingende Deduction der Erscheinungen erst erlangen müssten, oder man übertrug abstracte Voraussetzungen der reinen Mechanik unmittelbar auf das physikalische Gebiet, indem man das Princip der Einfachheit, welches bei der Gestaltung dieser Voraussetzungen massgebend gewesen war, auch auf die Modificationen anwandte, die mit ihnen zum Behuf der Anwendung auf bestimmte Erscheinungen nothwendig wurden.

Erst durch die Einführung der mathematischen Analysis ist es der analytischen Deduction möglich geworden, den Charakter der logischen Strenge, welchen bis dahin das synthetische Verfahren allein für sich in Anspruch nahm, mit den Vorzügen einer naturgemässen, ebensowohl der Untersuchung wie der Darstellung dienenden Gedankenentwicklung zu verbinden. Längere Zeit noch, nachdem die Analysis der Physik bereits völlig dienstbar geworden, dauerte es, bis das Vorurtheil, als ob die synthetische Methode allein die erforderliche Strenge gewähre, beseitigt war. Allmählich nur sprengte die mit den Hülfsmitteln der Analysis operirende Deduction die Form der synthetischen Demonstration. In den mechanischen und physikalischen Schriften eines Euler, eines Johann und Daniel Bernoulli spielt noch immer die Beweisführung in Euklidischer Manier eine hervorragende Rolle. In der Vorrede zu seiner Mechanik hat Euler dem synthetischen Verfahren vorgeworfen, dass es zwar von der Wahrheit der vorgetragenen Sätze überzeuge, dass es aber keine hinreichend klare Erkenntniss derselben verschaffe, und er hat seine eigene Darstellung als eine analytische bezeichnet, was sie in der That nach dem vorherrschenden Verfahren in der Behandlung der einzelnen Probleme auch ist. Gleichwohl trennt er den Stoff in der hergebrachten Weise in eine Reihe lose an einander gefügter Definitionen, Lehrsätze und Aufgaben und verkümmert sich dadurch gerade einen der grössten Vorzüge der analytischen Methode, den Zusammenhang der Untersuchungen. Zugleich bemerkt man aber, dass diese Aehnlichkeit mit Euklid oder Newton nur eine äusserliche bleibt. Weitaus den grössten Raum nehmen Aufgaben und ihre Lösungen ein. Axiome fehlen ganz; dafür besitzen die wenigen Lehrsätze, die im Eingang der Hauptabschnitte vorkommen, grossentheils einen axiomatischen Charakter, trotz der ihnen beigefügten ontologischen Scheinbeweise in Wolff'scher Art. Nun lässt sich die analytische Deduction eines einzelnen Falles aus den für ihn geltenden allgemeinen Gesetzen selbstverständlich immer leicht in die Form einer Problemstellung bringen, wo dann die Auflösung des Problems die eigentliche Deduction in sich schliesst. Dieses Uebergewicht der Aufgaben ist daher ein äusseres Zeichen dafür, dass hier eine Methode zu Grunde liegt, welche sich nur gezwungen der synthetischen Form fügt. Das nämliche gilt von andern analytischen Arbeiten des vorigen Jahrhunderts.

Einer der Ersten, die mit Erfolg die Fesseln einer überlebten Form ab-

streiften, ist Lagrange, dessen »Mécanique analytique« von massgebendem Einflusse auf die ganze nachfolgende Entwicklung der mathematischen Physik geworden ist. Obgleich dieses Werk sich nicht mit physikalischen Problemen im engeren Sinn beschäftigt, so mag wegen dieser mustergültigen Bedeutung für die jetzt herrschende Art der physikalischen Deduction hier der Gedankengang desselben skizzirt werden. Abgesehen von den historischen Einleitungen, welche jedem der beiden Haupttheile, der Statik und Dynamik, vorangestellt sind, ist in diesen selbst die Entwicklung eine vollständig analoge. Zunächst wird auf dem Wege einer vorbereitenden Induction dort ein allgemeines Gesetz des Gleichgewichts, hier ein allgemeines Gesetz der Bewegung mathematisch formulirt, aus welchem nun in der nachfolgenden Darstellung alle einzelnen statischen und dynamischen Gesetze analytisch entwickelt werden. Der abstracte Charakter der Mechanik bringt es in diesem Falle mit sich, dass die vorbereitende Induction nicht auf experimentelle Erfahrungen, sondern auf allgemeingültige Anschauungen sich berufen kann. Die Begründung, welche Lagrange von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt, hat durchaus den Charakter einer solchen Induction. Dieses Princip liefert ihm aber unmittelbar die allgemeine Formel für das Gleichgewicht irgend eines Systems, und mittelst einer weiteren Begriffsbestimmung über das Mass einer beschleunigenden Kraft, die sich auf eine ähnliche Induction stützt, gewinnt er im Eingang des zweiten Theils aus dem nämlichen Princip die Grundgleichung der Dynamik. Der ganze Aufbau der Mechanik vollzieht sich nun in der Form einer Analyse der an die Spitze gestellten Grundformeln. In der Statik wird die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts zunächst auf die fortschreitende, dann auf die drehende Bewegung eines Systems angewandt; es wird das Gleichgewicht in Bezug auf den Schwerpunkt eines solchen untersucht, und es werden die Fälle nachgewiesen, in denen die allgemeine Function, welche die Gleichgewichtsbedingungen ausdrückt, zu einem Maximum oder Minimum wird. Hierauf werden analytische Methoden entwickelt, mittelst deren die verwickelten Bedingungen des Gleichgewichts irgend eines beliebigen Systems stets auf den einfachsten Fall eines freien Systems zurückzuführen sind. Daran reiht sich naturgemäss die Lösung der hauptsächlichsten einzelnen statischen Probleme, welche wieder in dem verwickeltsten, darum aber in gewissem Sinne auch allgemeinsten Problem ihren Abschluss finden, nämlich in der Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen eines festen Körpers von beliebiger Gestalt, auf dessen sämmtliche Punkte irgend welche Kräfte einwirken. Alle diese Entwicklungen der Statik sind, abgesehen von der zu Grunde liegenden Induction, welche auf die unmittelbare Anschauung sich beruft und insofern einen mathematischen Charakter besitzt, noch von einem zweiten Begriff beherrscht, welcher aus einer mathematischen Abstraction hervorgegangen ist, von dem Begriff eines absolut festen Körpers. Wie dieser aus der empirischen Vorstellung der wirklichen festen Körper durch

Verwandlung ihrer relativen in eine absolute Unveränderlichkeit entstand, so kann nun aber auch der flüssige Körper zu einer ähnlichen Abstraction den Anlass bieten, indem man die Flüssigkeit als eine Masse betrachtet, deren Theilchen absolut beweglich, aber nicht zusammendrückbar sind. In der That entwickelt Lagrange aus dieser Voraussetzung und aus der allgemeinen Formel des Gleichgewichts die Grundgleichungen der Hydrostatik. In ähnlicher Weise werden aus der Grundgleichung der Dynamik zunächst die allgemeinen Eigenschaften der Bewegung abgeleitet, indem Lagrange nachweist, dass die früher vielfach als selbständige Ausgangspunkte aufgestellten dynamischen Principien, wie das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes, der Flächen, der lebendigen Kräfte u. s. w., analytisch aus jener Grundgleichung abgeleitet werden können. Hierauf zerlegt er die letztere in ein System von Differentialgleichungen, durch welche die Anwendung auf die einzelnen Probleme, deren Behandlung den Schluss des ganzen Werkes bildet, wesentlich erleichtert wird. Auch hier tritt endlich die Anwendung der allgemeinen dynamischen Gesetze auf eine Flüssigkeit als ein absolut labiles und incompressibles System von Theilchen hinzu. In dieser ganzen Darstellung besteht nun die Kunst der analytischen Deduction wesentlich darin, dass die allgemeinen Gleichungen durch angemessene Substitutionen in Ausdrücke für speciellere Gesetze verwandelt werden. Indem durch diese Substitutionen successiv den besonderen Bedingungen, die man sich eingeführt denkt, Rechnung getragen wird, entsteht die ganze Entwicklung aus der Zerlegung eines einzigen aus ursprünglicher Induction gewonnenen und in mathematische Form gebrachten Gesetzes. Es ist klar, dass eine derartige Ableitung einer umfangreichen Wissenschaft aus einem einzigen Grundgesetz ohne die Hülfsmittel der mathematischen Analysis unmöglich wäre. Indem sie es gestattet, den gebrauchten Symbolen die umfassendste Bedeutung zu geben, macht sie es gleichzeitig möglich, mit denselben alle Transformationen vorzunehmen, welche durch die speciellen Probleme gefordert werden.

Die analytische Mechanik ist nicht bloss durch ihre formale Ausbildung das mustergültige Beispiel für die Anwendung der analytischen Deduction in der Physik geworden, sondern sie hat auch durch ihren materiellen Inhalt die Grundlage aller auf diesem Wege entwickelten physikalischen Theorien gebildet. Das regelmässig hierbei eingeschlagene Verfahren besteht darin, dass man die abstracten Voraussetzungen der Mechanik in dem durch die betreffenden Erscheinungen geforderten Sinne abändert, hierbei aber sich gemäss dem Princip der Einfachheit stets mit der möglichst kleinen Abänderung begnügt, um erst, wenn dieselbe durch die Prüfung an der Erfahrung als nicht genügend befunden wird, zu weiteren Voraussetzungen zu schreiten. So giebt die Elasticitätstheorie die von der Mechanik festgehaltene Annahme absolut starrer Körper auf, indem sie voraussetzt, dass äussere Kräfte eine Verschiebung der kleinsten Theilchen eines festen Körpers hervorbringen. Sie bleibt aber bei der einfachsten

Annahme stehen, indem sie diese Verschiebung als so klein betrachtet, dass sie gegen die Dimensionen der Körper verschwindet, und dass sie daher durch eine lineare Function der Entfernung der Theilchen ausgedrückt werden kann, während alle höheren Potenzen verschwinden. Ebenso nimmt die Theorie der Capillarität an, dass die in der Hydrostatik vorausgesetzte absolute Beweglichkeit der Theilchen durch Cohäsionskräfte der Molecüle und durch Adhäsionskräfte gegenüber den Wandungen des Gefässes modificirt werde; sie macht aber hier wieder die einfachste Annahme, welche möglich ist, um den Erscheinungen zu genügen, indem sie voraussetzt, dass beiderlei Molecularkräfte nur in unmessbar kleinen Enfernungen wirken, und dass daher nur die Wandschichte und die freie Oberfläche einer Flüssigkeit unmittelbar der Capillarattraction unterworfen seien. Die Theorie der Schallschwingungen geht zunächst von der bereits für die Elasticitätslehre massgebenden Vorstellung aus, dass die Theilchen eines Körpers durch bestimmte Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage festgehalten werden; sie fügt derselben die einfache Annahme hinzu, bei der Entfernung aus der Gleichgewichtslage sei die beschleunigende Kraft dieser Entfernung proportional. Die so gewonnene Fundamentalgleichung kann nun in der verschiedensten Weise ergänzt, verändert und zerlegt werden, um auf complicirtere Fälle Anwendung zu finden. Sind die Schwingungsamplituden gross, so ersetzt man die einfache Annahme einer Proportionalität der beschleunigenden Kraft mit der Entfernung aus der Gleichgewichtslage durch die nächst einfache einer Function, welche neben der ersten auch die zweite Potenz der Entfernung enthält. Kommt der Widerstand der umgebenden Luft in Betracht, so fügt man der Fundamentalformel ein Glied bei, welches eine der Geschwindigkeit proportionale Verzögerung in der Richtung nach der Gleichgewichtslage ausdrückt, u. s. w. Wo die Deduction nicht an bestimmte der Beobachtung gegebene einfachste Erscheinungen anknüpfen kann, wie dies bei den Theorien von Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus der Fall ist, da kann es dann leicht geschehen, dass ganz verschiedene abstracte Voraussetzungen der reinen Mechanik die Ausgangspunkte für die Erklärung des nämlichen Erscheinungsgebietes abgeben. So bediente sich Fourier für seine Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern einfach der hydrodynamischen Voraussetzungen, indem er die Wärme als eine bewegte Flüssigkeit betrachtete; Poisson verwerthete die Gesetze der Licht- und Wärmestrahlung, indem er die Leitung als einen Vorgang intramolecularer Strahlung behandelte. In der Theorie des Lichtes suchte man, nachdem die Undulationshypothese recipirt worden war, zunächst von der in der Mechanik bereits geläufigen Vorstellung der Schwingungsbewegung in einem continuirlichen Medium auszugehen. Als jedoch die Entdeckung der Polarisation die Annahme der Transversalschwingungen erforderlich machte, führte diese auf die Voraussetzung von Aethermolecülen, die durch leere Zwischenräume getrennt seien. Die Bewegungsgleichungen eines solchen aus discreten Theilchen bestehenden

Mediums nahmen dann eine Form an, welche sie zur Ableitung wenigstens einer grossen Zahl der Lichterscheinungen besonders geeignet machte. Weiter noch wurde man im Gebiet der elektrischen Erscheinungen genöthigt sich von den einfachen Voraussetzungen zu entfernen, welche die Mechanik aus den allgemeinsten Eigenschaften der Naturkörper abstrahirt hat. Doch sind hier die Theorien zu unsicher, als dass sich schon entscheiden liesse, ob die definitive Gestaltung derselben sie nicht vielleicht wieder in eine nähere Beziehung zu den Principien der Mechanik bringt, als es gegenwärtig den Anschein hat.

Auf diese Weise ist die physikalische Theorie auf allen Gebieten aus den mathematischen Voraussetzungen der Mechanik durch eine allmähliche Hinzufügung weiterer Annahmen hervorgegangen, in deren Aufstellung man sich einerseits durch den Wunsch möglichster Annäherung an die abstracten mechanischen Vorstellungen, anderseits durch die Forderung der Uebereinstimmung der Folgerungen mit der Erfahrung bestimmen liess. Da nun die mechanischen Gesetze an sich für alle Naturerscheinungen gültig sein müssen, so kann eine solche Uebereinstimmung mit der Erfahrung nur dadurch bewirkt werden, dass die Physik an die Stelle der abstracten Annahmen über das Substrat der Bewegungen, welche die Mechanik im möglichsten Anschlusse an die Geometrie aufstellt, andere Annahmen über jenes Substrat sowie specifische Voraussetzungen über die Bewegungsgesetze desselben treten lässt. Der empirische Inhalt der physikalischen Forschung findet daher schliesslich seinen allgemeinsten Ausdruck in den hypothetischen Voraussetzungen über die Materie und in den Gesetzen für den Zusammenhang der Naturerscheinungen. Gleichwohl geht schon aus jener gemischten Entstehungsweise der physikalischen Deductionen hervor, dass sowohl der Begriff der Materie wie die allgemeinsten Naturgesetze nicht schlechthin Abstractionen aus der Erfahrung, sondern dass sie diejenigen Abstractionen sind, welche den mathematischen und mechanischen Anforderungen in möglichst hohem Masse entsprechen. Insofern nun in Geometrie und Mechanik der Antheil der reinen Anschauung an der äussern Erfahrung enthalten ist, finden in dieser Abhängigkeit zugleich die früher erörterten erkenntnisstheoretischen Beziehungen des Substanz- und Causalbegriffs zu den Anschauungsformen ihren geläuterten wissenschaftlichen Ausdruck. (Vgl. Bd. I, S. 551 f.)

## 2. Die Hülfsmittel der physikalischen Forschung.

Der natürliche Anfang aller physikalischen Beobachtung ist die unmittelbare Sinneswahrnehmung. So bewundernswerth aber auch unsere Sinneswerkzeuge den praktischen Zwecken des Lebens angepasst sind, so wenig genügen sie den Bedürfnissen exacter Beobachtung. Durch die will-

kürliche Beweglichkeit des Auges, durch seine leichte Accommodation für Nähe und Ferne, durch die combinirte Function beider Augen bei der Tiefenwahrnehmung ist das Gesichtsorgan in unübertrefflicher Weise dazu geschickt, uns eine rasche Orientirung über die räumlichen Verhältnisse der umgebenden Aussenwelt zu ermöglichen. Vermöge der wunderbaren Vorrichtungen des inneren Ohrs zur Zerlegung des Schalls und zur Dämpfung der Schallschwingungen vermag unser Gehörorgan mit erstaunlicher Leichtigkeit eine grosse Zahl gleichzeitiger Klänge zu unterscheiden und dem schnellsten Wechsel auf einander folgender Schalleindrücke ohne Verwirrung zu folgen. Aber hinsichtlich der Schärfe des Bildes, der Vermeidung der Farbenzerstreuung, der Feinheit der Einstellung ist das Auge ein optisches Werkzeug von mässiger Güte, und zu genauen räumlichen Messungen ist es schon desshalb ungeeignet, weil es meistens nicht gestattet, die zu messenden Objecte direct zu vergleichen, sondern sich mit ihrer successiven Schätzung begnügen muss. Ebenso verschafft uns das Gehör nur ungenaue Vorstellungen von der Stärke des Schalls, und über die Form der Klangbewegungen giebt es unmittelbar gar keinen Aufschluss. Noch weniger genügen die übrigen Sinne den Ansprüchen exacter Messung, und diese Mangelhaftigkeit der äusseren Werkzeuge der Beobachtung wird schliesslich verstärkt durch die Unsicherheit, mit der unser Bewusstsein den zeitlichen Verlauf der Erscheinungen quantitativ zu schätzen vermag. Dadurch bleibt aber eine der wichtigsten Aufgaben der physikalischen Forschung, die Zeitbestimmung der Ereignisse, fast ganz unerledigt. So wird von allen Seiten her die Naturbeobachtung zur Erfindung künstlicher Werkzeuge angetrieben, welche unsere Sinne bei der Untersuchung der Erscheinungen unterstützen sollen. Dieses Bedürfniss ist dort am frühesten fühlbar geworden, wo die natürlichen Hülfsmittel am meisten zu wünschen übrig lassen, bei den schliesslich von psychologischen Factoren abhängigen Bestimmungen der Ausdehnung räumlich oder zeitlich getrennter Objecte und der relativen oder absoluten Dauer der Ereignisse. Massstab und Cirkel, die einfachsten Werkzeuge räumlicher Messung, diese frühesten Hülfsmittel der Mathematik, sind daher zugleich die ersten Apparate physikalischer Forschung; ihnen zunächst kommt der Gnomon, die primitive Sonnenuhr, als Werkzeug der Zeitmessung. Daran schliesst sich die Erfindung des Archimedes, die Wage, das Instrument der Massebestimmung der Körper. Viel später und zumeist unter dem directen Einflusse der experimentellen Richtung der neueren Physik sind die mannigfaltigen Vorrichtungen entstanden, welche, wie Fernrohr und Mikroskop, unmittelbar die Leistungsfähigkeit unserer Sinne zu verstärken suchen. Die logische Betrachtung wird diese historische Reihenfolge einigermassen umkehren müssen, indem sie diejenigen Hülfsmittel voranstellt, die der physikalischen Beobachtung dienen, und an sie erst diejenigen anschliesst, welche bei der Messung der Naturerscheinungen wirksam sind. Beide greifen natürlich vielfach in einander ein, denn jede exacte Beobachtung wird fast

unvermeidlich zur Messung, die ihrerseits nichts anderes als eine Form der Beobachtung ist. Immerhin bezeichnet die Möglichkeit des bloss qualitativen Gebrauchs eine Grenze, welche die allgemeineren Hülfsmittel der Beobachtung von den specielleren der Messung scheidet. Die Unterordnung der Messung unter die Beobachtung kommt aber darin zum Ausdruck, dass die Hülfsmittel der Beobachtung häufig unmittelbar oder mit geringen Abänderungen zugleich als Messungswerkzeuge Anwendung finden.

### a. Die physikalische Beobachtung.

Mit Rücksicht auf den nächsten Zweck, welchem die verschiedenen Hülfsmittel der Beobachtung dienen, lassen sich dieselben in zwei Hauptclassen bringen. Die erste enthält Vorrichtungen, welche die Leistungsfähigkeit unserer Sinne zu erhöhen streben; die zweite Veranstaltungen, welche dazu bestimmt sind, die Erscheinungen eines bestimmten Sinnesgebietes dergestalt umzuwandeln, dass sie der Wahrnehmung eines andern Sinnes, dem genauere Hülfsmittel zu Gebote stehen, zugänglich werden.

Die Hülfsmittel zur Analyse der Wahrnehmungen theilen sich nach den zwei Sinnesorganen, die bei der Beobachtung eine hervorragende Rolle spielen, in optische und in akustische. Unter ihnen sind die ersteren von überwiegender Bedeutung, der Herrschaft entsprechend, welche die Gesichtsvorstellungen in unserer Auffassung der Aussenwelt ausüben. Durch die optischen Hülfsmittel kann entweder eine blosse Schärfung der natürlichen Sinneswahrnehmung erstrebt werden, oder es kann sich dabei um eine Zerlegung der Erscheinungen handeln, deren unsere Sinnesorgane an und für sich unfähig sind. Im ersten Fall ist die Analyse der Wahrnehmungen eine rein physiologische: die beobachteten Erscheinungen behalten vollständig den Charakter, den sie bei dem natürlichen Sehen besitzen; dieses wird nur befähigt, die Verhältnisse der räumlichen Anordnung der Objecte viel genauer zu bestimmen und daher Details dieser Anordnung zu erkennen, welche der natürlichen Wahrnehmung entgehen. Fernrohr und Mikroskop sind die zwei wichtigen Hülfsmittel, die diesen Zwecken dienen. Im zweiten Fall ist die Analyse der Wahrnehmungen eine physikalische: die Erscheinungen werden durch künstliche Hülfsmittel in Elemente zerlegt, die der physiologische Vorgang des Sehens niemals zu unterscheiden vermöchte, zu deren genauer Auffassung dann aber weiterhin die Hülfsmittel der ersten Classe Anwendung finden können. Hierher gehören die Vorrichtungen zur spektroskopischen Zerlegung des Lichtes und zur Untersuchung der Polarisationserscheinungen. Naturgemäss sind die Hülfsmittel der ersten Art früher als die der zweiten ausgebildet worden. Jene sind zwar aus experimentellen Erfahrungen hervorgegangen, dienen aber selbst noch ausschliesslich der Beobachtung; bei diesen schliesst jede einzelne Anwendung ein Experiment in sich, und nur durch die regelmässige Form, in der sich das experimentelle Verfahren mit der Beob-

achtung verbindet, erhalten die hier in Rede stehenden Hülfsmittel die Bedeutung von Beobachtungsinstrumenten, die ebenso wie Mikroskop oder Fernrohr in jedem Augenblick der Untersuchung zu Gebote stehen.

Die Kenntniss der Wirkungen convexer und concaver Linsengläser und das an dieselbe sich anschliessende Studium der Gesetze der Lichtbrechung führten so unmittelbar zu der Construction des Fernrohrs und des Mikroskops, dass diese Instrumente fast gleichzeitig und, wie es scheint, unabhängig an mehreren Orten erfunden wurden, daher bekanntlich über dem ersten Urheber der Idee ein gewisses Dunkel schwebt. Diese Idee ist bei beiden Instrumenten die nämliche. Wie schon ein einfaches convexes Brillenglas das Auge befähigt, entfernte Objecte in grössere Nähe zu bringen und sie dadurch deutlicher zu erkennen, so will das optische Instrument dies theils für die Objecte selbst, theils und vorzüglich aber für die Bilder möglich machen, die durch die Sammlung der von ihnen ausgehenden Strahlen entworfen werden. Unterstützt wird die so ermöglichte Zergliederung durch die hinzutretende Ablenkung der Lichtstrahlen, welche eine Vergrösserung des Bildes bewirkt. Die zergliedernde Kraft des Instrumentes beruht ganz und gar auf der ersten dieser Bedingungen, auf der Annäherung des Bildes oder des Objectes selbst an das Auge. Die weitere Vergrösserung soll nur dem auf diese Weise gewonnenen Bilde die für die deutliche Auffassung der einzelnen Theile erforderliche Ausdehnung geben. Diese gemeinsamen Zwecke werden bei beiden Instrumenten nur durch die verschiedenen Aufgaben, denen sie dienen, modificirt. Die Objecte des Fernrohrs stehen nicht in der Macht des Beobachters. Hier kann nicht der Gegenstand selbst, sondern nur das von ihm auf dioptrischem oder katoptrischem Wege entworfene Bild in beliebige Nähe gerückt werden; um ein klares Bild zu gewinnen, müssen zugleich möglichst viele der von dem Object ausgehenden Lichtstrahlen durch Linsengläser oder Concavspiegel von bedeutender Oberfläche gesammelt werden. Das mikroskopische Object dagegen steht ganz unter der Herrschaft des Beobachters. In den einfachsten Fällen (bei der Lupe oder dem einfachen Mikroskop) kann daher die durch eine Convexlinse ermöglichte Annäherung des Objectes an das Auge den Zwecken der Zergliederung genügen. Bei dem zusammengesetzten Mikroskop wird, ähnlich wie bei dem Fernrohr, zunächst durch ein System von Sammellinsen ein reelles Bild entworfen, das dann erst durch ein direct vor das Auge gebrachtes Convexglas betrachtet wird. Aber da das Object beliebig genähert und in seitlicher Richtung verschoben werden kann, so geniesst man hier den Vortheil, sich mit einer sehr kleinen Oberfläche der Objectivlinse begnügen und daher die brechende Kraft derselben durch verstärkte Krümmung erhöhen zu können. Beiden Instrumenten gemeinsam sind dagegen diejenigen Vorrichtungen, welche die Schärfe der entworfenen Bilder zu erhöhen streben, indem sie theils durch Ablenkung der Randstrahlen, theils durch geeignete Combination von Linsensystemen die durch die Kugelgestalt der Linsen bedingte Lichtzerstreuung

sowie die prismatische Wirkung der Gläser beseitigen. Auf diesen grossentheils dem späteren Fortschritt der Optik zu dankenden Verbesserungen beruht hauptsächlich die Vervollkommnung der neueren Instrumente. Da sich aber die durch die unzureichende Sammlung der Lichtstrahlen entstehenden Uebelstände aus nahe liegenden Gründen bei den mikroskopischen Objecten in viel empfindlicherer Weise geltend machen als bei den teleskopischen, so gehört die umfangreichere wissenschaftliche Anwendung des Mikroskops erst einer verhältnissmässig neuen Zeit an. Das Fernrohr wurde sofort nach seiner Erfindung zu dem mächtigsten Werkzeug in den Händen der Astronomen. Nicht nur lieferte es in den Beobachtungen der Jupitersmonde und der Lichtgestalten der Venus durch Galilei, der Rotationen des Mars durch Cassini die wichtigsten Beweismittel für das Copernikanische System, sondern bald wurde es auch durch die Einfügung des Fadenkreuzes und in Verbindung mit dem Mikrometer ein Messungswerkzeug von bis dahin nicht erreichter Genauigkeit. Als solches ist es dann zu terrestrischen und physikalischen Zwecken ein unentbehrliches Hülfsmittel geworden. Das Mikroskop hat nach der ersten Aufsehen erregenden Entdeckung, die es vermittelte, der Auffindung der Spermatozoen durch Leuwenhoek, durch die zahlreichen Täuschungen, zu denen es verführte, zunächst mehr Verwirrung gestiftet als gefördert. Erst unserm Jahrhundert war es vorbehalten, die grosse Wichtigkeit dieses Instrumentes für die verschiedensten Zweige der Naturlehre ans Licht zu stellen.

Der neueren Entwicklung der experimentellen Physik gehören auch durchgehends diejenigen optischen Hülfsmittel an, welche nicht eine Schärfung der Wahrnehmung, sondern eine physikalische Analyse der Erscheinungen bezwecken. Wie Teleskop und Mikroskop auf die Gesetze der Lichtbrechung durch Linsengläser, so stützt sich das Spektroskop auf die Gesetze der Farbenzerstreuung durch Prismen. Die instrumentelle Anwendung ist hier der physikalischen Kenntniss der prismatischen Wirkungen verhältnissmässig spät erst nachgefolgt, da jene Anwendung nicht auf die Farbenzerstreuung als solche, sondern vielmehr auf gewisse mit derselben verbundene Erscheinungen sich stützte. Diese Erscheinungen bestanden in den dunkeln Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspektrums sowie in den hell leuchtenden Linien und Bändern, welche glühende Metalldämpfe durch das Prisma gesehen darbieten. Erst als durch Kirchhoff und Bunsen diese beiden Thatsachen mit einander in Verbindung gebracht waren, als man erkannt hatte, dass ein dunkles Linienspektrum aus einem hellen regelmässig in Folge der Absorption der Strahlen eines glühenden Gases durch die abgekühlten Theile des nämlichen Gases entsteht, wurde die prismatische Zerlegung des Lichtes ein zu den verschiedensten Zwecken verwendbares Untersuchungshülfsmittel. Bald dient dieselbe einfach zur Erkennung der in einer gegebenen Lichtquelle enthaltenen Farbenmengungen, bald soll mit Hülfe der hellen oder dunkeln Linien entschieden werden, ob das ausgesandte Licht zu einem Emissions-

oder Absorptionsspektrum Veranlassung giebt, um hieraus Rückschlüsse auf die physikalische Constitution des lichtgebenden Körpers und die Beschaffenheit des Verbrennungsprocesses zu machen, bald soll durch die Feststellung der Lage der hellen oder dunkeln Linien und ihre Vergleichung mit den Spektrallinien bekannter Stoffe die chemische Constitution des betreffenden Körpers ermittelt werden. Endlich kann bei durchsichtigen Körpern die Veränderung, die der Durchtritt des Lichtes durch dieselben in dem Spektrum einer bekannten Lichtquelle hervorbringt, theils zur Erkenntniss der Absorptionswirkungen jener Körper, theils wieder zu ihrer chemischen und physikalischen Charakterisirung Verwendung finden.

Während das Spektroskop das Licht unmittelbar in seine einzelnen Brechbarkeitsstufen zerlegt, sucht man bei den Polarisationsapparaten über die in einem Lichtstrahl vorhandenen Schwingungsrichtungen auf dem Wege der Ausschliessung Aufschluss zu gewinnen. Der Grund hierfür liegt darin, dass wir Licht von verschiedener Brechbarkeitsstufe unmittelbar durch die Farbe zu unterscheiden vermögen, dass dagegen verschieden polarisirtes Licht dem Auge vollkommen gleich erscheint. Objectiv kann daher die Schwingungsrichtung des Lichtes nur daran erkannt werden, dass ein Körper, welcher das Licht polarisirt, Licht von entgegengesetzter Schwingungsrichtung zurückhält. Da nun in dem gewöhnlichen Licht Schwingungen von allen möglichen Richtungen vorkommen, so ist es für die Entscheidung der Frage, ob irgend ein durchsichtiger Körper polarisirende Eigenschaften besitzt, stets erforderlich, dass das zu seiner Prüfung verwendete Licht durch eine polarisirende Vorrichtung bereits auf eine Schwingungsrichtung zurückgeführt sei. Weil aber ausserdem die untersuchten Körper in den dünnen Schichten, in denen sie noch eine hinreichende Durchsichtigkeit besitzen, die polarisirende Eigenschaft nur in geringem Grad zeigen, so muss dem Polariskop eine solche Einrichtung gegeben werden, dass es die geringste Veränderung in der Schwingungsrichtung des Lichtes noch deutlich angiebt. Zu diesem Zweck wird also das gewöhnliche Licht durch zwei polarisirende Vorrichtungen geleitet, zwischen denen das Untersuchungsobject eingeschaltet ist. Sind nun beide Vorrichtungen so gegen einander gedreht, dass die zweite das durch die erste polarisirte Licht vollständig auslöscht, so wird die leiseste Veränderung, welche die eingeschaltete Substanz in der Schwingungsrichtung hervorbringt, durch eintretende Licht- und Farbenerscheinungen angezeigt. Das Wesen dieses Verfahrens besteht also darin, dass es die Wirkungen, welche ein Körper auf die Schwingungsrichtung des ihn durchsetzenden Lichtes ausübt, ermittelt, indem es zunächst einen Grenzzustand herstellt, von welchem aus jede Veränderung leicht zu erkennen ist. Dadurch ist zugleich das Princip an die Hand gegeben, welches eine Messung der polarisirenden Wirkung gestattet, da die eingetretene Veränderung der Schwingungsrichtung stets durch eine veränderte Stellung der Polarisationsapparate zu einander sich compensiren lässt. Der Grad der zur Wieder-

herstellung jenes Grenzzustandes erforderlichen Stellungsänderung lässt dann unmittelbar auf die polarisirende Wirkung zurückschliessen. Durch die Anwendung dieses Princips ist der Polarisationsapparat das feinste Hülfsmittel für die qualitative und quantitative Untersuchung der Molecularstructur der Körper geworden, welches namentlich in solchen Fällen, wo dieselbe bestimmte Richtungsunterschiede erkennen lässt, wie bei den Krystallen oder organischen Geweben, von unschätzbarem Werthe ist.

Sehr spät erst ist die Ausbildung akustischer Werkzeuge zur Analyse der Wahrnehmung den optischen Hülfsmitteln nachgefolgt. Kaum lässt sich der einfachen Verwendung der Schallreflexion und der Leitung durch feste Körper, wie sie zum Zweck der Verstärkung des Schalls und seiner Uebertragung in grössere Entfernung seit lange im Gebrauch sind, die Bedeutung eines wissenschaftlichen Hülfsmittels beilegen. Erst das Telephon und das Mikrophon haben, wie ihre Namen schon andeuten, für das Ohr das nämliche zu leisten gesucht wie das Teleskop und das Mikroskop für das Auge. Aber dabei zeigt sich freilich die Inferiorität des Schalls als physikalischen Hülfsmittels darin, dass bei diesen Apparaten Elektricität und Magnetismus herbeigezogen werden müssen, um die erwünschte Fernewirkung und Verstärkung der Schalleffecte hervorzubringen. Auch ist es, so gross die praktische Bedeutung dieser neuen Hülfsmittel ist, kaum wahrscheinlich, dass sie für wissenschaftliche Untersuchungen weiter als zu gewissen nebensächlichen Zwecken Anwendung finden werden. Denn das Telephon kann unserm Ohr immer nur Schallquellen erschliessen, die sich in leicht zugänglicher Ferne befinden, und das Mikrophon vermag nur Eindrücke zu verstärken, nicht neue Wahrnehmungen unserm Ohr zuzuführen. Ebenso sind die Hülfsmittel zur physikalischen Analyse der akustischen Erscheinungen hier von verhältnissmässig unvollkommener Beschaffenheit, abgesehen von dem Sinnesorgan selbst, welches durch seine natürliche Fähigkeit der Klanganalyse dem Auge weit überlegen ist. Einigermassen lässt sich die Unterstützung der Klanganalyse durch verstärkende Resonatoren, welche auf bestimmte Töne abgestimmt sind, den spektroskopischen und polariskopischen Hülfsmitteln vergleichen. Mit den letzteren namentlich haben sie das Princip gemeinsam, gewisse Schwingungsarten vor andern zu bevorzugen. Aber da sie die übrigen Klangbestandtheile nicht völlig ausschliessen und die ursprüngliche Stärke des bevorzugten Tones in unbestimmter Weise vergrössern, so haben sie fast nur als Hülfsmittel, welche die Uebung des Sinnesorganes in der Unterscheidung der Töne fördern helfen, eine Bedeutung.

Verräth sich schon in dem Uebergewicht der optischen Werkzeuge vor denjenigen der übrigen Sinne die grössere Bedeutung des Gesichtssinns, so tritt diese herrschende Rolle noch viel deutlicher hervor bei jenen Hülfsmitteln der physikalischen Beobachtung, welche die Erscheinungen eines bestimmten Sinnesgebiets dergestalt umwandeln, dass sie der Wahrnehmung eines andern einer genaueren Auffassung fähigen Sinnes

zugänglich werden. Diese Hülfsmitttel zur Transformation der Erscheinungen sind nämlich durchweg dahin gerichtet, andersartige Sinneseindrücke umzuwandeln in Eindrücke des Gesichtssinns. So gewinnen wir die Vorstellung der Schwere der Körper ursprünglich durch den Tastsinn. Aber die Wage ersetzt diesen Eindruck durch ein Gesichtsbild, welches eine genaue Schätzung des Gleichgewichts zweier schwerer Körper und auf diesem Wege eine quantitative Abstufung aller Körper in Bezug auf ihre Schwere gestattet. Nur die Schwere gasförmiger Körper, wie der Luft, lässt sich, wie sie der Wahrnehmung durch den Tastsinn in der Regel unzugänglich ist, so auch auf dem gewöhnlichen Wege der Wägung im allgemeinen nicht bestimmen. Aber das Barometer verwandelt den Druck der Luft in eine Erscheinung des Gesichtssinns. Bei dem Quecksilberbarometer besteht diese in der in einer luftleeren Glasröhre emporsteigenden Quecksilbersäule, bei dem Aneroid-Barometer in den durch den äusseren Luftdruck bewirkten Krümmungsänderungen einer kreisförmig gebogenen und luftleeren elastischen Röhre, welche Aenderungen durch die Uebertragung auf ein Zeigerwerk deutlicher sichtbar und messbar gemacht werden. Aehnlich wird in dem Thermometer die Ausdehnung einer Flüssigkeit durch die Wärme benützt, um ein räumliches Mass der Temperaturänderungen zu gewinnen. Bei dem Thermogalvanometer wird der nämliche Zweck durch eine doppelte Transformation erreicht, indem man zuerst durch einen Temperaturunterschied einen elektrischen Strom erzeugt, der dann seinerseits wieder die Ablenkung einer Magnetnadel hervorbringt. Für die praktische Beobachtungskunst ist die Wirkung des elektrischen Stromes auf den Magneten vor allem desshalb von unschätzbarem Werthe geworden, weil es sich hier um die Herstellung eines sichtbaren Vorgangs handelt, der leicht wahrzunehmen und in seinen quantitativen Veränderungen zu verfolgen ist. Uebrigens beruhen auch alle andern Hülfsmittel für die Beobachtung elektrischer Wirkungen auf irgend einer Umwandlung in sichtbare Bewegungsvorgänge, mögen nun diese, wie bei dem Elektrometer und der elektrischen Drehwage, Bewegungen der elektrisirten Körper selbst sein oder, wie bei der Volta'schen Wasserzersetzung, der Galvani'schen Zuckung des Froschschenkels und der Beobachtung des elektrischen Lichtbogens, wieder auf bestimmten Transformationen in chemische, physiologische und optische Erscheinungen beruhen. So bewundernswerth die Fähigkeit des Ohres ist, eine Menge gleichzeitiger Klänge deutlich zu unterscheiden, so kann doch die physikalische Analyse der Schallschwingungen die Darstellung derselben in räumlichen Bildern nicht entbehren, wobei die Bewegungen schwingender Körper entweder unmittelbar oder mit Hülfe gewisser Wirkungen, die sie auf andere leicht bewegliche Körper hervorbringen, sichtbar gemacht werden. So liefert der Vibrograph, indem er die Aufzeichnung der Schwingungen eines starren Körpers auf einen mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirenden Cylinder besorgt, bleibende Bilder der vergänglichen Erscheinung, an denen sich

sowohl die Schnelligkeit wie die Form der Schwingungen studiren lässt. Bei dem von Lissajous erfundenen Vibrationsmikroskop werden die schwingenden Bewegungen eines Körpers, z. B. einer Violinsaite, durch einen an ihm angebrachten lichtreflectirenden Punkt kenntlich gemacht, den man durch ein Mikroskop beobachtet, welches, an einer Stimmgabel befestigt, parallel der Saitenlänge in regelmässige Schwingungen versetzt wird. Man erhält so das Bild einer aus zwei zu einander senkrechten Schwingungen resultirenden Bewegung, aus der sich, da die Schwingungsform der Stimmgabel bekannt ist, diejenige der Saite reconstruiren lässt. Bei der Erzeugung von Klangfiguren dienen die Formen, in denen der auf schwingende elastische Platten gestreute Sand sich gruppirt, zur Erkennung der Knotenlinien, aus denen dann wiederum Rückschlüsse auf die Schwingungsform der Platte möglich werden.

### b. Die Messung der Naturerscheinungen.

Von dem Streben, die Wahrnehmungen der übrigen Sinnesgebiete in Gesichtserscheinungen umzuwandeln, ist die Beobachtung vor allem auch in allen den Fällen geleitet, wo sie Hülfsmittel zur Messung der Erscheinungen zu gewinnen sucht. Die exacten Masse, über welche die Physik verfügt, zerfallen in Raummasse, Gewichtsmasse und Zeitmasse. Da aber die Feststellung der beiden letzteren stets auf räumliche Messungen zurückführt, so besteht jede exacte Messung in der Bestimmung der räumlichen Eigenschaften von Gesichtsobjecten oder, da die geometrischen Elemente aller räumlichen Beziehungen die gerade Linie und der Winkel sind, schliesslich in der Messung von geraden Linien und Winkeln. Diese vielseitige Verwendung der einfachen geometrischen Masselemente würde freilich nicht möglich sein, wenn uns nicht durch die Empfindungen des Tast- und Muskelsinnes die Kraftvorstellung gegeben wäre, und wenn nicht allen Wechsel der Wahrnehmungen die Zeitvorstellung begleitete. Aber diese Vorstellungen entziehen sich jeder genaueren unmittelbaren Messung. Sie sind gerade zureichend, um das Bedürfniss nach exacten Kraft- und Zeitmassen zu erwecken; aber dieses Bedürfniss beginnt erst in dem Moment befriedigt zu werden, wo, vermöge jener Tendenz, unsere ganze Anschauung der Aussenwelt in Gesichtserscheinungen umzuwandeln, die Zeit sowohl wie das Gewicht sich in räumlichen Vorstellungen fixirt haben. Für die Zeit fällt dieses Ereigniss in die frühesten Anfänge des menschlichen Denkens, für das Gewicht, welches uns noch heute der nächste unserer unmittelbaren Wahrnehmung zugängliche Repräsentant des Kraftbegriffs ist, geschah der nämliche Schritt sogleich bei der ersten Begründung der wissenschaftlichen Statik durch Archimedes.

Zu astronomischen und geodätischen Zwecken ist seit uralter Zeit das Längenmass für die Messung der geradlinigen Entfernung und die Kreistheilung für die Messung des Winkels im Gebrauch gewesen. Auch

nöthigten jene Zwecke frühe schon über das primitive Verfahren des gewöhnlichen Lebens, welches nur mittelst der unmittelbaren Anlegung des Messungswerkzeuges an den Gegenstand eine Messung auszuführen weiss, hinauszugehen, um mit Hülfe der Anbringung geeigneter Visirpunkte die Winkeldistanzen entfernter Objecte direct zu ermitteln, und um ihre linearen Entfernungen durch die Combination solcher Winkelmessungen mit der Ausmessung leicht zugänglicher näherer Lineardistanzen auf dem Wege der geometrischen Construction und der Rechnung zu bestimmen. Gleichwohl befanden sich alle diese Messungsmethoden noch auf ihrer Kindheitsstufe, da man jede beliebige Messungsaufgabe mit zureichender Genauigkeit erledigt glaubte, wenn sie auf die unmittelbare Vergleichung mit einem gegebenen Massstab zurückgeführt war. Ein erster Schritt zur Verfeinerung solcher Messungen geschah, als man durch verschiedene Hülfsmittel die Schätzung der Bruchtheile der Masseinheiten zu verbessern suchte, was zuerst von den Astronomen nicht lange vor der Zeit Tycho's durch die Ziehung von Transversalen zwischen den entgegengesetzten Endpunkten der benachbarten Theilungslinien eines Massstabes versucht wurde. Aber es ist bezeichnend, dass das vollkommenere, noch jetzt gebrauchte Hülfsmittel dieser Art, der Nonius, erst aufkam, als gleichzeitig auch das Fernrohr durch die Einfügung des Fadenkreuzes zu Messungszwecken Verwendung fand. Noch mehr ist die Einführung anderer Hülfsmittel zur Verfeinerung der Messungen direct an die Benützung der optischen Instrumente, des Fernrohrs und des Mikroskops, gebunden gewesen. Die Erhöhung der Leistungsfähigheit des Auges liess nach einem Hülfsmittel suchen, welches die Genauigkeit der Einstellung auf die Visirpunkte vergrösserte. Dieses Hülfsmittel wurde in der Mikrometerschraube gefunden, deren Vortheil auf der Transformation einer verhältnissmässig umfangreichen Kreisbewegung in eine sehr kleine lineare Bewegung beruht, so dass sie mittelst der Vorbeiführung des Massstabes an dem Objecte noch minimale Bruchtheile der Masseinheit abzulesen gestattet. Auf der Anwendung der Mikrometerschraube beruhen daher wiederum die Hülfsmittel zur Anfertigung der genauesten und feinsten Massstäbe, wie sie durch die Benützung der vergrössernden optischen Instrumente zu Messungen erforderlich geworden sind. Je empfindlicher diese Hülfsmittel der Messung sich gestaltet haben, um so mehr musste man zugleich bestrebt sein, die bei jeder Messung gleichwohl unvermeidlichen Fehler durch wiederholte Beobachtungen und durch die Ermittelung und Berücksichtigung der vorhandenen Fehlerquellen zu eliminiren. So wird es begreiflich, dass, während in der Periode Hipparch's die Fehler der astronomischen Messungen noch halbe Winkelgrade und zu Tycho's Zeiten einige Minuten betragen konnten, sie heute höchstens um den Werth einer Secunde zu schwanken pflegen. Ganz in entsprechender Weise hat sich aber die physikalische Messung auf allen Gebieten vervollkommnet, und mit Hülfe des Mikroskops und des Mikrometers ist überdies eine genaue Messung zahlreicher Objecte möglich ge-

worden, die wegen ihrer Kleinheit für eine frühere Zeit unmessbar und häufig selbst unsichtbar waren.

Im Gegensatze zu diesen hauptsächlich durch die Verwendung der optischen Instrumente bedingten Umgestaltungen, welche die Längen- und Winkelmessung erfuhren, ist das Hülfsmittel für die Bestimmung der bewegenden Kraft der Körper, die Wage, im Princip unverändert geblieben; sie ist nur in der technischen Ausführung vervollkommnet worden, und ihr Anwendungsgebiet hat sich stetig erweitert. Zunächst lag es nahe, das Princip des Hebels mit dem ebenfalls von Archimedes gefundenen Gesetz der Gewichtsabnahme der Körper in Flüssigkeiten zu verbinden, um auf diese Weise die zur absoluten Gewichtsbestimmung der Körper dienende Hebelwage gleichzeitig als hydrostatische Wage zu specifischen Gewichtsbestimmungen zu benützen. Beruht in beiden Fällen die Messung des Gewichts auf der mit dem Auge leicht erkennbaren Herstellung der Gleichgewichtslage des Wagebalkens, so konnte nun aber auch umgekehrt der Grad der Ablenkung aus dieser Lage zum nämlichen Zweck benützt werden, ein Princip, welches bei der Zeigerwage und in verschiedentlich modificirter Form auch bei der Federwage und dem Aräometer oder, unter Benützung von Flüssigkeiten zur Druckbestimmung, bei dem Barometer und Manometer Anwendung findet. Eine wichtige Umgestaltung der Wage für wissenschaftliche Zwecke ist endlich die Drehwage, bei welcher die Drehung eines elastischen Fadens, an welchem ein gleicharmiger Hebel aufgehängt ist, zur Messung irgend welcher anziehender oder abstossender Kräfte, die an dem einen der beiden Hebelarme angreifen, benützt wird. Auf das Princip der Drehwage führt die Anwendung drehbarer Magnete zum Zweck der Messung elektrischer und magnetischer Fernewirkungen zurück. Während die gewöhnliche Hebelwage wegen der Forderung des Gleichgewichtszustandes, die bei ihr erfüllt sein muss, nur für die Messung constant bleibender Gewichte dienen kann, machen diejenigen Formen der Wage, welche statt dessen den Grad der Abweichung aus einer bestimmten Gleichgewichtslage benützen, eine unmittelbare Verfolgung etwaiger Veränderungen in der Zeit möglich, und manche von ihnen, wie das Manometer, die Drehwage, der Magnetstab, gestatten ausserdem eine ähnliche Verwendung der Gleichgewichtsmethode wie bei der gewöhnlichen Hebelwage. Alle diese Instrumente, die auf das Princip der Wage zurückführen, bedienen sich, welcher Art die Naturkräfte auch sein mögen, deren Wirkungen gemessen werden sollen, schliesslich der Vergleichung mit bestimmten Gewichtsgrössen fester oder flüssiger Körper. Theils geschieht dies unmittelbar, wie bei der gewöhnlichen Hebelwage, dem Barometer und Manometer, dem auf einer Spitze drehbaren Magnete, theils auf indirecte Weise, wie bei der Federwage, der Drehwage und dem an drehbaren Fäden aufgehängten Magnete. In diesen Fällen wird der elastische Widerstand, welcher zu überwinden ist, wenn Bewegungen von bestimmter Grösse zu Stande kommen sollen, zunächst in Gewichtseinheiten

bestimmt. Auf diese Weise bildet die Schwere das gemeinsame Mass für alle andern einer exacten Messung zugänglichen Naturkräfte. In der That ist sie dazu auch in bevorzugter Weise geeignet wegen ihrer absoluten Constanz an einem gegebenen Beobachtungsorte und wegen ihrer verhältnissmässig geringen und leicht zu bestimmenden Unterschiede in den verschiedenen Gegenden der Erde. Gerade aber weil das Gewicht das gemeinsame Mass abgiebt für alle andern Naturkräfte, kann durch dasselbe die Kraft der Schwere selbst nicht gemessen werden. Indem diese auf jedes Theilchen eines schweren Körpers die nämliche Wirkung ausübt, ist die Grösse des Gewichts immer nur ein Mass der Masse oder der Menge der dem Einfluss der Schwere unterworfenen in einem Körper vorhandenen Materie. Will man dieses Mass überdies unabhängig machen von den räumlichen Verschiedenheiten der Schwerkraft auf der Erdoberfläche, so muss es überall auf die nämliche Grösse reducirt werden. Darum dient in der rationellen Mechanik nicht das Gewicht P, sondern der Quotient $\frac{P}{g}$ als Mass der Masse. Die Grösse g, welche die Intensität der Schwere an einem gegebenen Ort bezeichnet, kann aber nur bestimmt werden, indem man die Beschleunigung misst, welche ein Körper in einer gegebenen Zeit durch die Wirkung der Schwere erfährt. Bei diesem Punkte führt dann abermals die Intensitätsmessung wieder zurück auf eine Längenmessung, mag man nun unmittelbar den Weg ermitteln, welcher in Folge der erlangten Beschleunigung von einem fallenden Körper in der Zeiteinheit zurückgelegt wurde, oder mag man diesen Weg aus der Länge des einfachen Pendels berechnen, das eine Schwingung in der Zeiteinheit der Secunde vollendet.

Durch ihre Constanz am Beobachtungsorte und durch die Leichtigkeit, mit der ihre Wirkungen in einfache räumliche Masse umgesetzt werden können, empfiehlt sich die Schwere in so hohem Grade als Massstab aller Naturkräfte, dass eine andere für uns in dieser Rolle kaum denkbar ist. Dieses Verhältniss bedingt aber wieder eine eigenthümliche Ausnahmestellung. Die Intensität der Schwere selbst kann auf statischem Wege niemals ermittelt werden. Die Wage gestattet immer nur die Massen, d. h. die Mengen der Materie zu messen, auf welche die constante Schwerkraft wirkt. Für andere Naturkräfte dagegen ist nun eine statische Messung möglich, indem man einfach die schweren Massen bestimmt, welche durch sie im Gleichgewichte gehalten werden. In allen Fällen, wo die Intensität der Naturkräfte die zureichende Constanz besitzt, macht diese statische Methode die grösste Genauigkeit möglich, weil sie nur eine einzige räumliche Messung, nicht aber ausserdem noch eine Zeitbestimmung erfordert. Auf diese Weise dient die Schwerkraft zu zwei Arten der Intensitätsbestimmung: zunächst ist sie bei der Gewichtsbestimmung der Körper das geläufige Mass für die Menge der ponderabeln Materie, und sodann wird sie, indem beliebige andere Naturkräfte in Gewichtsgrössen bestimmt werden,

zum allgemeinen Mass der Kräfte, die ausser der Schwere auf die ponderable Materie wirken können. Dagegen ist bei der Messung der Schwere selbst nur die einer beliebigen Masse in einer gegebenen Zeit ertheilte Beschleunigung verwendbar: darum muss in diesem Falle stets mit der räumlichen Messung eine Zeitmessung verbunden werden. Aber hier bietet nun die absolute Constanz der Schwere an dem Beobachtungsorte den Vortheil dar, dass die Zeit, während deren die Wirkungen gemessen werden, beliebig lang genommen werden kann, wie dies in der That bei den Pendelversuchen geschieht, so dass dadurch wieder der Nachtheil der doppelten Messung ausgeglichen wird.

Durch die Zurückführung aller andern Naturkräfte auf das Mass der Schwerkraft ist es der physikalischen Forschung erst möglich geworden, von den qualitativen Eigenthümlichkeiten, welche die einzelnen Erscheinungen für die Sinneswahrnehmung darbieten, ganz zu abstrahiren, und indem diese Reduction auf die Schwere in gewissem Sinne die Idee der Einheit der Naturkräfte praktisch vorausnahm, hat sie nicht nur den Begriff der Transformation vorbereitet, sondern auch, nachdem sich dieser in der Erfahrung bestätigt hatte, demselben sofort die erforderlichen Massmethoden zur Verfügung gestellt. Ausserdem ist durch die Reduction auf die Schwere und die Erkenntniss der Transformationen ein neuer Begriff entstanden, welcher sich für viele Anwendungen geeigneter erweist als der Kraftbegriff, mit dem er sich früher deckte, nämlich der Begriff der Energie. Unter ihr versteht man allgemein die Fähigkeit zur Herbeiführung einer Ortsveränderung von Massen oder, da wir eine solche Ortsveränderung als Arbeit bezeichnen, kürzer ausgedrückt: die Fähigkeit zur Leistung von Arbeit. Diese Fähigkeit ist nothwendig immer selbst an bestimmte Massen gebunden, sei es dadurch, dass dieselben in einer Bewegung begriffen sind, die sie an andere Massen mittheilen können, sei es dadurch, dass sie in eine Lage gebracht sind, in welcher die Schwere oder eine andere Naturkraft eine bewegende Wirkung auf sie auszuüben strebt. Im ersten dieser Fälle wird die Energie als actuelle oder kinetische, im zweiten als potentielle oder auch als Energie der Lage bezeichnet.

Neben dem Begriff der Energie behält aber derjenige der Kraft die ihm seit der Begründung der Mechanik beigelegte Bedeutung, welche Newton in die Definition zusammenfasste: »Kraft ist das gegen einen Körper ausgeübte Bestreben, seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung zu ändern.« Die Energie ist eine durch die Reduction auf die Schwere veranlasste Unterform dieses Kraftbegriffs. Wir nennen eine Kraft dann Energie, wenn wir von den Bedingungen ihres Ursprungs absehen und nur auf ihre Messung durch das Gleichgewicht oder die Bewegung schwerer Massen Rücksicht nehmen. Die uniforme Messung ist es, die hier jene Abstraction von den Entstehungsbedingungen veranlasst, und die zugleich die Nützlichkeit des so gebildeten Begriffs bedingt. Bei der wirk-

lichen Messung der Erscheinungen kann, eben weil dieselbe mittelst der Schwere geschieht, immer nur die Energie in Betracht kommen. Aus diesem Grunde hat sich denn auch die Anwendung des allgemeineren Begriffs der Kraft auf diejenigen Fälle zurückgezogen, in denen wir bei der Bezeichnung der Bedingungen einer bestimmten Bewegungserscheinung die Reduction auf die Schwere ausser Acht lassen. Dies geschieht aber vorzugsweise dann, wenn wir ausdrücklich den specifischen Charakter einer einzelnen Bewegungsursache oder des übereinstimmenden Grundes eines allgemeinen Erscheinungsgebietes hervorzuheben wünschen. In diesem Sinne unterscheiden wir etwa die Dampfkraft und die Wasserkraft als verschiedene Motoren, oder bezeichnen wir ganz allgemein Licht, Wärme, Elektricität und die Schwere selbst als verschiedene Naturkräfte.

Jene Reduction auf die Schwere, aus welcher mit dem Begriff der Energie auch das wichtige Princip der Erhaltung der Energie hervorgegangen ist, setzt übrigens voraus, dass die verschiedenen Formen der Energie, welche gemessen werden sollen, den erforderlichen Transformationen leicht zugänglich sind. Diese Bedingung trifft nun gerade bei zwei Erscheinungsgebieten, welche sich an und für sich in hohem Grade zur Anwendung exacter Beobachtungen eignen, nicht zu, nämlich beim Schall und beim Licht. Die Messung von Schall- und Lichtintensitäten ist darum bis jetzt weit hinter der Messung der Intensität anderer Naturkräfte zurückgeblieben. Entweder beschränkt man sich darauf, aus theoretischen Voraussetzungen Werthe abzuleiten, ohne sie durch Beobachtung zu verificiren, oder man sieht sich auf die unmittelbare Vergleichung von Empfindungsstärken, also auf das ursprünglichste und ungenaueste Verfahren der Intensitätsmessung angewiesen. Um die Unterscheidung unter diesen beschränkenden Bedingungen möglichst zuverlässig zu machen, wendet man dann das nämliche statische Princip an wie bei der gewöhnlichen Form der Gewichtsbestimmung durch die Wage: man bestimmt z. B. bei den photometrischen Vorrichtungen die Stärke zweier Lichtquellen, indem man durch Abstufung ihrer Entfernungen von einem auffangenden Schirm zwei einander gleich erscheinende Lichtintensitäten hervorbringt, worauf sich das gesuchte Intensitätsverhältniss aus dem Verhältniss der Quadrate der Entfernungen der beiden Lichtquellen ergiebt. Da das Licht höchst wahrscheinlich keine merkliche Transformation in eine andere Bewegungsform erfährt, so ist eine solche Bestimmung immerhin so genau, als es die Schätzung mit dem Auge gestattet. Es ist übrigens kaum zu zweifeln, dass mit dem weiteren Fortschritt der Physik auch die Messung der Schall- und Lichtstärken der allgemeinen Tendenz zur Messung der Kraftgrössen mittelst der Bewegungen schwerer Massen sich nicht entziehen wird. Der Zeitpunkt dazu dürfte gekommen sein, sobald eine geeignete Transformation gefunden ist, welche die Benützung des elektrischen Stroms und seiner Wirkungen auf den Magneten und dadurch abermals die Hülfe des Princips der Wage gestattet. Uebrigens ist leicht ersichtlich, wie selbst jene

unvollkommene Form der Intensitätsmessung, welche die unmittelbare Vergleichung von Empfindungsstärken benützt, keine Ausnahme von der Regel bildet, dass die gerade Linie und der Winkel die Elemente aller exacten Messungen sind. Denn das wirkliche Mass für die Vergleichung wird hierbei immer erst durch die Abmessung der Entfernungen gewonnen, in denen sich die verschiedenen Licht- oder Schallquellen befinden müssen, wenn der subjective Eindruck der gleiche sein soll.

In einer neuen und eigenthümlichen Form tritt uns schliesslich diese Uebertragung in das räumliche Mass bei der dritten und letzten Classe allgemeiner Messungshülfsmittel entgegen, bei den Zeitmassen. Eine objective Zeitmessung setzt eine Bewegung voraus, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Räume zurückgelegt werden. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so liefert die Eintheilung des durchlaufenen Raumes unmittelbar die entsprechende Theilung der Zeit. Eine dauernde Bewegung solcher Art ist vermöge der begrenzten Beschaffenheit unseres Gesichtsraumes nur in periodischer Form möglich, so also, dass der bewegte Körper in regelmässigen Zeitzwischenräumen immer wieder zu dem nämlichen Ort zurückkehrt. Diese Bedingung bot sich schon für die Anfänge des menschlichen Denkens in den periodischen Bewegungen der Gestirne dar. Ihre Verwendung zu Zeitmassen war daher eine so nahe liegende Handlung, dass man sich der Willkürlichkeit derselben nicht einmal bewusst wurde, sondern geneigt war, in der regelmässigen Bewegung der Gestirne die objective Existenz der Zeit selbst zu erblicken. Man kann es als ein Glück für die Wissenschaft betrachten, dass dieses sich alsbald mit einem zweiten Vorurtheil verband, ohne welches der Gedanke einer objectiven Zeitmessung kaum möglich gewesen wäre. Die Zeit einer Erdrotation ist viel zu gross, als dass sich aus unmittelbarer Anschauung eine Gewissheit darüber gewinnen liesse, ob jede solche Periode der andern vollkommen gleich ist, und die Bewegung der Gestirne erfolgt für unsere Wahrnehmung viel zu langsam, als dass sich ohne andere Hülfsmittel entscheiden liesse, ob sie eine gleichförmige ist. Nichts desto weniger ist bis in die neueren Zeiten niemals den Menschen ein Zweifel an der Gleichförmigkeit der täglichen Bewegungen der Gestirne gekommen. Erst diese Voraussetzung aber lieferte die Möglichkeit einerseits zur Eintheilung des Tages in kleinere Zeittheile und anderseits zur Messung grösserer Zeiträume. Für jene bot der Stand der Sonne, der aus der Länge oder Richtung des Schattens nach empirischen Regeln leicht zu bestimmen war, für diese boten die Perioden der Mond- und der Sonnenbewegung die nächstliegenden und zugleich wegen ihrer relativen Constanz die bleibenden Hülfsmittel dar. Aber so gut dieselben im ganzen, nachdem sie nur erst durch die geeigneten Correctionen in Uebereinstimmung gebracht waren, den Zwecken der Zählung grösserer Zeiträume entsprachen, so wenig genügten sie dem Bedürfniss nach einer Messung kleiner Zeittheile, wie es einigermassen schon im praktischen Leben und späterhin noch in viel höherem

Grade bei physikalischen Beobachtungen sich geltend machte. Die Sonnenuhr erlaubt im günstigsten Fall Unterschiede von einigen Minuten zu schätzen, und sie versagt ihre Dienste ganz, wenn die Sonne nicht sichtbar ist. Frühe schon verfiel man daher zu solchen Zwecken auf die Benützung der Schwerkraft. Die Wasser- und Sanduhren, deren man sich bereits im Alterthum bediente, sind noch in den Anfängen der neueren Physik zu physikalischen Zwecken benützt worden, und im wesentlichen der nämliche Gedanke lag den um dieselbe Zeit aufkommenden Räderwerken zu Grunde, bei denen man Gewicht und Reibungswiderstände so gegen einander abgeglichen hatte, dass die Fallbewegung des ersteren zu einer annähernd gleichförmigen wurde. Eine rationellere Verwendung der Schwerkraft begann erst mit der von Huygens gelehrten Benützung des Pendels zur Regulation der Bewegungen. Während man bei den Wasseruhren mit gleichem Niveaustand und bei den Räderwerken mit Widerständen der niemals in exacter Weise zu lösenden Aufgabe einer völlig gleichförmigen Bewegung in unzureichenden Annäherungen zu entsprechen gesucht, ersetzte die Pendeluhr die continuirliche durch eine stossweise Bewegung und begnügte sich mit der exacten Gleichheit der einzelnen durch die Pendelschläge abgetrennten Zeittheile. Alle neueren Chronometer und Chronoskope haben dieses Princip adoptirt, auch wenn sie sich nicht direct eines Gewichts zur Erzeugung der Bewegung und des Pendels zur Regulirung derselben bedienen. Statt des Gewichts kann eine gespannte Feder das Räderwerk in Bewegung setzen, und statt des Pendels kann ein oscillirendes Schwungrad, dessen Bewegungen ebenfalls durch Federkraft unterhalten werden, den Gang der Uhr reguliren. Ein anderes Hülfsmittel, welches namentlich bei rasch ablaufenden, zur Messung sehr kleiner Zeittheile dienenden Chronoskopen Anwendung findet, ist ein schwingender Stab oder eine Stimmgabel, die durch ihre gleich bleibende Tonhöhe die Gleichmässigkeit der Bewegung sichern. Nicht selten zieht man es aber auch für physikalische Zwecke vor, auf den gleichmässigen Gang des Uhrwerks zu verzichten und mittelst der Registrirung von Pendelschlägen oder Stimmgabelschwingungen auf einer bewegten Fläche, auf welcher gleichzeitig die Momente des Eintritts bestimmter Ereignisse markirt werden, die absolute oder relative Zeitdauer der letzteren zu messen. Auf diese Weise ist allen zeitmessenden Hülfsmitteln von der Bewegung der Gestirne bis zur schwingenden Stimmgabel die Eigenschaft des periodischen Verlaufs der Bewegungen gemeinsam. Je kleiner aber die Zeittheile sind, welche gemessen werden sollen, um so kürzer muss die Periode der Bewegung sein, die als Mass dient. Mit der Feinheit des Hülfsmittels steigen ferner die Vorsichtsmassregeln, durch welche die genauen Zeitangaben desselben sichergestellt werden müssen; denn einerseits werden die objectiven Störungen der Bewegung bedeutender, und anderseits erreichen die subjectiven Fehler der Messungen relativ grössere Werthe. Während die Veränderung, welche die tägliche Bewegung der Erde durch die vorhandenen

Reibungswiderstände erfährt, erst nach vielen Jahrtausenden merklich wird, bedürfen die periodischen Bewegungen des Pendels, der Unruhe, des schwingenden Stabes entweder einer fortwährenden Berücksichtigung der Temperatur und wo möglich einer sorgfältigen Compensation der Temperatureinflüsse sowie einer häufig wiederholten Reduction auf das unveränderlich gegebene Mass der Sternzeit, wenn die Angaben der Instrumente vergleichbar bleiben sollen. Die Messung kleinster Zeittheilchen endlich findet an den Schranken unserer sinnlichen Wahrnehmung ihre Grenzen. Wir können diese Grenzen verengern, indem wir die Zeitbestimmung der Ereignisse dadurch, dass wir diese sich selbst registriren lassen, unabhängig machen von der schwankenden Aufmerksamkeit des Beobachters, und wir können für die Ausmessung der auf solche Weise in eine Raumstrecke übertragenen Zeit noch mikroskopische und mikrometrische Hülfsmittel herbeiziehen. Damit ist aber auch hier das äusserste Mass der Genauigkeit erreicht. Indem jede exacte Messung, auch die Gewichts- und die Zeitmessung, schliesslich auf räumliche Messungen zurückführt, ist naturgemäss von der Schärfe, mit der wir eine räumliche Strecke durch das Auge unter Herbeiziehung optischer Hülfsmittel zu messen vermögen, alle Messung der Naturerscheinungen abhängig.

### c. Die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung.

Auf die grosse Bedeutung, welche die mathematische Analysis als Werkzeug der physikalischen Deduction besitzt, wurde bereits hingewiesen. (S. 323.) Die so entstandene rein mathematische Behandlung der Physik, durch welche diese zu einem Zweig der angewandten Analysis sich erhoben hat, ist aber allmählich aus der fortwährenden Benützung geometrischer und arithmetischer Operationen hervorgewachsen, deren die physikalische Untersuchung schon bei der inductiven Verarbeitung der durch die Beobachtung gegebenen Thatsachen bedarf. Während die analytische Behandlung der physikalischen Probleme nur gewisse Voraussetzungen der Beobachtung entnimmt und diese wieder zur Bestätigung gewisser Folgerungen sowie zur numerischen Feststellung bestimmter Grössen herbeizieht, im übrigen aber durchaus in der Form einer selbständigen mathetischen Untersuchung verläuft, greifen jene mathematischen Hülfsoperationen in durchaus wechselnder Weise in den Gang der Untersuchung ein; sie werden immer nur für einzelne Zwecke, welche sich aus den Resultaten der Beobachtung oder des Experimentes ergeben, benützt, und ihre Anwendung gleicht daher vollständig derjenigen der instrumentellen Hülfsmittel, welche die genaue Messung der Erscheinungen ermöglichen. In der That bilden die mathematischen Hülfsoperationen eine unerlässliche Ergänzung der physikalischen Messungswerkzeuge, weil die selbstverständliche Bedingung für die Anwendung der letzteren darin besteht, dass die zu messenden

Erscheinungen unsern instrumentellen Hülfsmitteln unmittelbar zugänglich sind. Wo dies nicht der Fall ist, da kann eine Messung nur dann ermöglicht werden, wenn die Erscheinungen mit andern direct messbaren in bestimmten gesetzmässigen Beziehungen stehen, welche einen Ausdruck in mathematischer Form zulassen, und aus welchen sie in Folge dessen mittelst bestimmter mathematischer Operationen abgeleitet werden können. Ueberall daher, wo physikalische Grössen nur auf diesem indirecten Wege gemessen werden können, sind mathematische Hülfsoperationen die Werkzeuge solcher Messung. Weil aber nur an verhältnissmässig wenige unter den Erscheinungen, auf deren genaue Kenntniss es uns ankommt, unsere verschiedenen Masse direct angelegt werden können, so fällt die Mehrzahl der physikalisch wichtigen Grössen einer indirecten Messung anheim, welche in der mathematischen Ableitung der gesuchten Grössen aus andern durch die directe Messung gefundenen besteht.

Da alle physikalischen Masse auf Raummasse zurückführen, so bildet die geometrische Construction den natürlichen Ausgangspunkt dieser Hülfsoperationen, und erst an sie schliessen sich die arithmetischen Verfahrungsweisen an, durch welche es schliesslich möglich wird, die gefundenen Grössen in bestimmten Zahlwerthen auszudrücken. Bei der Anwendung der geometrischen Hülfsconstructionen stützt sich die Physik einfach auf die Sätze der Geometrie, welche es möglich machen, aus gewissen Bestimmungsstücken eines Raumgebildes von bekannten Eigenschaften andere zu finden, welche nicht unmittelbar gegeben sind. Die wissenschaftliche Physik ist hier zunächst bei der Feldmesskunst in die Lehre gegangen. Freilich aber bedurfte sie bald genauerer Methoden als diese, um die Beziehungen zwischen den Elementen aller räumlichen Messung, dem Winkel und der Geraden, in ausgiebigster Weise zu verwerthen. Aus diesem Bedürfniss sind zuerst innerhalb der Alexandrinischen Astronomie die trigonometrischen Methoden entstanden, die man bald auch zur Berechnung der Bogen und Winkel auf der Kugel anwenden lernte*).

Indem die neuere Physik nicht bloss die bleibenden räumlichen Lageverhältnisse der Körper, sondern die mannigfaltigen Formen ihrer Bewegung vor das Forum ihrer Untersuchungen zog, konnten ihr die für den ersteren Zweck erfundenen trigonometrischen Methoden nicht mehr genügen, sondern sie musste die reicheren Hülfsmittel verwerthen, welche die Geometrie der Curven, namentlich der Kegelschnittslinien, gewährte. Nichts desto weniger blieb noch lange Zeit, gemäss dem natürlichen Entwicklungsgang dieser Hülfsoperationen, den geometrischen Constructionen die eigentliche Lösung der Probleme vorbehalten, und es wurde dadurch zugleich für die Darstellung der Untersuchungsergebnisse das Festhalten an der Euklidischen Demonstrationsform unterstützt. Erst jene Verwerthung der arithmetischen Hülfsmittel, welche die analytische Geometrie geschaffen, eröffnete

*) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 312, 349.

einem freieren Ineinandergreifen geometrischer und analytischer Methoden die Bahn; insbesondere aber wirkte in dieser Beziehung der herrschend gewordene analytische Gang der physikalischen Deduction auf die specielleren Hülfsoperationen zurück, welche gelegentlich in dem Verlauf einer inductiven Untersuchung benützt werden. Es konnte hier um so leichter eine der analytischen Deduction verwandte Behandlungsweise Platz greifen, als jede durch die Rechnung vermittelte indirecte Messung eben nur insoweit auf Induction beruht, als sie auf eine ursprüngliche directe Messung zurückführt, wogegen das mathematische Verfahren selbst in diesen Fällen immer in einer Deduction besteht. So ist es schliesslich nur noch der Umfang, in welchem man die Deduction handhabt, und die Frage, ob sie bloss auf der sicheren Grundlage bestimmter Messungen, oder ob sie ausgehend von irgend welchen hypothetischen Voraussetzungen geübt wird, wodurch sich die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung von der allgemeineren Form der mathematisch-physikalischen Deduction unterscheiden.

Ursprünglich beschränkte sich nun die Anwendung der Hülfsoperationen ganz und gar auf die Ermittelung indirect gegebener Grössen, indem man voraussetzte, dass jeder directen Messung an und für sich unmittelbare Wahrheit zukomme. Eine solche Voraussetzung ist aber irrig, weil dabei keine Rücksicht genommen ist auf die mannigfachen Fehlerquellen unserer Beobachtungen, die in der Beschaffenheit unserer Sinnesorgane, in der Ungenauigkeit der instrumentellen Hülfsmittel sowie in der unzureichenden Aufmerksamkeit des Beobachters ihre Quellen haben. Die wiederholte Messung eines und desselben Gegenstandes musste frühe schon durch die Schwankungen der Resultate diese Unsicherheit der einzelnen Beobachtung verrathen, und sie führte zugleich auf jene einfache arithmetische Hülfsoperation, deren wir uns in den einfachsten Fällen noch heute zur Erzielung genauerer Ergebnisse bedienen, auf die Bildung des arithmetischen Mittels. Die gesteigerten Ansprüche der neueren physikalischen Beobachtungskunst zeigten aber bald, dass dieses Verfahren für exacte Zwecke meistens unzureichend ist. Zunächst werden durch dasselbe alle diejenigen Fehler nicht eliminirt, welche aus constanten Fehlerquellen unserer Sinnesorgane oder instrumentellen Hülfsmittel entspringen. Auch nachdem theils durch eine genaue Controle der letzteren, theils durch eine angemessene Variation der Beobachtungen diese constanten Fehler eliminirt sind, sind aber die übrig bleibenden zufälligen Schwankungen der einzelnen Messungen keineswegs von solcher Beschaffenheit, dass sie sich durch die Bildung des arithmetischen Mittels in einer grösseren Zahl von Fällen vollständig ausgleichen. Denn die Voraussetzung, dass ein Fehler ebenso oft in positivem wie in negativem Sinne begangen werden könne und in beiden Fällen durchschnittlich gleich gross sei, kann im allgemeinen nur für die elementaren Bedingungen, aus denen der wirklich begangene Fehler hervorgeht, nicht aber für diesen selbst als zulässig anerkannt werden. Die

Abweichung des wirklich begangenen Fehlers von dem wahren Werthe wird vielmehr von dem Gesetze abhängig sein, nach welchem sich die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung mit der Grösse derselben vermindert. Dieses Gesetz wird, wie Gauss gezeigt hat, durch eine Exponentialfunction dargestellt, und auf der Anwendung derselben beruhen die exacten Methoden zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler. (Vgl. Bd. I, S. 398.)

Im wesentlichen die nämlichen Methoden können aber noch zu einem weiteren Zweck, der mit der directen Grössenmessung zusammenhängt, Anwendung finden. Bei verwickelteren Erscheinungen, wie auf physikalischem Gebiete besonders die Meteorologie sie darbietet, können nämlich durch objective Naturbedingungen ähnliche, nur meist noch umfangreichere Abweichungen der Einzelwerthe einer Erscheinung gegeben sein, wie sie bei der wiederholten Messung eines Gegenstandes in Folge subjectiver Bedingungen stattfinden. Die Regenmenge eines Ortes wechselt von Tag zu Tag, die Temperatur, der Druck und Feuchtigkeitsgehalt der Luft sind fortwährenden Schwankungen unterworfen. Nichts desto weniger können wir zum Zweck gewisser Vergleichungen nach Mittelwerthen aller dieser Grössen fragen. Hier entspricht der Mittelwerth nicht einem wirklichen, sondern einem idealen Object, welches möglicherweise in keinem einzigen der beobachteten Fälle verwirklicht ist. Auch in diesem Fall beschränkt man sich selten nur auf die Bildung eines arithmetischen Mittels. Aber der veränderten Bedeutung der Mittelwerthe entsprechend ist die Art, wie die Beobachtungen weiter verarbeitet werden, eine wesentlich verschiedene. Es handelt sich nicht darum, dem arithmetischen Mittel eine Grösse zu substituiren, welche mit dem wahren Werth der physikalischen Erscheinung genauer zusammentrifft, sondern es bleibt die Aufgabe, den idealen Durchschnittswerth einer Summe von Erscheinungen mit ähnlichen Durchschnittswerthen gleicher Art oder mit andern begleitenden Erscheinungen, die meistens ebenfalls zuvor auf ideale Mittelwerthe reducirt werden, in Beziehung zu setzen. Auf diese Weise soll einerseits eine Uebersicht über den gesammten Verlauf und Zusammenhang der Erscheinungen vermittelt, anderseits aber auch eine einigermassen sicherere Vorausbestimmung derselben ermöglicht werden. Insoweit der letztere Zweck zur Geltung kommt, sind dann ebenfalls mathematische Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unerlässlich. Der zuerst genannte Zweck, die Combination verschiedener idealer Mittelwerthe, erfordert dagegen die nämlichen mathematischen Hülfsmittel, welche überhaupt bei der Combination physikalischer Beobachtungen angewandt werden. Der nächste Schritt besteht hier immer darin, dass man den Verlauf einer Erscheinung oder den Zusammenhang der Erscheinungen gleicher Art an verschiedenen Orten auf geometrischem Wege zur Darstellung bringt, indem man die beobachteten Mittelwerthe als die Ordinaten einer Curve betrachtet, deren Abscissen entweder der Zeit oder einer stetigen Folge von Beobachtungsörtern entsprechen. Jede solche graphische Darstellung hat die Bedeutung eines

empirischen Gesetzes; in Ermangelung einer zureichenden Kenntniss der Ursachen einer Erscheinung, substituirt das empirische Gesetz hier wie überall den ursächlichen Bedingungen, als deren Function die Erscheinung anzusehen wäre, entweder den gleichförmigen Zeitverlauf oder eine stetige Abmessung im Raume, da alle Vorgänge, die überhaupt eine Gesetzmässigkeit zeigen, eine solche durch eine gewisse Regelmässigkeit in ihrem zeitlichen Verlauf oder in ihrer räumlichen Vertheilung verrathen müssen. (Vgl. oben S. 303.) Aus der graphischen Darstellung kann dann immer auch, wenn es wünschenswerth scheint, eine analytische Formel abgeleitet werden, welche die Berechnung des idealen Durchschnittswerthes der Erscheinung für einen beliebigen Zeitpunkt oder Ort gestattet. Immerhin pflegt man zu einer derartigen analytischen Umformung der graphischen Darstellung nur in solchen Fällen zu schreiten, wo entweder die einzelnen Abweichungen von den idealen Mittelwerthen nicht allzu gross sind, oder wo mit Herbeiziehung der Hülfsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu praktischen Zwecken Vorausbestimmungen für die Zukunft getroffen werden sollen. Die analytische Verwerthung der graphischen Darstellungen ist überdies im allgemeinen dann eine schwierigere, wenn nicht die Zeit, sondern der Raum die unabhängig Veränderliche ist, auf welche die Erscheinungen bezogen werden. Da bei dem Raume in der Regel zwei und unter Umständen sogar drei Dimensionen berücksichtigt werden müssen, nach denen sich die Erscheinungen abstufen, so wird schon die graphische Darstellung eine verwickeltere, und sie vermag im allgemeinen nur durch unvollkommene Hülfsmittel, z. B. durch Farben- und Lichtabstufungen bei den kartographischen Versinnlichungen, die Gesetze der räumlichen Ausbreitung einer Erscheinung zum Ausdruck zu bringen. Eine analytische Formel aber würde sich in solchen Fällen so complicirt gestalten, dass man die einfache Zusammenstellung der Durchschnittswerthe in tabellarischer Gestalt vorzieht. Mit Hülfe dieser lässt sich dann unter Umständen auch eine vereinfachte graphische Darstellung gewinnen, indem man gewisse ausgezeichnete Werthe herausgreift, oder indem man einfach die Punkte, für welche überhaupt der Durchschnittswerth einer Erscheinung der nämliche ist, durch eine Curve verbindet. So hat z. B. Dana durch die s. g. Isokrymen alle diejenigen Punkte der Meeresoberfläche verbunden, an denen die Temperatur während 30 auf einander folgender Tage gleich niedrig ist. Die Isothermen veranschaulichen die Vertheilung der Temperatur an der Erdoberfläche, indem sie als Monatsisothermen die Punkte gleicher mittlerer Monatstemperatur, als Jahresisothermen die Punkte gleicher Jahrestemperatur verbinden. Die auf der Erdoberfläche nach allen Richtungen veränderliche Erscheinung ist auf diese Weise auf ein System linearer Veränderungen zurückgeführt, welche sich unmittelbar leicht übersehen lassen. Dies ist aber nur durch einen Kunstgriff ermöglicht: an die Stelle der Abhängigkeit der Temperatur vom Orte setzt man eigentlich eine Abhängigkeit des Ortes von der Temperatur, indem man bestimmt, welche

Bewegungen auf der Erdoberfläche ausgeführt werden müssten, wenn man immer nur Orte passiren wollte, für welche gewisse constante Temperaturverhältnisse existiren.

### d. Die physikalische Constantenbestimmung.

Eine besonders wichtige Verwendung finden die mathematischen Hülfsoperationen bei der Bestimmung jener Grössen, welche als unveränderliche Masse der einzelnen Naturerscheinungen dienen, und welche man darum als physikalische Constanten bezeichnet. Bei weitem in den häufigsten Fällen sind die Constanten nicht selbst gegeben, aber sie können aus bestimmten Daten der Beobachtung durch verhältnissmässig einfache arithmetische Operationen gefunden werden. Nun beziehen sich, wie früher bemerkt, alle unsere Messungen auf räumliche Grössen, Gewichte und Zeiten, von denen die beiden letzteren wieder auf die ersteren, d. h. auf die Messung von geraden Linien und Winkeln, zurückführen. Dies findet auch in den Einheiten, welche man für jene drei fundamentalen Begriffe festgesetzt hat, seinen Ausdruck. Diese Einheiten sind schliesslich willkürliche, und wenn man unter ihnen das Meter zuweilen als eine »natürliche Einheit« bezeichnet hat, so sollte dies nicht die willkürliche Feststellung ausschliessen, sondern nur darauf hinweisen, dass die Erhaltung dieser Einheit als einer in der Natur objectiv gegebenen Grösse, nämlich als des zehnmillionten Theils des Erdquadranten, nicht von der Aufbewahrung künstlicher Massstäbe abhängig sei. Uebrigens ist diese Absicht bekanntlich durch die Ungenauigkeiten der Gradmessung, aus welcher die Feststellung des Metermasses hervorging, vereitelt worden, so dass in Wahrheit doch nur durch die Aufbewahrung der Normalmasse die Erhaltung der Einheit verbürgt wird. Aehnlich ist die Zeitsecunde schliesslich eine willkürliche Einheit, obgleich sie von der Tageslänge abhängt, deren Wahl zur Zeitmessung so nahe lag, dass sie wohl kaum zu umgehen war. Die Gewichtseinheit endlich, das Gramm als Gewicht eines Cubikcentimeter Wasser im Zustand seiner grössten Dichte, ist einerseits auf die Längeneinheit, anderseits auf die Wahl eines Körpers gegründet, der durch seine Verbreitung und die Constanz seiner Eigenschaften ein besonders geeignetes Messungshülfsmittel zu sein schien. Auf diese Weise führen die Längen- und Zeiteinheit auf je ein Bestimmungsstück, die erste auf eine geradlinige Strecke, die zweite auf einen Winkel, die Gewichtseinheit aber auf zwei Bestimmungsstücke, nämlich auf das Längenmass und auf die specifische Dichte des Wassers, zurück. Die meisten physikalischen Constanten enthalten nun entweder Längen- und Zeitangaben oder Längen-, Zeit- und Gewichtsangaben, wobei diese Elemente in multiplicativer Form verbunden und nach den angegebenen Einheiten gemessen werden. Wegen der Beziehung, die zwischen dem Längen- und dem Gewichtsmass besteht, pflegt man hierbei übereinstimmende Einheiten beider zu combiniren, also das

Millim. mit dem Milligr. oder das Centim. mit dem Grm. Ausserdem können aber auch noch Zahlen entweder für sich oder in Verbindung mit einer der genannten Masseinheiten den Werth von Constanten gewinnen. Solche Zahlen drücken bald die Häufigkeit einer gewissen Erscheinung aus, wie z. B. bestimmter Schall- oder Lichtwellen, und werden dann mit der Zeiteinheit verbunden, bald bezeichnen sie eine Winkelgrösse, wie der so genannte Randwinkel in der Theorie der Capillarität, bald beziehen sie sich auf unveränderliche Relationen bestimmter Grössen, wie die Brechungsindices in der Optik.

Das Gebiet der physikalischen Constantenbestimmung ist vermöge der Verschiedenheiten, welche gewisse gleichförmig festzustellende Grössen je nach der individuellen Beschaffenheit der Naturkörper darbieten, unermesslich. Die Dichtigkeiten, Elasticitätscoëfficienten, Brechungsindices, Capillaritätsconstanten u. s. w. variiren in der mannigfaltigsten Weise; jede einzelne Bestimmung bietet darum nur ein verhältnissmässig beschränktes, meist nur gewissen praktischen Zwecken dienendes Interesse dar. Von weit grösserer Bedeutung sind diejenigen Constantenbestimmungen, bei welchen man für die Wirkungen der unveränderlich gegebenen Naturkräfte ein einheitliches Mass zu gewinnen sucht. Je nachdem von den drei wesentlichen Bestimmungselementen der räumlichen Strecke (bez. des Winkels), der Zeit und der Masse nur eines oder zwei oder drei in Betracht kommen, lassen ein-, zwei- und dreidimensionale Constanten sich unterscheiden. Die eindimensionalen sind allgemein einfache Raumgrössen, und zwar in der Regel Längen, seltener Winkel. Hierher gehören die Dimensionen des Erdsphäroids, die kosmischen Entfernungsbestimmungen, die Wellenlängen der Töne und Farben u. s. w. Man erhält sie durch Multiplication der gewählten Längeneinheit oder irgend einer Potenz derselben mit einer Zahl, in deren genauer Bestimmung in diesem Fall die eigentliche Aufgabe der Constantenbestimmung besteht. Die zweidimensionalen Constanten enthalten in der Regel die Factoren der Länge (seltener des Winkels) und der Zeit. Sie umfassen alle Geschwindigkeitsbestimmungen, welche durch Division der durchlaufenen Länge oder des Drehungswinkels durch die Zeit erhalten werden. Die so gewonnene Zahl bedeutet dann die in der Secunde zurückgelegte Strecke und besteht demgemäss aus dem Product einer Zahl in die Längeneinheit dividirt durch die Zeiteinheit. Hierher gehören die Constanten der Licht-, Schall-, Elektricitätsgeschwindigkeit u. s. w. Auch die Bestimmung des elektrischen Stromwiderstandes führt auf das Geschwindigkeitsmass zurück. Zweidimensionale Constanten, welche die Elemente der Länge und der Masse enthalten, besitzen dagegen nur eine beschränkte Bedeutung, und solche mit den alleinigen Elementen der Masse und der Zeit sind principiell unmöglich. Zu einer Constanten der ersteren Art führt nämlich bloss der Begriff des Trägheitsmomentes in Bezug auf Drehung, welcher durch das Product einer Masse in das Quadrat ihres kürzesten Abstandes

von der Drehungsaxe gemessen wird, also die Bestimmung einer Länge und einer Masse voraussetzt. Eine ähnliche Bedeutung besitzt der Begriff des magnetischen Momentes, welcher in analoger Weise zusammengesetzt ist. Doch ist leicht zu bemerken, dass in dem Begriff des Drehmomentes immerhin derjenige der Geschwindigkeit verborgen liegt, wenn auch wegen des vorausgesetzten statischen Verhaltens von einer Zeitbestimmung abgesehen werden kann. Dadurch bildet derselbe den Uebergang zu den Constanten der folgenden, dritten Classe, aus denen er durch Elimination des Zeitbegriffs hervorgegangen ist. Diese dreidimensionalen Constanten enthalten neben den Elementen der Raumstrecke und der Zeit noch dasjenige der Masse. Bezeichnet man daher die Einheiten dieser drei Elemente mit l, t und m, so führt jede Constantenbestimmung dieser Art bei der gewöhnlich gewählten Aufeinanderfolge der Elemente auf einen Ausdruck von der Form

$$n \, . \, m^x \, l^y \, t^z,$$

worin n eine Zahl ist, deren Ermittelung das eigentliche Object der Messung darstellt, während x, y, z ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenzen bedeuten können. Hierher gehören zunächst die Constanten der verschiedenen Kraftformen, wie der Schwere, der Wärme, der elektrischen und der magnetischen Kräfte, ausserdem alle diejenigen Constanten, durch welche in irgend einer Weise die Wirkungen dieser Kräfte auf materielle Massen unter besonderen Bedingungen gemessen werden: so in der Mechanik die Energie einer bewegten Masse, die Arbeit einer Kraft, das Drehungsmoment bei einer drehenden Bewegung, der hydrostatische Druck einer Flüssigkeit, in der Elektricitätslehre die Potentialfunction eines elektrischen oder magnetischen Theilchens, die Intensität eines Stromes, die elektromotorische Kraft u. s. w.*).

Unter allen Constanten besitzen diejenigen der Naturkräfte selbst eine hervorragende Bedeutung, weil sie die unveränderlichen Grössen darstellen, von denen schliesslich alle andern hier in Betracht kommenden Werthe abhängen. Unter ihnen steht wieder die Schwerkraft in erster Linie, da sie denjenigen Constantenbestimmungen, welche das Element der Masse enthalten, zu Grunde gelegt wird. Zum Mass der Schwere dient die Fallbeschleunigung. Diese aber wird gemessen, indem man die Geschwindigkeit bestimmt, welche in einem frei fallenden Körper durch die während einer Secunde continuirlich einwirkende Schwere erzeugt wird. Diese gewöhnlich mit g bezeichnete Constante der Schwerkraft beträgt unter dem Aequator 9781 Mm. und wächst von da nach den Polen stetig in Folge der abnehmenden Centrifugalbeschleunigung der Erde. Der Umstand, dass die Schwerkraft die Masseinheit für alle andern Naturkräfte abgiebt, kommt hierbei insofern zur Geltung, als die für sie gefundene

---

*) Vgl. Herm. Hertwig, Physikalische Begriffe und absolute Masse. Leipzig 1880.

Zahl an und für sich nur jene auf die Zeiteinheit bezogene Länge bedeutet, und dass sie daher ungeändert bleibt, welche Gewichtseinheit man auch wählt. Die Constante der Schwerkraft würde also ebenso gut durch das Product 9781 Grm.-Mm.-Sec. wie durch das andere 9781 Mgr.-Mm.-Sec. ausgedrückt werden können, und nur die Rücksicht auf die Gleichmässigkeit der Längen- und der Gewichtsdimension verleiht dem letzteren Ausdruck den Vorzug, bei dem desshalb auch die Angabe der Gewichtseinheit hinwegbleiben kann. Dies ist nun nicht mehr gestattet bei den Massangaben über andere Naturkräfte, denen man die Einheiten der Schwerkraft zu Grunde legt. Jeder Ausdruck besteht daher in diesem Falle aus vier Gliedern, nämlich aus einer Zahl und den drei Einheitswerthen des Gewichts, der Länge und der Zeit; höchstens die letztere kann als selbstverständlich weggelassen werden, weil für wissenschaftliche Zwecke niemals eine andere Einheit als die Secunde vorausgesetzt wird. Die nach diesem Princip vorgenommenen Massbestimmungen pflegt man absolute zu nennen, um sie von den für einzelne Zwecke nicht selten gebrauchten conventionellen Massen zu unterscheiden, die in Folge der wechselnden Beziehungen ihrer Einheiten eine mehr relative Bedeutung besitzen. Eine strenge Durchführung des absoluten Masssystems ist aber nur da möglich, wo die betreffenden Naturkräfte entweder eine unmittelbare Vergleichung mit der Schwerkraft zulassen, wie dies z. B. bei der Constanten der Newton'schen Gravitation der Fall ist, oder wo eine Transformation der in irgend einer andern Form gegebenen Energie in Energie der Schwerkraft möglich ist. In diesem Fall, der in der Messung der Wärme nach absolutem Mass vorkommt, wird demnach das Princip der Erhaltung der Energie vorausgesetzt. Die Wärmeeinheit, welche man bei der Massbestimmung meistens benützt, bleibt dabei aber insofern willkürlich, als man von einer bestimmten Substanz, dem Wasser bei seinem Gefrierpunkt, und in der Regel sogar von einer conventionellen Temperatureinheit, dem Grad der hunderttheiligen Thermometerscala, ausgeht. Hierauf beruht die gewöhnliche Bestimmung des Wärmeäquivalents, nach welcher die Wärmeeinheit einer Energie der Schwere von 430 Kilogr.-Meter entspricht. Besser genügt es der Forderung eines absoluten Masses, wenn man umgekehrt als Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge bezeichnet, welche der Einheit der Bewegungsenergie gleichkommt, und danach auch die Temperatureinheit als diejenige Temperaturerhöhung bestimmt, welche diese absolute Wärmeeinheit an der Gewichtseinheit des Wassers bei constantem Druck hervorbringt. In noch höherem Grade werden jedoch willkürliche Festsetzungen bei solchen Naturerscheinungen erforderlich, bei denen man sich über das Substrat und die Form der Bewegungsvorgänge noch im Dunkeln befindet. Dies ist namentlich bei den elektrischen und magnetischen Wirkungen der Fall. Alle Massbestimmungen gehen hier gegenwärtig noch von zwei Begriffen aus, für welche sich bis jetzt nur willkürliche Einheiten finden lassen, nämlich von dem Begriff einer Quantität freier

Elektricität und dem einer Quantität freien Magnetismus. Als Einheiten dieser Quantitäten setzt man nicht, wie es sein müsste, die Einheiten der ponderomotorischen Wirkungen, denen sie äquivalent sind, sondern die Einheiten der ponderomotorischen Wirkungen, die sie in der Entfernung hervorbringen. In beiden Fällen dient demnach diejenige Menge von Elektricität oder Magnetismus als Einheit, welche in der Einheit der Entfernung der Einheit der Masse eine Beschleunigung Eins ertheilt. Von diesen elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten unterscheidet sich dann die elektrodynamische nur dadurch, dass sie an Stelle der Quantität der Elektricität oder des Magnetismus die Intensität zweier auf einander wirkender Stromelemente einführt. Die Einheit der Intensität wird dann aber wieder nach der Einheit der Elektricitätsmenge bestimmt, indem man unter jener die Intensität eines Stromes versteht, in welchem in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt die Elektricitätsmenge Eins sich bewegt. Diesen mechanischen Einheiten zieht man übrigens meistens die von Gauss eingeführte elektromagnetische Constantenbestimmung vor, bei welcher jede elektrodynamische Wirkung auf eine ihr gleiche magnetische reducirt wird. Alle diese Massbestimmungen, zwischen denen naturgemäss feste Beziehungen stattfinden, stimmen darin überein, dass sie die drei Dimensionen der Masse, der Länge und der Zeit enthalten.

## 3. Das Substrat der Naturerscheinungen.

Die physikalische Deduction stützt sich auf gewisse Fundamentalbegriffe, die in den verschiedensten Erklärungsgebieten gleichförmig wiederkehren und darum eine principielle, von den besonderen Bedingungen der einzelnen Erscheinungen unabhängige Bedeutung in Anspruch nehmen. Diese Fundamentalbegriffe beziehen sich theils auf das Substrat der Naturerscheinungen, theils auf die allen Naturvorgängen gemeinsamen Gesetze. Beide werden durch die Induction vorbereitet; sie bilden unter jenen Hypothesen, mit deren successiver Prüfung sich das inductive Verfahren beschäftigt, die letzten und allgemeinsten. Sie unterscheiden sich aber von den specielleren Hypothesen, die ihnen vorausgehen, dadurch, dass der Induction selbst eine Bestätigung oder Widerlegung derselben unmöglich ist. Aus diesem Grunde bilden sie die Ausgangspunkte der Deduction, deren Aufgabe in dem Nachweis besteht, dass die einzelnen durch Induction gefundenen Erscheinungen mit jenen Voraussetzungen übereinstimmen. Die Art dieser Verification bringt es mit sich, dass sie im allgemeinen keine vollkommen bindende ist. Denn ein derartiger Nachweis der Uebereinstimmung schliesst nicht aus, dass noch andere Hypothesen zu dem nämlichen Zwecke tauglich sein würden. Diese relative Unsicherheit der fundamentalen Begriffe macht aber bei den Hypothesen über das Substrat der Naturerscheinungen

in höherem Masse sich geltend als bei den allgemeinen Naturgesetzen. Denn während die letzteren nur hinsichtlich ihrer Tragweite und speciellen Anwendungsweise einer unbegrenzten Vervollständigung fähig sind, bewahren die ersteren fortwährend den Charakter willkürlicher Annahmen, die zwar durch die Prüfung an der Erfahrung mannigfache Correcturen erleiden, niemals aber in zwingender Weise bestimmt werden können. Dieses Verhältniss ist in den Bedingungen der Erkenntniss begründet. Die Naturgesetze sind uns unmittelbar in den Beziehungen des empirischen Geschehens gegeben, und ihre Allgemeingültigkeit wird durch den logischen Zwang des Causalprincips gefordert: hier kann daher nur die besondere Form der Gültigkeit noch Zweifeln begegnen; das Substrat der Erscheinungen dagegen bleibt uns nothwendig stets unbekannt: wir können hier immer nur die Möglichkeit unserer Annahmen behaupten, insofern wir nachweisen, dass die Folgerungen aus denselben mit der Erfahrung übereinstimmen.

### a. Continuitätshypothese und Atomistik.

Die logischen Motive, welche zu der Aufstellung des Begriffs der Materie geführt haben, und die allgemeinen Postulate der Anschauung, welche bei der Ausbildung dieses Begriffs wirksam gewesen sind, wurden bei der Untersuchung des Substanzbegriffs bereits erörtert. (Bd. I, S. 484, 490 f.) Hier bleibt uns daher nur übrig, die methodologische Bedeutung der Hypothesen zu würdigen. Für die Deduction der Naturerscheinungen sind dieselben nicht zu entbehren. Aber ihre Unentbehrlichkeit darf nicht dazu verführen, in ihnen mehr zu sehen als logische Hülfsmittel, deren wir uns zur Ausfüllung der vielfachen Lücken, die uns in der Verbindung der Thatsachen begegnen, bedienen müssen. Ueber das nicht in die Erfahrung tretende Wesen der Dinge können sie niemals etwas aussagen, sondern sie können immer nur angeben, in welcher Weise die Herstellung eines lückenlosen causalen Zusammenhangs zwischen den Erscheinungen für uns denkbar ist. Diese Aufgabe schliesst die Forderung in sich, dass aus den Voraussetzungen über das Substrat der Naturerscheinungen die in der Anschauung gegebenen allgemeinen Eigenschaften der Naturobjecte sowie die Begriffe, die wir über ihre wechselseitigen Relationen uns bilden, abgeleitet werden können. Indem man nun aber bald im unmittelbaren Anschlusse an die in der Wahrnehmung gegebenen Eigenschaften der Dinge, bald vorzugsweise geleitet von begrifflichen Forderungen die Voraussetzungen über die Materie zu gestalten sucht, wird hierdurch nicht weniger als durch das tiefere Eindringen in den Zusammenhang der Erscheinungen ein Wechsel der Hypothesen veranlasst. Von zwei entgegengesetzten Motiven der sinnlichen Wahrnehmung ist dieser Wechsel bestimmt worden. Indem einerseits die Raumerfüllung als die constanteste Eigen-

schaft der Körperwelt erscheint, wurzeln hierin die Continuitätshypothesen, welche die Stetigkeit des Raumes zugleich als die Grundeigenschaft der Materie ansehen. Indem anderseits die Existenz discreter, in wechselnden räumlichen Verhältnissen stehender Objecte als die Bedingung aller Veränderungen in der Natur betrachtet wird, entspringen hieraus die atomistischen Vorstellungen, welche kleine untheilbare Körperchen von verschiedener oder von gleichförmiger Gestalt als Elemente voraussetzen.

Beiderlei Hypothesen sind an sich in gleicher Weise vereinbar mit dem allgemeinen Grundsatz der Constanz der Materie, welcher alle Veränderungen in der Körperwelt auf Bewegungen eines unveränderlichen Substrates zurückzuführen verlangt. Beide sind daher noch in neueren Zeiten für verschiedene Gebiete des physischen Geschehens neben einander der Deduction der Erscheinungen zu Grunde gelegt worden. So sind namentlich die Arbeiten von Laplace über die Fortpflanzung des Schalls, von Navier und Poisson über die Theorie der Elasticität, von Fourier über die Fortpflanzung der Wärme von der Continuitätshypothese ausgegangen, die sie je nach Bedürfniss bald auf die ponderable Materie, bald auf ein imponderables Fluidum bezogen. Die atomistische Anschauung dagegen ist der neueren Physik zunächst von der Chemie entgegengebracht worden, in welcher die Motive zu ihrer Annahme am zwingendsten waren. Auch für die specifisch physikalischen Phänomene hat jedoch vielfach schon in früherer Zeit die Analyse der Erscheinungen gelegentlich zu atomistischen Vorstellungen geleitet. Indem man die complexe Erscheinung in ihre einfachen Elemente zu zerlegen sucht, wird die Annahme von Atomen als materiellen Substraten jener Elemente unmittelbar nahe gelegt. Am treffendsten zeigt sich dies bei den chemischen Erscheinungen; aber auch auf dem Gebiete der Physik bieten z. B. die Vorstellungen, zu denen sich fast überall Newton gedrängt findet, um so sprechendere Belege, als seine Ansichten offenbar nicht aus principiellen Erwägungen, sondern aus den speciellen Bedürfnissen der Erklärung entsprungen sind. So wird er nicht nur in der Optik zu einer atomistischen Hypothese geführt, sondern er kommt auch bei der Erklärung der Fortpflanzung des Drucks in Flüssigkeiten und der Fortpflanzung des Schalls in der Luft auf eine solche zurück*). In bestimmterer Weise hat jedoch erst die von Coulomb gegebene Analyse der Wirkungen des Magnetes, namentlich der Versuch, sich über die Vorgänge bei der Magnetisirung des Eisens und über die Erfolge der mechanischen Theilung eines Magnetes Rechenschaft zu geben, zu atomistischen Anschauungen über die physikalische Structur der Körper genöthigt. Den Schlusspunkt dieser ganzen Entwicklung bilden endlich die Umgestaltungen der theoretischen Optik in atomistischem Sinne, wie sie namentlich durch die Dispersions- und Polarisationserscheinungen ge-

*) Princip. lib. II, Uebersetzung von Wolfers, S. 353, 366.

fordert wurden und in den mathematischen Arbeiten Cauchy's einen gewissen vorläufigen Abschluss fanden.

Sobald auf diese Weise für einzelne Erscheinungsgebiete der Uebergang zur atomistischen Hypothese geboten war, musste nun die Continuitätsvorstellung nothwendig auch in denjenigen Theilen der theoretischen Physik, in welchen sie an sich etwa zureichend gewesen wäre, im Interesse einer einheitlichen Naturerklärung allmählich zurückweichen. Der Sieg ist daher in diesem Streit im ganzen der atomistischen Theorie geblieben. Die Tendenz zu einem solchen Ausgang war aber eigentlich schon in der Beschaffenheit der physikalischen Continuitätstheorien gelegen. Diese sahen sich nämlich, um die Probleme der mathematischen Analyse zugänglich zu machen, regelmässig genöthigt, die continuirliche Materie in irgendwie gestaltete und sich unmittelbar berührende Theilchen zu zerlegen, eine Vorstellung, nach welcher insbesondere die hierher gehörigen Annahmen zur Elasticitätstheorie den Namen der Contacthypothesen erhalten haben. Ja noch mehr, die Theilchen, in welche man sich die Körper zerlegt denkt, werden wieder nur in Bezug auf ihre Massenmittelpunkte in Betracht gezogen. In diesem Sinne ist also hinter den Entwicklungen der Contacthypothese eigentlich immer schon eine Art atomistischer Anschauung verborgen, da die mathematische Analysis in ähnlicher Weise wie die vorangegangene physikalische Analyse der Erscheinungen die Tendenz besitzt, die Elemente des Geschehens, auf die sie zurückgeht, zugleich auf elementare Substrate zu beziehen.

Diese Tendenz, welche dem mathematischen Werkzeug der physikalischen Deduction ihren Ursprung verdankt, erstreckt sich aber noch weiter. Indem die algebraische Analysis eine rein begriffliche Behandlung der Naturerscheinungen ermöglicht, lässt sie die im Interesse der Anschaulichkeit vorausgesetzte räumliche Ausdehnung der materiellen Elemente als ein unwesentliches Attribut derselben erscheinen. Was für die mathematische Betrachtung dieser Elemente in Betracht kommt, ist schlechthin nur der geometrische Ort. Auf dem Boden der mathematischen Behandlung der physikalischen Probleme entsteht so das Streben, die Voraussetzungen über die Materie als ausschliesslich begriffliche aufzufassen. Waren von den beiden im Eingang erwähnten Bedingungen in den älteren Formen der Continuitätshypothese sowie der Atomistik die anschaulichen die überwiegenden gewesen, so kam daher nun unter dem bestimmenden Einfluss der mathematischen Abstraction eine Zeit, in welcher die begrifflichen allein noch Geltung besassen. Eine bedeutsame Rolle bei dieser Wendung der Dinge spielte jener Begriff der fernewirkenden Kraft, wie er als allgemeinstes Ergebniss der Abstraction aus der Gravitationstheorie Newton's hervorgegangen war. Bei der Annahme der fernewirkenden Kraft verzichtete man auf jede Beziehung zu geläufigen mechanischen Vorstellungen, aber begrifflich hatte man den eminenten Vortheil, den aus der Entfernung auf einander wirkenden Körpern mathematisch blosse Massenpunkte substituiren zu können.

Gebieterisch forderte diese Anschauung vermöge der leichten mathematischen Einkleidung, die sie zuliess, die Uebertragung auf die verschiedenen Gebiete der Molecularphysik, wo man nun ebenfalls die Erscheinungen auf Fernewirkungen zwischen Massepunkten zurückzuführen suchte, und wo überdies die Anschauung keinen Widerspruch einlegte, wenn man diese Abstraction materieller Punkte für das wirkliche Substrat der Erscheinungen nahm. So sind aus dieser rein begrifflichen Auffassung jene Ansichten hervorgegangen, die zuweilen auch als dynamische bezeichnet werden, weil sie sich auf den bereits von Leibniz zur Geltung gebrachten Satz berufen, dass uns die Materie nur durch die Kräfte gegeben sei, die von ihr ausgehen.

Eine solche begriffliche Umgestaltung der Ansichten ist nun an sich sowohl auf dem Boden der Continuitätsvorstellung wie der Atomistik möglich. In der That ist Kant's dynamische Theorie der Materie eine Form der Continuitätshypothese, welche sichtlich ebenso sehr von dem Newton-schen Gesetz der Fernewirkungen wie von jenem Leibniz'schen Grundsatze bestimmt wird. Aber es ist bemerkenswerth, dass diese Theorie offenbar desshalb die physikalische Brauchbarkeit einbüsste, weil sie bei der Annahme über die abstossenden Kräfte dem Princip der Fernewirkung untreu wurde, indem sie in diesem Fall nur eine unmittelbare Contactwirkung statuirte. Eine Materie, welche durch die Wechselwirkung einer solchen »Flächenkraft« mit der fernewirkenden Kraft zu Stande kam, konnte als philosophische Conception aufrecht erhalten werden, aber sie war unfähig, der physikalischen Deduction zu dienen. Darum sind in den verwandten dynamischen Contacthypothesen der Physiker auch die abstossenden Molecularkräfte zu fernewirkenden Kräften geworden; nur ist vorausgesetzt, dass die Molecularkräfte überhaupt nach einer Function der Entfernung abnehmen, welche sehr rasch sinkt und daher für jede messbare Distanz verschwindend klein wird. In Folge dessen sahen sich aber diese Hypothesen meistens veranlasst, die anziehenden und abstossenden Kräfte an verschiedene Substrate zu binden, die ersteren an die ponderable Materie, die letzteren an das so genannte Wärmefluidum, eine Annahme, welche, sobald man von der schwer vollziehbaren Vorstellung einer Durchdringung der verschiedenen Materien absah, atomistische Anschauungen nahe legte, um so mehr als diese, wie oben angedeutet, in den Abstractionen, deren sich die analytische Behandlung bediente, im Grunde schon eingeschlossen sind.

### b. Die Entwicklung der neueren Atomistik.

Mehr als die Continuitätshypothese ist die Atomistik ursprünglich von dem Bedürfniss nach einer anschaulichen Gestaltung des wirklichen Geschehens ausgegangen. Indem sie zunächst von dem Grundsatze der Constanz der Materie bestimmt wurde, übertrug sie zugleich die geläufigen

Vorstellungen vom Stoss der Körper auf die Atome, die, abgesehen von ihrer Kleinheit, nur durch die absolute Härte, die man ihnen zuschrieb, von den aus der Erfahrung bekannten festen Körpern sich unterschieden. Diese bereits durch die antike Atomistik entwickelten Vorstellungen sind von der neueren nur unerheblich modificirt worden. Einerseits liess man die verschiedene Gestalt der Demokritischen Atome fallen, als eine Annahme, die bei der Erklärung keine Hülfe leistete, und begnügte sich mit der einfachsten Form der kugelförmigen Atome; anderseits sah man sich meistens genöthigt, zum Behuf der Ableitung der verschiedenen Kräfteformen verschiedene Atome mit verschiedenartigen Eigenschaften einzuführen. Nachdem hierin in gewisser Weise schon Descartes mit seinen dreierlei corpuscularen Elementen vorangegangen war, wurde diesen Vorstellungen durch die Annahme der fernewirkenden Kräfte die massgebende Richtung gegeben. Nach ihr schienen sich von selbst die Erscheinungen den zwei Classen der Anziehungskräfte und der Fliehkräfte unterzuordnen, worauf dann wiederum diese zwei Kräfteformen zwei specifisch verschiedene Arten von Atomen erforderten. So entstand die in den Untersuchungen der neueren theoretischen Physik, zunächst namentlich im Gebiete der Elasticitätslehre und der Optik, herrschend gewordene Unterscheidung der Körperatome und der Aetheratome. Den ersteren schrieb man eine Anziehungskraft unter sich und gegen die Aetheratome zu, die letzteren dagegen, deren Kräfte übrigens überhaupt nur in Moleculardistanzen merklich seien, sollten sich wechselseitig abstossen. Die nämliche Absicht, welche Kant mit seinen zwei entgegengesetzten Kräfteformen verfolgt hatte, wurde hier in einer Weise erreicht, welche der mathematischen Analyse bessere Angriffspunkte darbot. Nachdem hauptsächlich durch die optischen Arbeiten Cauchy's diese Vorstellungen Eingang gefunden, hielt es nicht schwer, mit ihrer Hülfe die sonstigen imponderablen Fluida zu verbannen. Das Wärmefluidum machte ohnehin in Folge der Begründung der mechanischen Wärmetheorie den Oscillationen der ponderablen Atome Platz. Für die Elektricität liess sich der Lichtäther benützen, sei es nun, dass man mit W. Weber positive und negative Aetheratome annahm, die sich rotirend um die ponderablen Theilchen bewegten, sei es, dass man mit C. Neumann die eine der beiden Elektricitäten als eine unveränderliche Eigenschaft der ponderablen Atome betrachtete. Dass in irgend einer Weise für Licht, Elektricität und Magnetismus ein identisches Substrat anzunehmen sei, wurde überdies durch die zwischen diesen Erscheinungen sich herausstellenden Beziehungen immer ersichtlicher.

In diesen neueren Entwicklungen wird die Voraussetzung leerer Zwischenräume zwischen den Atomen strenger festgehalten als in der antiken Atomistik, da diese in dem Stoss der Atome ein Ereigniss annimmt, bei welchem jedesmal eine unmittelbare Berührung eintritt. Dort dagegen macht es das angenommene Gesetz der Atomwirkung unmöglich, dass dieselben über eine gewisse Grenze sich nähern. Auf diese Weise bleibt das

Princip der Stetigkeit aufrecht erhalten, indem sich jede Wirkung streng genommen in eine Fernewirkung verwandelt. Der so zur Ausbildung gelangende Begriff der Wirkungssphäre des Atoms macht es nun aber weiterhin leicht möglich, der Hypothese jene Wendung zu geben, welche in der mathematischen Behandlung der Atomwirkungen vorbereitet ist. Abstrahirt diese schon völlig von der Ausdehnung der Atome, indem sie die letzteren lediglich als Kraftcentren in Betracht zieht, so scheint die Umsetzung dieser mathematischen Abstraction in eine physikalische Voraussetzung um so näher zu liegen, als damit die Fragen über Gestalt und Grösse der Atome ohne weiteres hinwegfallen, Fragen, die sich jeder Beantwortung entziehen, da das einzige, was eventuell einer Messung zugänglich sein kann, eben die Wirkungssphäre des Atoms ist. Hiermit ist der Uebergang zur einfachen Atomistik vollzogen, wie sie im vorigen Jahrhundert zuerst von Boscovich entwickelt und dann in dem gegenwärtigen in engerem Anschlusse an die mathematische Theorie von Ampère, Cauchy u. A. ausgebildet wurde. Die Atome betrachtet man hier als ausdehnungslose Punkte, deren jedem eine Wirkungssphäre zukommt, die von der ihm inhärirenden Centralkraft abhängt. Man verzichtet dabei auf jede Congruenz mit den sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften der Naturobjecte und begnügt sich damit, die wesentlichen Eigenschaften der Materie rein begrifflich festzustellen.

Häufig hat sich mit dieser Annahme noch das Streben verbunden, auch die Verschiedenartigkeit der Atome zu beseitigen. Es war dies lediglich eine weitere Folge der in der einfachen Atomistik selbst schon gelegenen Tendenz nach Vereinfachung; auch lag es nahe zu vermuthen, dass der physische Punkt, wie er an sich keine Verschiedenheiten erkennen lasse, so auch in seinen Wirkungen sich gleichförmig verhalten werde. In dieser Richtung haben namentlich Boscovich und in neuerer Zeit Fechner die Statthaftigkeit der einfachen Atomistik zu erweisen gesucht. Ebenso hat Cauchy diese Annahme einem Theil seiner analytischen Untersuchungen zu Grunde gelegt. Es ist selbstverständlich, dass hierbei die Einfachheit des Substrates nur auf Kosten der Einfachheit der angenommenen Wirkungen desselben erreicht werden kann. Denn es muss nun eine complicirtere Form der Kräftefunction eingeführt werden, welche anziehende und abstossende Wirkungen als specielle Fälle unter sich begreift. Selbst mittelst derartiger Hülfsannahmen ist es aber bis jetzt nicht gelungen, solche Erscheinungen abzuleiten, die, wie z. B. die Doppelbrechung des Lichtes in gewissen Krystallen, auf eine verschiedenartige Anordnung der Theilchen nach verschiedenen Richtungen hinweisen. Für die Zwecke der analytischen Deduction hat man daher im allgemeinen an der Annahme eines so genannten Doppelmediums aus Körper- und Aetherpunkten festgehalten.

### c. Die kinetische Atomtheorie.

Die zuletzt erwähnten Hypothesen, denen eine Zeit lang die Zukunft der theoretischen Physik zu gehören schien, sind allmählich wankend geworden durch die Veränderung der Anschauungen, welche hinsichtlich mancher früher auf eine Distanzwirkung der Atome bezogener Erscheinungen die mechanische Wärmetheorie herbeiführte. Während man früher das Ausdehnungsbestreben der Gase vom rein statischen Gesichtspunkte aus auf ein Uebergewicht der Repulsivkräfte der Aetheratome zurückgeführt hatte, so lehrte die Auffassung der Wärme als einer Bewegung der Theilchen die nämliche Erscheinung weit befriedigender aus der fast unbeschränkten Beweglichkeit der Molecüle im gasförmigen Zustand erklären. Waren damit für einen speciellen Fall die abstossenden Kräfte eliminirt und die betreffenden Erscheinungen direct auf moleculare Stosswirkungen zurückgeführt, so schien es nun geboten, ähnliche Voraussetzungen auch für andere Fälle anscheinender Repulsivwirkungen zu versuchen. Und war erst einmal das Princip der Actio in distans für die Repulsivwirkungen beseitigt, so konnte dasselbe auch für die Attractionserscheinungen nicht länger Stand halten. Nicht bloss für Elektricität und Magnetismus, für welche die Beziehungen zu Licht und Wärme solche Vorstellungen nahe legten, ging man daher wieder auf die Annahme von Contactwirkungen zurück, sondern auch für die Erklärung der Gravitation begann man ältere Hypothesen hervorzuholen, wie sie vor der Unterwerfung aller physikalischen Vorstellungen durch den Newton'schen Gravitationsbegriff aufgestellt worden waren, indem man die Erscheinungen der Schweranziehung durch die unmittelbaren Stosswirkungen eines im Weltraum bewegten Aethers anschaulich zu machen suchte*). Mangelt es nun auch dieser Annahme, abgesehen von den Unvollkommenheiten der einzelnen Hypothesen, immer noch an dem Nachweis einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitationswirkung, welchem hier allein entscheidende Kraft zukommen würde, so lässt sich doch nicht verkennen, dass, sobald nur erst die verschiedenen Molecularkräfte den Gesichtspunkten der mechanischen Wärmetheorie vollständig unterworfen sind, auch die Gravitation sich dem Zwang einer gleichförmigen Anschauung nicht wird länger entziehen können. Mit der Beseitigung der Actio in distans wird aber ausserdem gegenüber der rein begrifflichen Auffassung des materiellen Substrates wieder die Forderung der Anschaulichkeit erhoben, während zugleich die Voraussetzung einer unmittelbaren Berührung der Elemente beim Stoss die Rückkehr zu Continuitätsvorstellungen begünstigt. Denn es kann zwar die mechanische Gastheorie ihre Molecüle ebenfalls im Sinne der dynamischen

---

*) Isenkrahe, Das Räthsel von der Schwerkraft. Braunschweig 1879. S. T. Preston, Phil. Mag. (5) IV, 206, 364; V, 117, 297.

Atomistik aus Kraftpunkten und Aethersphären aufgebaut und dadurch die Stösse der Gastheilchen in moleculare Fernewirkungen umgewandelt denken. Aber nachdem die Erscheinungen, zu deren Erklärung man früher der Repulsivkräfte bedurfte, auf die unmittelbaren Stosswirkungen der Elemente zurückgeführt waren, schien es angemessen, den Aether ganz zu beseitigen, und man begann nun wieder, im Anschlusse an die ältere Atomistik, den Stoss der Atome als die allein anschauliche und darum auch allein denkbare Form der Wechselwirkung zu betrachten, während noch vor wenigen Decennien ebenso entschieden die Meinung verfochten worden ist, jede Wirkung müsse eine Actio in distans sein, weil wir uns die Bewegung nur als einen stetigen Vorgang denken könnten und daher die durch den unmittelbaren Anprall der Atome geschehende plötzliche Unterbrechung der Stetigkeit unvorstellbar sei. In der That beweisen alle diese Behauptungen nur, dass man immer geneigt ist, diejenigen Anschauungen, an die man sich gerade gewöhnt hat, für die einzig möglichen zu halten. Unvorstellbar sind allerdings die ausdehnungslosen Kraftpunkte der dynamischen Atomtheorie. Da wir aber nicht das Recht haben, mit Plato und Descartes die Materie mit dem Raum zu identificiren, noch überhaupt von diesem Begriff mehr verlangen dürfen, als dass er sich zur Ableitung der im Raum gegebenen Erscheinungen brauchbar erweise, so entscheidet über die Frage, ob eine Fernewirkung anzunehmen sei oder nicht, kein a priori gültiges Gesetz unserer Vorstellungen, sondern allein der Zusammenhang der wissenschaftlichen Erfahrungen.

Von diesem Gesichtspunkte aus beurtheilt besitzt nun die kinetische Atomtheorie allerdings den unverkennbaren Vorzug, dass bei ihr einerseits die grundlegenden Vorstellungen gewissen einfachen mechanischen Vorgängen entsprechen, die uns aus der unmittelbaren Erfahrung bekannt sind, und dass anderseits alle Wechselwirkungen der materiellen Elemente in directe Beziehung gesetzt werden zu einer einzigen fundamentalen Eigenschaft derselben, zur Undurchdringlichkeit. Dem stehen aber ebenso bedeutende Schwierigkeiten gegenüber, welche in den bisherigen Gestaltungen dieser Theorie nicht in befriedigender Weise gelöst sind. Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, starre Atome an, so wird man zu der Vorstellung genöthigt, dass ein gegen eine feste Wand stossendes Atom momentan seine Geschwindigkeit in eine entgegengesetzt gerichtete umwandelt. Nimmt man, um dieser Schwierigkeit zu entgehen, elastische Atome an*), so bleibt das Bedenken, dass die Eigenschaft der Elasticität eine Verschiebung und Wechselwirkung der Theilchen des elastischen Körpers voraussetzt und daher, wie dies die Existenz der Elasticitätstheorien bezeugt, zu einer Zerlegung nöthigt, welche den Begriff des Atoms wieder aufhebt. Hält man aber trotzdem die Annahme starrer Atome desshalb für zulässig, weil auch bei einer plötzlichen Geschwindigkeitsänderung das Princip der

---

*) Helmholtz, Populäre wissensch. Vorträge, 3. Heft, S. 13.

Erhaltung der Energie gewahrt bleiben könne*), so wird hier abermals der Versuch gemacht, die Forderungen der Anschauung durch rein begriffliche Feststellungen zu befriedigen, wodurch sich die kinetische Theorie in einen Widerspruch mit ihren eigenen Entstehungsbedingungen verwickelt. In Wahrheit ist dies nur eine Folge des tiefer liegenden Widerspruchs, in welchem sich schon der Begriff des starren Atoms mit der Anschauung befindet. Der absolut starre Körper existirt nur als begriffliche Abstraction der Mechanik, ist uns aber ebenso wenig in der Erfahrung gegeben wie ein ausgedehntes Object mit der Eigenschaft der absoluten Untheilbarkeit. In anderer Form verfällt also diese kinetische dennoch dem nämlichen Schicksal wie die dynamische Atomistik: den vorstellbaren Objecten der wirklichen Welt substituirt sie abstracte Begriffe.

In eigenthümlicher Weise hat eine neuere Gestaltung der kinetischen Theorie gleichzeitig diesen Schwierigkeiten zu entgehen und die Vorzüge des atomistischen Gedankens mit denjenigen der Continuitätsvorstellung zu vereinigen gesucht: es ist dies W. Thomson's Hypothese der Wirbelatome. Sie ist theils von gewissen hydrodynamischen Betrachtungen, theils von den der Ampère'schen Theorie des Magnetes zu Grunde liegenden Vorstellungen ausgegangen. Das wechselseitige Verhalten von Wirbelfäden in Flüssigkeiten erweckte die Idee, den in Wechselwirkung begriffenen Atomen die Annahme einer Wechselwirkung solcher Flüssigkeitswirbel zu substituiren. Die elektrische Theorie des Magnetismus hatte ohnehin schon zu der Vorstellung der wirbelähnlichen Circulation eines Fluidums geführt, welche zugleich durch ihre Permanenz die Möglichkeit einer Constanz solcher Wirbel zu verbürgen schien. Hielt man sich ausserdem die Beziehungen zwischen Elektricität, Magnetismus und Licht gegenwärtig, so war der Uebergang zu einer Verallgemeinerung möglich gemacht, wie eine solche in Maxwell's elektro-magnetischer Lichttheorie geschehen ist**). Gleichwohl ist nicht zu verkennen, dass auch diese Anschauung in gewisser Weise dem Schicksal einer rein begrifflichen, der anschaulichen Erfahrung widersprechenden Fiction anheimfällt. Ein Wirbelfaden, der sich absolut widerstandslos in einem gleichartigen Medium bewegt, widerspricht aller Erfahrung; wiederum wird hier eine relative in eine absolute Eigenschaft verwandelt, und der gerühmte Vorzug, dass alle Elemente der Hypothese geläufigen physikalischen Erfahrungen entsprechen sollen, geht verloren.

Die Zeit zur Ausgleichung dieser Gegensätze ist offenbar noch nicht gekommen. Von logischer Seite lässt sich daher höchstens auf die allgemeine Richtung, in welcher sich die Anschauungen entwickeln, und auf die erkenntnisstheoretischen Forderungen hinweisen, denen jede Theorie

---

*) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877, S. 239 f. Vgl. a. Lasswitz, Atomistik und Kriticismus, S. 96 f.

**) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II, p. 195 f.

der Materie entsprechen muss. Die Richtung der Entwicklung ist unschwer zu erkennen. Nachdem die rohen, vielfach mit überflüssigen Nebenvorstellungen belasteten älteren Hypothesen durch die begrifflichen Entwicklungen, die von der Newton'schen Gravitationstheorie und der mathematischen Abstraction ausgegangen sind, die erforderliche Läuterung erfahren haben, wird überall die Nothwendigkeit fühlbar, die unter diesen Einflüssen entstandenen abstracten Theorien im Interesse der Anschaulichkeit umzugestalten, und an dieser Umgestaltung kommt dem Streben der neueren Physik, statische Verhältnisse auf Bewegungsvorgänge zurückzuführen, ein hervorragender Antheil zu. Die hierin angedeutete Richtung entspricht aber zugleich den allgemeinen logischen Forderungen, die an eine Theorie der Materie zu stellen sind. Die Materie ist das Substrat der in der äusseren Anschauung gegebenen Erscheinungen. Nachdem die physikalische Erfahrung dem uralten Trieb der Speculation, alle Erscheinungen auf Bewegungsvorgänge dieses Substrates zurückzuführen, Recht gegeben, müssen in den Voraussetzungen über dasselbe die für eine solche Zurückführung erforderlichen Bedingungen erhalten bleiben. Eine kinetische Theorie der Materie lässt sich nur mit Hülfe von Elementen gewinnen, die durch die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit von dem Raum, den sie erfüllen, verschieden sind. Der Ableitung der meisten physikalischen Erscheinungen entspricht ferner die Annahme leerer Zwischenräume zwischen den in fortwährenden Bewegungen begriffenen undurchdringlichen Elementen am besten; doch würde der Voraussetzung eines Zwischenmediums von relativ sehr kleinem Widerstand wohl kein Hinderniss im Wege stehen, aber so lange dasselbe nicht durch zwingende Gründe gefordert ist, muss es als eine überflüssige Zugabe betrachtet werden. Dagegen besteht ebenso wenig eine zwingende Nöthigung, die bewegten Elemente aus Vorliebe für die Traditionen der antiken Atomistik auch noch mit den Eigenschaften der absoluten Härte und Untheilbarkeit auszustatten. Vielmehr würde es vollkommen denkbar sein, dass die Atome aus einer an sich ins unbegrenzte theilbaren Materie bestehen, und dass darum auch bei ihren Bewegungen gegen einander elastische Reactionen eintreten, während sie doch vermöge des in ihnen vorhandenen Bewegungsvorganges allen unseren Trennungsmitteln widerstehen. Der Begriff des Atoms kann von der Physik nur in diesem relativen Sinne verstanden werden, und in der That verändert sich daher in verschiedenen Gebieten der physikalischen Untersuchung dieser Begriff, wenngleich man vielfach durch den Hülfsbegriff des »Molecüls« die absolute Bedeutung des Atoms zu retten versucht hat. Aber seine legitime Anwendung findet der Molecülbegriff nur dann, wenn in einer und derselben Untersuchung Elemente verschiedener Ordnung zu unterscheiden sind, und nichts steht daher im Wege anzunehmen, dass auch die einfachsten Elemente, denen wir begegnen, immer nur Atome im relativen Sinne sind. War der Streit zwischen Continuitätshypothese und Atomistik sowie zwischen den verschiedenen Formen der letzteren hauptsächlich aus dem Streben hervor-

gegangen, der Materie absolute Eigenschaften beizulegen, bei denen man absichtlich von den Bedingungen der wirklichen Anschauung abstrahirt hatte, so wird ein gewisser Ausgleich zwischen den verschiedenen Ansichten herzustellen sein, indem man sich jener Relativität unserer Begriffe bewusst wird, durch welche die empirische Gültigkeit derselben allein ermöglicht ist.

Noch in einer andern Beziehung bedürfen aber die Anschauungen, welche in den verschiedenen Gestaltungen der neueren kinetischen Atomistik zur Geltung gelangt sind, der logischen Correctur. In dem berechtigten Streben, alle Erscheinungen aus elementaren Bewegungsvorgängen von anschaulicher Beschaffenheit zu erklären, hat man es als eine unabweisbare Forderung angesehen, dass auch das materielle Substrat selbst eine anschauliche Beschaffenheit besitzen müsse, und hieraus ist dann die in verschiedener Gestalt eingetretene Wiedererneuerung des Demokritischen corpuscularen Atombegriffs hervorgegangen. Demzufolge wurde es als eine Nothwendigkeit bezeichnet, dass die sinnlichen Eigenschaften, die wir den Körpern beilegen, als solche schon in den Atomen vorhanden sein müssten, und dabei nicht bedacht, dass Licht, Schall, Wärme so gut wie Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Elasticität u. dgl. sinnliche Eigenschaften sind, und dass doch im ersteren Fall es keinem Physiker mehr in den Sinn kommt, eine Congruenz der elementaren Vorgänge selbst mit den aus ihnen resultirenden sinnlichen Erscheinungen zu behaupten. In der That konnte auf die zweifelhafte Berechtigung jener Forderung schon der Umstand aufmerksam machen, dass man genöthigt war, unter den verschiedenen Eigenschaften der wahrnehmbaren Objecte eine Auswahl zu treffen, wenn man die Atome schlechterdings nur als ausgedehnte, undurchdringliche und je nach Umständen entweder als absolut harte oder als absolut elastische Körper bezeichnete, ihnen aber Farbe, Wärme und andere Eigenschaften aberkannte. Mindestens irgend eine Lichtbeschaffenheit muss ein Körper ebenso nothwendig wie eine bestimmte Gestalt besitzen, wenn er vorstellbar sein soll. Mit der Annahme corpuscularer Atome, denen alle Eigenschaften fehlen, mittelst deren wir uns Körper vorstellen können, macht man also nicht weniger eine rein begriffliche Fiction wie mit der Annahme von Kraftpunkten.

Es ist leicht ersichtlich, dass diese ganze Forderung der Anschaulichkeit des materiellen Substrates auf der Voraussetzung beruht, die in der Anschauung gegebenen Naturerscheinungen müssten nothwendig auf letzte Bedingungen zurückführen, welche ebenfalls in der Anschauung gegeben seien. In dieser Form ist aber das Postulat der Anschaulichkeit nicht haltbar. Wäre eine solche Uebereinstimmung der Eigenschaften des Substrates der Erscheinungen mit diesen selbst zu statuiren, so würden überhaupt die Motive zur Bildung des Begriffs der Materie hinwegfallen. Eine Nöthigung zur Bildung dieses Begriffs ist vielmehr gerade desshalb vorhanden, weil eine widerspruchslose Erklärung der Erscheinungen nur

gelingt, insofern man dieselben als Wirkungen eines Substrates voraussetzt, das uns niemals selbst, sondern immer nur in diesen seinen Wirkungen anschaulich gegeben ist. Man könnte also gegenüber jener Forderung vielmehr behaupten, der Begriff der Materie verbiete jede unmittelbare Uebertragung in die Anschauung, weil ihm dies als ein wesentliches Merkmal zukomme, dass erst die den hypothetischen Elementen der Materie zugeschriebenen Wirkungen in die Anschauung treten. Auf keinen Fall aber ist man berechtigt, der Anschauung zu Liebe die Materie mit Eigenschaften auszuschmücken, zu denen die logischen Motive, welche die Bildung dieses Begriffs veranlasst haben, an und für sich nicht nöthigen würden. Nun geben uns über den Begriff als solchen offenbar diejenigen Bestimmungen die genaueste Rechenschaft, zu denen sich die mathematische Analyse genöthigt sieht. Denn ihr ist es eigen, dass sie keines der wesentlichen Begriffselemente entbehren kann, dass sie aber von selbst alle überflüssigen und etwa bloss aus der Gewohnheit der Vorstellung entspringenden Bestandtheile abstreift. Von diesem Gesichtspunkte aus würde am wahrscheinlichsten von einer Vereinigung der Voraussetzungen der kinetischen mit denjenigen der dynamischen Atomistik die Lösung der schwebenden Widersprüche zu erwarten sein. Ueberall in der That führt der Begriff der Materie zurück auf bewegte Kraftcentren. Was uns als physisches Substrat der Ausdehnung der Körperwelt sowie aller Erscheinungen, die damit zusammenhängen, gegeben ist, das ist nicht das Kraftcentrum selbst, sondern dessen Wirkungssphäre. Indem diese an die Stelle des corpuscularen Atoms tritt, erfüllt sie alle Forderungen, die man an letzteres gestellt hatte, und zugleich werden die Bedenken hinfällig, zu denen das ausgedehnte Atom Anlass gegeben. Denn die Frage, ob den Elementen absolute Härte, Elasticität, Farbe u. s. w. zukomme, hat in Bezug auf die Wirkungssphäre keinen Sinn mehr.

Hiermit sind zugleich dem Postulat der Anschaulichkeit die Grenzen angewiesen, die es nicht überschreiten darf, ohne das Recht einzubüssen, das ihm als einem heuristischen Princip der Naturforschung zukommt. Auf den Begriff der Materie angewandt schliesst dasselbe lediglich die Forderung in sich, dass die vorausgesetzten Elemente und elementaren Processe den Gesetzen unserer Anschauung conform sind. Diese Uebereinstimmung hat hier durchaus den nämlichen Sinn wie in der realen Geometrie und Mechanik: sie verhindert eine Hinzufügung begrifflicher Elemente, welche mit unseren Anschauungsformen im Widerspruch stehen; sie hindert aber nicht eine Abstraction von solchen Bestandtheilen, die in der sinnlichen Anschauung die für die Begriffsbildung wesentlichen Elemente begleiten. Eine derartige Abstraction wird vielmehr gefordert, sobald es sich, wie bei den mathematischen Begriffen und bei dem Begriff der Materie, um Feststellungen handelt, die sich nicht auf die Erscheinungen als solche, sondern entweder auf ihre formalen Gesetze oder auf ihre hypothetischen Grundlagen beziehen. Indem das Postulat der Anschaulichkeit

in diese allein einer festen Bestimmung zugänglichen Grenzen eingeschränkt wird, bleibt es zugleich in Uebereinstimmung mit der Forderung objectiver Begreiflichkeit, die in ähnlichem Sinne als dasjenige Princip angesehen werden darf, welches an die Stelle des von der teleologischen Naturphilosophie zur Geltung gebrachten Postulates der subjectiven Begreiflichkeit zu treten hat. (Vgl. S. 236.)

## 4. Die allgemeinen Naturgesetze.

Die allgemeinen Naturgesetze, auf welche die Physik bei der Causalerklärung der Erscheinungen geführt wird, lassen sich in zwei Classen unterscheiden: erstens in Gesetze, die sich auf die Wirksamkeit des materiellen Substrates der Erscheinungen beziehen, und zweitens in solche, die den Zusammenhang der verschiedenen Formen von Bewegungen unter einander beherrschen. Wir können die ersteren als Kraftgesetze, die zweiten als Energiegesetze bezeichnen. Denn das Verhältniss beider Gesetze zu einander wird durch die beiden wichtigen Begriffe der Kraft und der Energie bestimmt, deren Entwicklung mit den oben besprochenen Entwicklungen des Begriffs der Materie in innigem Zusammenhange steht.

### a. Kraftgesetze und Kraftfunctionen.

Die geläufige Definition der Kraft als einer »Ursache von Bewegung« ist nicht nur ungenügend, sondern, sobald man den exacten Causalbegriff zu Grunde legt, geradezu falsch. Denn hier ist die Ursache einer Bewegung immer nur eine andere, vorangegangene Bewegung. (Bd. I, S. 542.) Der Kraftbegriff der neueren Physik ist durch Galilei festgestellt und durch Newton weiter ausgebildet worden. Indem Galilei, ausgehend von dem Beispiel der Muskelkraft, das Wesen der Kraftleistung in dem Bewegungsantriebe sieht, der einer Masse durch irgend eine Ursache, z. B. durch einen Stoss, mitgetheilt wird, gewinnt er als das heute noch gültige Mass der Kraft das Product der Masse in ihre Beschleunigung. Indem sich sodann im Gefolge von Newton's Gravitationstheorie der Begriff der Fernewirkung entwickelt, wird die Kraft zu dem nach eben diesem Masse zu bestimmenden Bewegungsantrieb einer Masse durch eine andere, wobei zugleich den räumlichen Relationen der Massen selbst diejenigen ihrer Mittelpunkte substituirt werden können. Alle in der Natur wirksamen Kräfte werden darum Centralkräfte genannt, und es wird als die allgemeine Eigenschaft der letzteren angesehen, dass sie in der Richtung der geradlinigen Verbindungslinien der Massenmittelpunkte Beschleunigungen der Massen zu erzeugen streben. So wird in Folge der Wechselwirkungen zwischen allen Theilen der Materie diese letztere zu einem grossen Kraftreservoir. Jedem ihrer Theile bleibt die Fähigkeit, in andern Theilen Be-

schleunigungen hervorzubringen, unveränderlich erhalten; diese Beschleunigungen aber sind theils wirkliche, theils, in Folge der wechselseitigen Hemmungen verschiedener Bewegungsantriebe, bloss intendirte.

Wenn man von dem auf solche Weise festgestellten Kraftbegriff ausgeht, so kann nun der Begriff eines allgemeinen Naturgesetzes nur die Bedeutung haben, dass man unter ihm die Function versteht, nach welcher sich die beschleunigende Wirkung mit der Grösse der Massen und mit der Entfernung der Massecentren verändert. Das allgemeinste Gesetz dieser Art ist das Newton'sche Gravitationsgesetz, nach welchem die beschleunigende Wirkung dem Product der Massen direct und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist. Da übereinstimmende Beziehungen auch für die elektrostatischen und magnetischen Fernewirkungen Platz greifen, so pflegt man dieses Gesetz als das allgemeine Kraftgesetz für fernewirkende Kräfte zu betrachten. Es lässt sich demselben eine anschauliche Bedeutung geben, wenn man es dem Princip unterordnet, dass die Kraftleistung proportional ihrer räumlichen Ausbreitung abnimmt. Denn es muss dann in einer Entfernung R die Wirkung auf einen einzelnen Punkt der Grösse der zu R gehörigen Kugeloberfläche umgekehrt proportional sein. Dadurch tritt das Gesetz der fernewirkenden Kräfte in unmittelbare Analogie mit dem Gesetz der Fortpflanzung einer Bewegungsenergie, wie es z. B. theoretisch für die Ausbreitung der Licht- und Schallwellen gültig ist, wo die in einer Entfernung R von der Licht- oder Schallquelle vorhandene Wellenamplitude dem Quadrate von R umgekehrt proportional ist. Diese Analogie ist es, welche die Zurückführung der fernewirkenden Kräfte auf die Bewegung eines Mediums und damit zugleich die Umwandlung des Begriffs der fernewirkenden Kraft in den der Bewegungsenergie wesentlich unterstützt.

Wenn nun auch eine solche Umwandlung gelingen sollte, so würde doch die mathematische Analyse der physikalischen Erscheinungen in den meisten Fällen, wo es sich um die Untersuchung von Wirkungen handelt, die im Verhältniss des Quadrats der Entfernungen abnehmen, die vereinfachte Betrachtung, welche der Begriff der fernewirkenden Kräfte gestattet, nicht entbehren können. Denn für die Analyse der in irgend einer gegebenen Distanz auftretenden Wirkungen kommen die etwa zu postulirenden Zwischenvorgänge nicht in Betracht, sondern es tritt an ihre Stelle eben nur die mathematische Function, welche die Beziehung von Abstand und Wirkung ausdrückt. Gerade für die Zwecke der Analyse erscheint aber noch eine weitere Zerlegung dieser ursprünglichen Kraftfunction geboten, indem man von dem überall in der analytischen Mechanik angewandten Hülfsmittel einer Zerlegung nach bestimmten Coordinatenrichtungen Gebrauch macht. Wird diese Zerlegung nach drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten x, y und z ausgeführt, so werden die drei Kraftcomponenten durch die Differentialquotienten $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ und $\frac{dV}{dz}$ aus-

gedrückt, wo die Function V dem einfachen Verhältniss $\frac{m\,m'}{r}$ entspricht, wenn m und m' zwei in Wechselwirkung stehende Massen und r ihre Entfernung bedeutet. Diese vereinfachte Kraftfunction V pflegt nach Green die Potentialfunction oder nach Gauss das Potential genannt zu werden. Die analytische Bedeutung derselben liegt theils in ihrer Einfachheit, theils und hauptsächlich darin, dass in ihr auf die Zerlegung nach den drei Raumcoordinaten bereits Rücksicht genommen ist, da das Potential einfach als diejenige Function definirt werden kann, deren Differentialquotienten nach den drei Richtungen des Raumes die Kraftcomponenten nach diesen Richtungen sind. Der Begriff des Potentials hat demnach zunächst die Bedeutung einer mathematischen Hülfsfunction, durch deren Differentialquotienten die Kraftcomponenten d. h. die intendirten Beschleunigungen nach den drei Coordinatenrichtungen gemessen werden. Nichts desto weniger lässt sich auch dem Potential selbst ein bestimmter mechanischer Sinn unterlegen. Denkt man sich nämlich zwei Massen m und m' zuerst aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r und dann abermals aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r' von einander gebracht, so verhalten sich die Arbeiten V und V', welche beidemal durch die wechselseitige Einwirkung der Massen geleistet werden, umgekehrt wie die angegebenen Entfernungen, also $V : V' = r' : r$. Demnach kann auch das Potential $V = \frac{m\,m'}{r}$ mechanisch definirt werden als diejenige Arbeit, die in Folge der Wechselwirkung zweier Massen geleistet wird, wenn dieselben aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r versetzt werden*). Doch besitzt diese Definition einen mehr secundären Charakter und kommt daher in der Verwendung des Potentialbegriffs, gegenüber der ursprünglicheren rein mathematischen Bedeutung desselben als Hülfsfunction, kaum in Betracht.

Das Gesetz der Fernewirkung, welches aus Newton's Gravitationstheorie abstrahirt worden war, und für welches zugleich das Potential die einfachste Form einer linearen Function annimmt, hat sich nun aber in zwei Erscheinungsgebieten nicht bewährt gefunden, nämlich erstens bei solchen Fernewirkungen, deren materielles Substrat in einer sehr raschen Bewegung begriffen zu sein scheint, und zweitens bei den molecularen Entfernungen benachbarter Körperelemente. Der erste dieser Fälle kommt bei den elektrodynamischen Fernewirkungen zur Geltung. Hier weist das Ampère'sche Gesetz der Wechselwirkung elektrischer Ströme auf Fernewirkungen hin, die nicht bloss von der Menge der Elektricitäten und ihrer Entfernung, sondern auch von ihrer Bewegung abhängig sind. Man hat sich daher genöthigt gesehen, in diesem Fall complicirtere Gesetze der Fernewirkungen aufzustellen, welche ausser der Masse und Entfernung

*) W. Weber, Poggendorff's Annalen, Bd. 156, 1875, S. 1 f.

auch noch die Bewegung der Stromelemente oder von ihr abhängige Grössen, wie die Stromintensität, enthalten. Am directesten ist dieser Einfluss der Bewegung in W. Weber's elektrodynamischem Grundgesetz zur Geltung gebracht, in welches neben der Entfernung r sowohl die Geschwindigkeit $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ wie die Geschwindigkeitsänderung $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)$ eingeht, so dass dieses Gesetz die Form annimmt

$$\frac{mm'}{r^2}\left(1 - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \beta\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

welche, wenn die beiden letzten Glieder null werden, in das gewöhnliche Gesetz der Fernewirkungen, das auch für die elektrostatischen Wirkungen gilt, übergeht. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend hat man gelegentlich versucht, dem Weber'schen Gesetz den Charakter eines allgemeinsten Naturgesetzes beizulegen, welches das Newton'sche Gesetz als einen Specialfall unter sich begreife. Bei der Unsicherheit über das eigentliche Substrat der elektrodynamischen Erscheinungen dürften aber diese kaum schon geeignet sein, für die Ableitung eines fundamentalen Naturgesetzes die Grundlage zu bilden.

Ein zweites Gebiet von Erscheinungen, welches der Unterordnung unter das Newton'sche Gesetz sich entzieht, bilden die Molecularwirkungen. So lange der Gesichtspunkt der Actio in distans und die statische Auffassung der Körperzustände herrschend waren, suchte man hier den Erscheinungen gerecht zu werden, indem man einfach die gewöhnliche Kraftfunction durch eine andere ersetzte, welche die Eigenschaft besass, bei der Vergrösserung der Entfernung über eine bestimmte Grenze hinaus sehr rasch abzunehmen und bald verschwindend klein zu werden, also z. B. durch eine Function von der Form

$$f(r) = \mu\mu'^{\,-\left(\frac{r}{n\alpha}\right)^m},$$

in welcher r die Entfernung der in Wechselwirkung stehenden Massetheilchen $\mu$ und $\mu'$, $\alpha$ den Zwischenraum zwischen je zwei benachbarten Theilchen und n und m zwei sehr grosse positive ganze Zahlen bedeuten*). Diese Function bleibt nahezu constant, so lange r nicht sehr viel grösser als $\alpha$ ist; sie wird aber verschwindend klein, sobald $r > n\alpha$ geworden ist. Es ist selbstverständlich, dass eine derartige Formel, welche zwischen den Molecularkräften und den fernewirkenden Kräften gar keine Beziehungen statuirt, obgleich sie doch für beide auf das Princip der Actio in distans zurückgeht, nicht befriedigen kann. Es lag daher nahe, diesen Widerspruch dadurch zu vermeiden, dass man die specifische Eigenthümlichkeit der Molecularwirkungen aus der Combination zahlreicher Kraftcentren

*) Poisson, Mém. de l'Acad., T. VIII, p. 357.

erklärte. So sprach Fechner die Hypothese aus, die Potenz der Kräftefunction entspreche der Anzahl der Distanzfactoren der in Wechselwirkung stehenden Elemente, für 2 Elemente sei sie also = 2, für 3 = 6, für 4 = 12, für 5 = 20 u. s. w. Dabei liesse sich zugleich ein dem Gegensatz anziehender und abstossender Kräfte entsprechender Wechsel des Ausdrucks gewinnen, wenn man entgegengesetzte Richtungen der mitgetheilten Bewegung mit entgegengesetzten Vorzeichen versehe. Die für 2 Elemente entsprechende zweite Potenz, welche eine anziehende Kraft repräsentirt, wäre demnach als Product $+ r . - r$ negativ zu nehmen, ebenso alle höheren Potenzen, welche aus einer ungeraden Zahl von Quadraten zusammengesetzt sind, wogegen diejenigen, die in eine gerade Zahl von Quadraten zerlegt werden können, positive Vorzeichen erhalten und demnach abstossenden Kräften entsprechen würden*). In ähnlichem Sinne hat Buys Ballot angenommen, die allgemeine Kraftfunction werde durch eine Reihe repräsentirt, welche nach reciproken Werthen der aufsteigenden Potenzen von r fortschreite, und in welcher der Wechsel der Vorzeichen dem Wechsel anziehender und abstossender Kräfte entspreche; für endliche Distanzen aber verschwänden alle Glieder dieser Reihe mit Ausnahme des ersten, welches $r^2$ enthalte**). Die erste dieser Betrachtungen scheitert jedoch an der praktischen Unmöglichkeit ihrer Durchführung; die zweite besteht lediglich in der Anwendung einer analytischen Form, welche sich in Folge ihrer Allgemeinheit zur Darstellung jeder möglichen empirischen Gesetzmässigkeit eignet, eben darum aber nicht den Anspruch auf die Bedeutung eines allgemeinen Naturgesetzes erheben kann.

Allen diesen Versuchen, ein gleichförmiges Gesetz für die Fernewirkung der Atome aufzufinden, wurde schliesslich durch die von der neueren mechanischen Wärmetheorie ausgehenden Vorstellungen der Boden entzogen. Indem dieselbe die Aeusserungen der so genannten Molecularkräfte als Wirkungen auffassen lehrte, die aus der Bewegung der Elemente resultiren, näherte sich für dieses Gebiet der Begriff der Kraft wieder seinem ursprünglichen Ausgangspunkte. Er verwandelte sich in die durch den directen Anprall der Theilchen verursachte Beschleunigung. Dadurch verlor aber zugleich dieser Begriff an unmittelbarer physikalischer Bedeutung. Denn es konnte zwar vorausgesetzt werden, dass die mechanischen Gesetze des Stosses für den Anprall der Elemente ihre Gültigkeit bewahren würden; aber bei der ungeheuren Verschiedenheit der Bewegungszustände der Atome und ihrer räumlichen Vertheilung war hier unmöglich an ein einfaches Princip zu denken, welches die Gesichtspunkte zur Entwicklung einer gleichförmigen und für alle Fälle ausreichenden Kräftefunction hätte darbieten können. Dafür trat zuerst im Gebiete dieser Untersuchungen der

*) Fechner, Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre, 2. Aufl., S. 203 f.

**) Buys Ballot, Pogg. Ann., Bd. 103, S. 241.

Molecularphysik ein neuer, dem der Kraft verwandter Begriff hervor, der sich bald auch für das Ganze der Physik von grosser Fruchtbarkeit erwies, der Begriff der Energie. Seine Bedeutung liegt hauptsächlich darin, dass in allen den Fällen, wo die Aufstellung eines Kraftgesetzes ein Ding der Unmöglichkeit ist, die Gewinnung und Anwendung allgemeiner Principien in Bezug auf das Verhalten der Energie immer noch möglich bleibt. In der heutigen Physik ist daher die Ueberzeugung zur Herrschaft gelangt, dass die allgemeinsten Naturgesetze überhaupt nicht in irgend welchen Kräftefunctionen, sondern allein in Energiegesetzen bestehen können. Im Zusammenhange mit dieser Umgestaltung der Anschauungen ist zuweilen die völlige Elimination des Kraftbegriffs als eine Aufgabe der Zukunft bezeichnet worden, wobei man meistens zugleich auf die Dunkelheit dieses Begriffes hinwies. Hiergegen ist jedoch zu bemerken, dass der Begriff der Kraft nur dann dunkel ist, wenn man ihn ohne Noth dazu macht. Als Ausdruck für die durch irgend welche Bedingungen entstandene wirkliche oder intendirte Beschleunigung einer Masse ist er unentbehrlich, wenn man lästige Umschreibungen vermeiden will. (Vgl. oben S. 365.) Es ist aber auch klar, dass der Begriff in diesem Sinne, in welchem er durchaus dem von Galilei und Newton eingeführten Wortgebrauch entspricht, zur Aufstellung universeller Naturgesetze nicht geeignet ist.

### b. Die Energiegesetze.

Der Begriff der Energie unterscheidet sich von dem der Kraft wesentlich dadurch, dass bei ihm nicht, wie bei diesem, die blosse Veränderung in dem Bewegungszustand einer Masse, sondern der Effect einer Bewegung, also die geleistete Arbeit berücksichtigt wird. Nun wird die Arbeit einer Kraft gemessen durch das Product der Grösse der letzteren in die Länge des Weges, auf welchem sie eine Masse zu beschleunigen strebt. Unter der Energie versteht man demgemäss die in einer Masse oder einem Massensystem vorhandene Arbeitsfähigkeit. Diese Arbeitsfähigkeit kann entweder darin begründet sein, dass bestimmte Massen in Bewegungen begriffen sind, die sie auf andere Massen übertragen können, wodurch Arbeit geleistet wird; oder sie kann darin bestehen, dass sich eine Masse in einer Lage befindet, aus welcher sie in eine andere Lage überzugehen strebt, wie z. B. ein gehobenes Gewicht oder eine gespannte Feder. Im ersten Fall bezeichnet man die Energie als actuelle oder kinetische, im zweiten Fall als potentielle oder als Energie der Lage. Die kinetische Energie ist es, die man früher als lebendige Kraft bezeichnet hat, wonach dann für die potentielle der Ausdruck Spannkraft gebildet wurde. Diese Ausdrücke sind desshalb minder geeignet, weil bei ihnen der Begriff der Kraft in einem seiner ursprünglichen Bedeutung entfremdeten Sinne gebraucht wird. Die lebendige Kraft,

welche durch das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gemessen wird, ist etwas von der wirklichen oder intendirten Beschleunigung durchaus Verschiedenes; sie entspricht aber der Arbeit, welche die bewegte Masse leisten kann, und deckt sich darum vollständig mit dem oben definirten Begriff der Energie. Auch diese wird gemessen durch das Product $\frac{1}{2} m v^2$. Es kann dabei die Geschwindigkeit v entweder eine actuelle oder eine potentielle sein, insofern der Masse m auch dann diese Energie zukommt, wenn sie in eine Lage gebracht ist, aus welcher sie in eine Bewegung überzugehen strebt, durch die sie die Geschwindigkeit v erreicht. Im allgemeinen wird zu einer solchen Lageänderung eine gewisse durch das Product der Kraft k in den zurückgelegten Weg s messbare Arbeitsleistung erforderlich sein. Die potentielle Energie kann daher ebensowohl durch die zu ihrer Erzeugung erforderliche Arbeit $k \cdot s$ gemessen werden wie durch die actuelle Energie $\frac{1}{2} m v^2$, in die sie überzugehen fähig ist. Auf diese Weise führt von selbst die begriffliche Entwicklung der beiden Formen der Energie zum Princip ihres Uebergangs in einander. Ferner fallen die verschiedensten Formen der Bewegung unter den Begriff der kinetischen Energie, und sobald daher eine bestimmte Bewegungsform in eine andere übergeht, so ist die Voraussetzung geboten, dass eine solche Transformation nach äquivalenten Verhältnissen geschieht. Hiernach ist die Aufstellung des Gesetzes der Erhaltung der Energie unmittelbar an die Entwicklung des Begriffs der Energie geknüpft. Ist dasselbe auch zunächst aus der Auffindung bestimmter empirischer Thatsachen hervorgegangen, so boten sich doch sofort so einleuchtende Beziehungspunkte zu den Grundvoraussetzungen der mechanischen Physik, dass es sich leicht als eine Consequenz aus den letzteren ansehen liess. Der Begriff der Energie aber ist überhaupt erst aus dem Bedürfniss entsprungen, für dasjenige was im Gebiet des physikalischen Geschehens dem Princip der Constanz der Materie entspricht, einen geeigneten Begriff zu schaffen. Darum ist es vollkommen naturgemäss, dass die deutliche Umgrenzung und Unterscheidung dieses Begriffs später ist als das Princip der Erhaltung der Energie selbst.

Alle jene Vortheile, welche man sich früher von einer universellen Kräftefunction vergeblich versprochen hatte, bietet nun das allgemeine Energiegesetz in Wirklichkeit dar. Vermöge seiner Allgemeingültigkeit eignet es sich zur Verknüpfung der verschiedenartigsten Erscheinungen, und vermöge seiner Allgemeinheit gestattet es noch solche Vorgänge festen quantitativen Beziehungen unterzuordnen, die uns hinsichtlich der elementaren Bewegungsformen, aus denen sie bestehen, völlig unbekannt sind. Vor allem aber gewinnt das Energieprincip, indem es den Charakter eines allgemeinen Erfahrungsgesetzes mit demjenigen eines a priori gültigen Postulates verbindet, die Bedeutung eines für die Deduction der physikalischen

Erscheinungen geeigneten obersten methodologischen Grundsatzes, mit welchem alle einzelnen Sätze in Uebereinstimmung bleiben müssen, sofern ihnen ein Anspruch auf wahrscheinliche Gültigkeit zukommen soll.

### c. Die physikalischen Grenzbegriffe.

In den allgemeinen Voraussetzungen über das Substrat der Naturerscheinungen liegt die Quelle zur Bildung zweier physikalischer Grenzbegriffe, die den beiden Zahlgrenzen auf mathematischem Gebiete entsprechen. (Vgl. Abschn. II, S. 126.) Der untere Grenzbegriff bezieht sich auf das Element der Materie, der obere auf die Gesammtmasse derselben oder die Totalität des Universums. Die Hypothesen über die Materie genügen aber für sich allein nicht, um diese beiden Begriffe widerspruchslos zu gestalten, sondern es sind neben ihnen die Kraft- und Energiegesetze zu berücksichtigen, die hier, wo es, wie bei allen Grenzbegriffen, nur um Postulate unseres Denkens sich handeln kann, diesem seine Richtung anweisen müssen.

Bei dem unteren Grenzbegriff findet jene Wechselbeziehung darin ihren Ausdruck, dass der allgemeine Begriff des Atoms als des letzten Elementes der Materie unmittelbar durch die Beschaffenheit der Kraft- und Energiegesetze bestimmt worden ist. Dies verräth sich sowohl in den anschaulichen Gestaltungen der älteren wie in den mathematischen der neueren Atomistik. Dort verlangt man Elemente, zwischen denen Stosswirkungen möglich sind, hier fordert man, dass die materiellen Elemente als Ausgangspunkte von Kräftefunctionen oder als geeignete Medien für die Aufbewahrung und Uebertragung von Energie von der mathematischen Deduction benützt werden können. Darum ist im Bereich der mathematischen Physik der Gegensatz zwischen Continuitätshypothese und Atomistik nur ein scheinbarer: die erstere ist selbst atomistisch, und der Unterschied beider entspringt allein aus dem Streben, den Begriff des materiellen Elementes zugleich philosophisch zu rechtfertigen, genau ebenso wie bei den entsprechenden Begründungen der mathematischen Infinitesimalmethode. Die Contacthypothese gesteht zu, dass die Elemente, deren sie bedarf, nur die Bedeutung mathematischer Conceptionen besitzen, während physisch, der unmittelbaren sinnlichen Erscheinung entsprechend, die Materie stetig ausgedehnt sei. Hier waltet also der nominalistische Standpunkt vor, mit einer empiristischen Beimischung, welche in der Uebereinstimmung der Vorstellungen über die Materie mit der sinnlichen Vorstellung der Körper ihren Ausdruck findet. Die Atomistik dagegen betrachtet die discreten Elemente, deren sie für die Kraft- und Energiegesetze bedarf, als die wirklichen Elemente der Materie. Sie ist realistisch in dem früher besprochenen Sinne. (Vgl. S. 85.) Dabei ist sie aber zugleich in sich mannigfach gespalten hinsichtlich der Frage, ob die Atome

den empirischen Objecten der Anschauung zu gleichen haben oder nicht. Ursprünglich ganz und gar den Motiven der Anschauung folgend, hat sie sich allmählich mehr von denselben befreit und ist so namentlich in der dynamischen Atomistik zu einer begrifflichen Conception des Atoms gelangt, bei welcher das letztere einen rein mathematischen Charakter annimmt, ähnlich den Elementarbegriffen der Contacthypothese. Auch in dieser Gestaltung bewahrt aber die atomistische Hypothese den realistischen Grundgedanken, dass die unmittelbare Vorstellung der Objecte als ein Schein zu betrachten sei, hinter welchem die Atome als deren wirkliches Sein sich verbergen.

Während die analogen Widersprüche über den mathematischen Infinitesimalbegriff in der Feststellung der eigenthümlichen Form der mathematischen Abstraction ihre Lösung fanden, befindet sich die logische Entscheidung dieser physikalischen Frage auf einem etwas anderen Boden. Wohl ist auch hier der Streit zum Theil dadurch bedingt, dass man geneigt ist, den Producten begrifflicher Abstraction reale Wirklichkeit zuzuschreiben und darum nun auch die Begriffe mit den Attributen der sinnlichen Anschauung auszustatten. Aber daneben macht noch der Umstand seine Wirkungen geltend, dass die Materie ein hypothetischer Begriff ist, der zum Behuf einer widerspruchslosen Erklärung der empirisch gegebenen Erscheinungen gebildet wird, und dass hieraus das Streben entsteht, denselben so wenig wie möglich von den Erscheinungen selbst abweichen zu lassen. Dies Streben ist den entgegengesetzten Hypothesen gemeinsam, aber es bemächtigt sich verschiedenartiger Bestandtheile derselben. Die Contacthypothese nimmt neben den nominalistisch gefassten Elementarbegriffen ein anschauliches Substrat an, welches, für die mathematische Deduction nicht erforderlich, nur jenem Streben der Uebereinstimmung seinen Ursprung verdankt; die Atomistik stattet in ihren meisten Gestaltungen die Elemente selbst mit solchen anschaulichen Eigenschaften aus, wozu die realistische Fassung der Elementarbegriffe herausfordert. Nun haben wir oben gesehen, dass das Streben nach Anschaulichkeit in diesem Falle in fortwährende Widersprüche verwickelt, die meistens nur desshalb unaufgedeckt bleiben, weil jenes Streben auf halbem Wege stehen bleibt. Darin liegt schon das Zugeständniss, dass die Materie nur eine begriffliche Fassung zulässt, d. h. dass sie nur als Substrat bestimmter Kräftewirkungen zu denken ist. Mit der Beseitigung der überflüssigen anschaulichen Zugaben, mit welchen Nominalismus und Realismus hier gleicherweise den Begriff der Materie versehen, verschwinden nun aber die Gegensätze dieser Anschauungen selbst. Der Contacthypothese wie der Atomistik bleiben allein Kraftcentren und ihre Wirkungssphären, als rein begriffliche Feststellungen, welche erst in Verbindung mit den an sie geknüpften Kraft- und Energiegesetzen anschauliche Erfolge herbeiführen. Der Widerspruch zwischen Contacthypothese und Atomistik löst sich also, indem die erstere hinsichtlich der begrifflichen Auffassung der

zur Deduction verwendeten Elemente, die letztere hinsichtlich der allgemeinen Form der Anordnung der Elemente Recht behält.

Von wesentlich anderem Charakter ist der Gegensatz, in welchem sich die philosophische Fassung der Continuitätshypothese zu den atomistischen Vorstellungen befindet. Indem sie die Materie zu einem continuirlichen und zugleich ins Unendliche theilbaren Kraftträger macht, hebt sie die allen physikalischen Hypothesen gemeinsame Voraussetzung auf, dass jeder endliche Theil der Materie aus einer endlichen Anzahl von Kraftcentren bestehe. So entwickelt sich hier ein Streit, welcher dem nachher zu erörternden über die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Totalität des Universums analog ist. In Bezug auf die Elementarbegriffe löst sich aber dieser Streit durch die Bemerkung, dass sich beide Auffassungen auf verschiedene Gegenstände beziehen. Der philosophische Dynamiker hat die Körper unserer Anschauung im Auge; er behauptet, dass die räumliche Zerlegung eines Körpers nie bei einer Grenze anlangt, bei welcher sie aufhören muss. Der Begriff des Physikers dagegen bezieht sich auf das hypothetische Substrat der körperlichen Erscheinungen; er behauptet, nicht dieses Substrat selbst, sondern die ihm beigelegten Wirkungen müssten in den Eigenschaften der Körper anzutreffen sein. So wird in diesem Fall durch eine seltsame Vertauschung der Rollen der Philosoph zum Empiriker und der Empiriker zum Philosophen. Es kann aber keinem Zweifel unterworfen sein, wem die Schuld eines error loci der Begriffe hierbei aufgebürdet werden muss. Die Uebereinstimmung mit den Kraft- und Energiegesetzen bildet die einzige Richtschnur für die Gestaltung des Begriffs der Materie. Darin liegt zugleich, da jene Gesetze sich auf räumliche Wirkungen beziehen, die Uebereinstimmung mit den allgemeinen Eigenschaften des Raumes eingeschlossen. Insofern es sich aber hier überall nur um begriffliche Feststellungen handelt, kann dabei nur eine Uebereinstimmung mit den geometrischen Raumbegriffen, nicht mit unsern Vorstellungen physischer Körper im Raume in Frage kommen. Wie schon die Mechanik an geometrische Abstractionen anknüpft, so werden sich darum auch unsere hypothetischen Feststellungen über die Materie mit voller Freiheit solcher Abstractionen bedienen dürfen. Auf diese Weise wird die Antinomie zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit bei den physikalischen Elementarbegriffen einfach durch die Erwägung beseitigt, dass die Abstraction des physikalischen Kraftpunktes als eine rein begriffliche Conception sich unmittelbar anschliesst an die Abstraction des geometrischen Punktes, in welchem wir uns mit der Ausdehnung zugleich die Theilbarkeit aufgehoben denken. Wie der geometrische Punkt den durch unsere Gedankenthätigkeit fixirten Ort im Raume, abgesehen von den objectiven Hülfsmitteln der Ortsbestimmung, so bezeichnet das Atom als Kraftcentrum den von unserm Denken postulirten Ausgangspunkt eines Bewegungsvorganges.

Hat die Physik den Widerstreit zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit bei dem unteren Grenzbegriff, gezwungen durch die Forderungen der

Naturerklärung, praktisch gelöst, so treibt nun aber die nämliche Antinomie bei dem oberen Grenzbegriff noch immer ihr Spiel. Die Lösung wird hier durch den Umstand erschwert, dass in die Frage über Endlichkeit oder Unendlichkeit des Weltganzen noch der Gegensatz zwischen jenen beiden Formen der Unendlichkeit, der unvollendbaren und der vollendeten, sich einmengt, der uns schon auf mathematischem Gebiete begegnet ist. (Vgl. S. 128, 190.) In der That handelt es sich in den von Kant aufgestellten kosmologischen Antinomien nur um diesen Gegensatz. Zugleich ist aber dort die wahre Natur des Streites verhüllt theils durch den Parallelismus, in den die Antinomien mit der Untersuchung der andern transscendenten Ideen gebracht sind, theils durch den wichtigen Umstand, dass Kant selbst den Unterschied jener beiden Unendlichkeitsbegriffe noch nicht erkannt hat. Tritt man, gestützt auf die mathematische Unterscheidung derselben, an Kant's Antinomien heran, so fällt sofort in die Augen, dass der Thesis jedesmal die vollendete Unendlichkeit, das Transfinite, der Antithesis die unvollendbare Unendlichkeit, das Infinite, bei ihrer Argumentation vorschwebt. Nun ist das Transfinite auf empirischem Gebiete ein unvollziehbarer Begriff. Der Durchschnittspunkt zweier Parallellinien hat geometrisch auch dann noch einen Sinn, wenn wir den Parallelismus als einen vollkommenen und darum die Unendlichkeit der Entfernung als eine absolute auffassen. Unter parallelen Lichtstrahlen aber, die von einem physischen Punkt im Weltraume ausgehen, können wir immer nur solche verstehen, deren Divergenz für uns unmerklich ist; dem Fixstern, der sie aussendet, können wir daher höchstens eine relativ unendliche Entfernung zuschreiben. Irgend ein räumlich oder zeitlich noch so entfernter Ort oder Zustand des Universums gebietet unserem unter der Leitung der Anschauungsformen und des Causalprincips handelnden Denken, über denselben hinauszugehen, aber wollten wir uns diesen unendlichen Progressus wirklich vollendet vorstellen, so würde der Begriff wieder in ein rein mathematisches Postulat verwandelt sein, von welchem für physikalische Zwecke kein Gebrauch zu machen wäre. Denn unser naturwissenschaftliches Denken steht gleichzeitig unter der Herrschaft der Erkenntnissnormen und der Erfahrung. Verbieten uns die ersteren, den Zusammenhang der Erscheinungen bei irgend einem erreichbaren Punkte aufhören oder beginnen zu lassen, so verbietet es uns die letztere nicht minder, diesen unendlichen Zusammenhang anders denn als einen unvollendbaren zu denken. Die Thesis in Kant's Antinomien hat darum leichtes Spiel, wenn sie der vollendeten Unendlichkeit gegenüber an der Endlichkeit der Welt festhält. Anderseits sind wir aber ebenso bei unserer räumlichen und zeitlichen Ordnung der Erscheinungen sowie bei der causalen Verknüpfung derselben aufgefordert, die jeweils erreichten Grenzen zu überschreiten und in diesem Progressus ohne Ende fortzufahren. Der Antithesis wird es daher wiederum nicht schwer, wenn sie den infiniten dem endlichen Weltbegriff vorzieht. So ist der ganze Streit ein Schein-

gefecht, das aus der doppelten Natur des Unendlichen entsprungen ist. Darum ist nun aber auch die von Kant gegebene Lösung, welche beiden Gegnern in gleichem Masse Recht giebt, indem sie die Frage für unentscheidbar erklärt, nicht die richtige, sondern auf dem Boden von Kant's eigener Beweisführung hat die Antithese den Vorzug, deren Aufstellungen durch die Beweisführungen der These gar nicht getroffen werden, während diese der Macht der Gegenerörterungen nicht widerstehen kann. Durch diesen Ausgang ist aber für uns die Sache noch nicht entschieden. Denn in Kant's Erörterung sind nicht alle Momente berücksichtigt, welche die physikalische Betrachtung dem Problem der kosmologischen Unendlichkeit entgegenbringt. Insbesondere bedürfen zwei Punkte einer näheren Erwägung: erstens sind die drei Beziehungen, in denen die Unendlichkeit des Universums angenommen werden kann, zeitliche Dauer, räumliche Ausdehnung und Masse der Materie, von einander zu sondern, und zweitens muss in jeder dieser Beziehungen der Einfluss der Kraft- und Energiegesetze berücksichtigt werden.

In der Geschichte der Physik hat sich sowohl die Annahme der Endlichkeit wie die der Unendlichkeit der Welt selten auf jene Bestandtheile sämmtlich bezogen, sondern, wenn wir die Zeit als das massgebende Element betrachten, so lassen sich auf jeder Seite wieder je drei Hypothesen unterscheiden. Die Endlichkeitshypothese nimmt entweder nur die Zeit endlich, Raum und Masse aber unendlich, oder sie nimmt Zeit und Masse endlich, den Raum unendlich an, oder sie postulirt ein nach Zeit, Raum und Masse endliches Universum. Ebenso existirt die Unendlichkeitshypothese als eine einfache, in Bezug auf die Zeit, als eine zweifache, in Bezug auf Zeit und Raum, oder als eine dreifache, in Bezug auf Zeit, Raum und Masse*). Die erste dieser sechs Hypothesen liegt den von Kant in seiner »Theorie und Mechanik des Himmels« entwickelten Anschauungen zu Grunde, der zweiten scheint sich Laplace zuzuneigen, die dreifache Endlichkeit ist in den meisten neueren Speculationen über die Erhaltung der Energie im Universum vorausgesetzt. Dagegen könnte die dreifache Unendlichkeitshypothese die populärwissenschaftliche genannt werden; sie pflegt in denjenigen Kreisen zu herrschen, in welchen man den Vorurtheilen, welchen der Endlichkeitsbegriff entsprungen ist, entwachsen zu sein glaubt, aber von den Schwierigkeiten der kosmologischen Unendlichkeit keine Vorstellung hat. Die Hypothese der einfachen Unendlichkeit findet sich in gewissen mystischen Anschauungen vertreten, die aus der Uebertragung transscendenter Raumspeculationen auf physikalisches Gebiet hervorgegangen sind. Die Annahme, dass das Universum nach Zeit und Raum unendlich, in Bezug auf die Masse der

---

*) Historische Erläuterungen zu dem Folgenden finden sich in meinem Aufsatze: Ueber das kosmologische Problem. Vierteljahrsschr. f. wissensch. Philosophie, I, S. 80 f.

Materie aber endlich anzunehmen sei, hat in den kosmologischen Theorien kaum eine Berücksichtigung gefunden. Dennoch ist sie es, die mit den hinsichtlich der Kraft- und Energiegesetze gegenwärtig angenommenen Voraussetzungen am besten übereinstimmt. Dies zeigt sich deutlich, wenn wir die Folgerungen erwägen, die aus den zwei einander am meisten entgegengesetzten Voraussetzungen der dreifachen Endlichkeit und der dreifachen Unendlichkeit sich ergeben.

Die Annahme, dass die Materie nach Zeit und Raum und in Folge dessen auch hinsichtlich ihrer Masse begrenzt sei, stellt an unsere Anschauungsfunctionen wie an unser begriffliches Denken gleich unerfüllbare Anforderungen. Sie wäre nur vollziehbar, wenn Zeit und Raum ähnliche Erscheinungen wären wie die Empfindung einer Farbe oder eines Klangs. Aber da Zeit und Raum Functionen unseres Bewusstseins sind, ohne die wir uns keine Erfahrung denken können, so kann auch umgekehrt unser Denken in der Verknüpfung der Erfahrungen niemals von ihnen abstrahiren. Wollten wir also eine Grenze von Zeit und Raum voraussetzen, so würde darin zugleich die begriffliche Fiction einer zeit- und raumlosen Erfahrung oder die Forderung eines Denkens von unvorstellbarem Inhalt gegeben sein. Eine nothwendige Folge der Annahme einer Zeit- und Raumbegrenzung des Universums ist desshalb die Voraussetzung, dass auch das Causalprincip, die Form, in welcher unser Denken die Erfahrungen verknüpft, zwischen bestimmten unserem Denken erreichbaren Grenzen eingeschlossen sei. In den älteren kosmologischen Anschauungen findet diese Begrenzung ihren Ausdruck darin, dass man die Idee der Schöpfung und des Weltuntergangs aus dem Gebiet der religiösen Vorstellungen auf das der Wissenschaft zu übertragen sucht. Beide Ereignisse werden dann als Glieder einer höheren Causalreihe angesehen, zwischen denen die empirische Causalität eingeschlossen sei. Diese ganze Auffassung krankt, wie der damit zusammenhängende Leibniz'sche Begriff des »Uebervernünftigen«, an dem Widerspruch, dass man die Formen unseres Denkens anwendet, während man sie gleichzeitig für unanwendbar erklärt. In der neueren Zeit hat im Gegensatze hierzu die physikalische Theorie meist an der Ansicht festgehalten, dass der auf dem Boden der Endlichkeitshypothese vorauszusetzende Anfang der Welt nur als ein bestimmter Anfangszustand gedacht werden könne, über dessen Entstehung keine Rechenschaft zu geben sei. Gewöhnlich gilt der Nebelball der Kant-Laplace'schen Hypothese als dieser Anfangszustand. Da die in ihm vorhandene Anordnung der materiellen Elemente die causale Bedingung zu allen weiteren Veränderungen in sich enthält, so ist es ein logisch begreifliches Resultat, dass man bald dazu gelangte, diesem Anfangszustand einen in endlicher Zeit erreichbaren Endzustand gegenüberzustellen, in welchem jede mögliche Veränderung abgelaufen und eine Stabilität des Kosmos eingetreten sei. Schon Laplace hat ein solches Stabilitätsprincip aufgestellt, welches aber bei ihm bloss eine relative Bedeutung besass, da es sich auf die Anord-

nung und die Bewegungen der Körper des Sonnensystems beschränkte und dagegen den physikalischen Einzelvorgängen, also namentlich auch den Lebenserscheinungen, einen unbegrenzten Spielraum weiterer Entwicklung liess. Jene relative Stabilität meinte Laplace schon in dem gegenwärtigen Zustand des Sonnensystems erreicht zu sehen. Die aus den Energiegesetzen gezogenen Folgerungen haben diese Annahme nicht bestätigt, und sie haben die Herstellung der kosmischen Stabilität zwar in eine beträchtliche Zeitferne gerückt, dafür aber den Stillstand des Ganzen zu einem um so durchgreifenderen gemacht. Die hierher gehörigen Folgerungen gründen sich auf das Gesetz der Verwandlung der Energie, nach welchem die in der Natur vorkommenden Transformationen der Naturkräfte immer nur in einer Richtung unbeschränkt stattfinden, während sie in der entgegengesetzten bloss dann vor sich gehen können, wenn sie durch eine entgegengesetzte Verwandlung compensirt werden. So kann aus einem wärmeren in einen kälteren Körper Wärme von selbst übergehen, aus einem kälteren in einen wärmeren aber nur dann, wenn gleichzeitig eine anderweitige Uebertragung von Energie erfolgt, wenn also z. B. der kältere Körper durch eine äussere Kraft zusammengedrückt wird. Hieraus ergiebt sich, dass der Zustand der Welt fortwährend im Sinne derjenigen Umwandlungen sich verändern muss, welche keiner Compensation bedürfen, und dass so schliesslich eine Grenze erreicht wird, bei welcher überhaupt keine Umwandlung mehr stattfinden kann, weil ein allgemeiner Gleichgewichtszustand eingetreten ist. In diesem Endzustand, in welchem der Verwandlungsinhalt der Energie, die so genannte Entropie der Welt, ihr Maximum erreicht hat, wird vollständige Temperaturgleichheit herrschen, und es werden demnach alle Theilchen der Materie um stabile Gleichgewichtslagen schwingen*). Wäre unter solchen Bedingungen noch ein menschlicher Zuschauer möglich, so würde derselbe keinen Anlass finden, den Causalbegriff zu bilden, da sich keine Veränderung ereignete, welche die Frage nach ihrer Ursache erheben liesse. Diese physikalische Gestaltung der Endlichkeitshypothese führt daher ebenfalls zu einer empirischen Begrenzung des Causalbegriffs. Das logische Interesse der Deduction liegt aber augenscheinlich nicht darin, dass sie uns etwa eine Vorstellung von dem wirklich zu erwartenden Ende der Dinge erwecken könnte, sondern dass sie für ein begrenztes und während einer gewissen Zeit annähernd unabhängiges System, wie ein solches vielleicht unser Sonnensystem ist, in eben dieser Zeit die allgemeine Richtung der Energieverwandlungen angiebt, während zugleich die Ansicht, welche das Universum selbst für ein begrenztes System hält, an einer speciellen physikalischen Folgerung ad absurdum geführt wird.

Stellt man sich nun dem gegenüber auf den Standpunkt der Hypothese der dreifachen Unendlichkeit, so begegnet die letztere Schwie-

*) Clausius, Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie, II, S. 42.

rigkeiten anderer Art. Wie die vorige Annahme an den Energiegesetzen, so scheitert diese an den Kraftgesetzen. Zwar wird bei allen Naturkräften, deren Wirkung eine gewisse Zeit zu ihrer Fortpflanzung bedarf, wie Wärme und Licht, die Unendlichkeit der Masse im unendlichen Raum durch die Unendlichkeit der Zeit compensirt. So kann z. B. an einem Punkt die Menge der durch Strahlung fortgepflanzten Wärme schon desshalb nicht unendlich gross werden, weil es einer unendlich langen Zeit bedürfte, bis sich von den unendlich entfernten Massen des Weltalls die Wärme bis zu dem Punkt fortgepflanzt hätte, während überdies durch die Vorgänge der Emission und Absorption ein fortwährendes Streben nach Ausgleichung der Wärmeunterschiede stattfindet. Dagegen giebt es eine Naturkraft, für welche diese Compensation nicht zutrifft, weil sie nach der gegenwärtig gültigen Annahme keiner Zeit zu ihrer Fortpflanzung nöthig hat: die Gravitation. Merkwürdiger Weise hat nun hier die Physik dadurch eine Compensation zu erreichen gesucht, dass sie der momentanen Fortpflanzung durch den Raum die nämliche Wirkung zuschreibt, welche bei anderen Naturkräften im Gefolge der zeitlichen Fortpflanzung eintritt. (Vgl. S. 366.) Trotzdem bleibt die Schwierigkeit, dass ein unendliches System, so lange man kein bestimmtes Gesetz der Vertheilung der Massen voraussetzt, weder einen gemeinsamen Schwerpunkt, noch überhaupt einen Punkt hat, auf welchen die sämmtlichen relativen Bewegungen schliesslich zu beziehen wären*). Auch schliesst die Hypothese, dass die Gravitationswirkung keine Zeit zu ihrer Fortpflanzung bedarf und daher einen unendlichen Raum nicht nur in einer endlichen, sondern sogar in einer verschwindend kleinen Zeit durchlaufen soll, offenbar eine vollendete Unendlichkeit ein.

Die erste dieser Schwierigkeiten lässt sich durch eine Hülfsannahme beseitigen, nach welcher die Dichtigkeit der Materie von einem bestimmten Punkte an allmählich ins Unendliche abnimmt. Die einfachste Voraussetzung würde hier die Abnahme nach dem Verhältniss einer convergirenden unendlichen Reihe sein, so dass zwar die Ausdehnung der Materie unendlich, ihre Masse aber endlich bliebe. Denn nicht dieselben logischen Motive, die uns verhindern, eine endliche Grösse von Raum und Zeit zu statuiren, nöthigen uns, auch der Masse Unendlichkeit zuzuschreiben. Vielmehr wird der materielle Substanzbegriff von uns hypothetisch nach Anleitung der Erfahrung gebildet, wobei wir der Regel folgen, nichts in unsere Voraussetzung aufzunehmen, was nicht durch das Bedürfniss der causalen Erklärung der Erfahrung gefordert wird. Wie wir auf diese Weise dazu gelangen, bei der Anordnung der Materie im Kleinen leere Räume zwischen ihren Elementen anzunehmen, so könnten wir darum auch in Bezug auf

*) Ueber die Forderung eines solchen Punktes vgl. meine Schrift über die physikalischen Axiome, S. 110, und C. Neumann, Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Leipzig 1870, S. 15.

ihre Anordnung im Grossen ohne Widerspruch zu einer Hypothese geführt werden, welche die Endlichkeit der Masse in sich schliesst, indem sie entweder eine räumliche Begrenzung der materiellen Welt oder eine Vertheilung derselben im unendlichen Raume voraussetzt, bei welcher die Masse endlich bleibt. Die erste dieser Möglichkeiten würde mit der physikalischen Annahme, dass die materiellen Atome vermöge ihrer Bewegungsenergie überall bestrebt sind, den leeren Raum zu erfüllen, im Widerspruche stehen. Dagegen würde die zweite, wonach die Materie dergestalt um einen bestimmten Schwerpunkt vertheilt wäre, dass ihre Dichtigkeit von einer gewissen Grenze an immer mehr und zuletzt ins Unendliche abnimmt, mit allen gegenwärtig gültigen physikalischen Voraussetzungen im Einklange sein. Es würde aber damit der allgemeinen Forderung der kosmischen Mechanik nach einem festen Punkt, auf welchen alle Bewegungen bezogen werden, entsprochen. Zugleich könnte das Gesetz der Constanz der Energie die Bedeutung eines universellen Naturgesetzes bewahren; denn es ist klar, dass der Begriff einer solchen Constanz nur bei einem endlichen System von Massen einen bestimmten Sinn besitzt. Auf der andern Seite aber würde die aus dem Verwandlungsgesetz gezogene Folgerung in Bezug auf den Stillstand der kosmischen Veränderungen in endlicher Zeit hinwegfallen, da eine solche Folgerung nicht mehr statthaft ist, sobald die Materie über einen unendlichen Raum sich verbreitet. Sollte schliesslich dieser Hypothese entgegengehalten werden, auch die Annahme einer Abnahme der materiellen Masse nach dem Gesetz einer convergirenden Reihe schliesse eine vollendete Unendlichkeit ein, so würde dieser Vorwurf durch die Bemerkung zurückzuweisen sein, dass er auf einer Verwechslung des Endlichen mit dem Messbaren beruht. Eine Grösse kann endlich sein, ohne dass es möglich ist, sie in einer bestimmten Zahl anzugeben. Wir können aus dem Gesetz der Vertheilung der Materie schliessen, dass sie von endlicher Masse sei, ohne diese Masse wirklich messen zu wollen. In der That hat ja in der obigen Voraussetzung der Begriff der Masse von den zwei Unendlichkeiten, die man in ihm vereinigt denken kann, der unendlichen Grösse und der unendlichen Ausdehnung im Raume, nur die erstere verloren, während die zweite in der nämlichen infiniten Bedeutung erhalten geblieben ist, welche Raum und Zeit selbst in allen ihren physikalischen Anwendungen besitzen müssen.

So sehr nun aber auch die gegenwärtig gültigen physikalischen Vorstellungen einer solchen Gestaltung des kosmologischen Grenzbegriffs das Wort zu reden scheinen, so soll damit doch keineswegs behauptet werden, dass diese Hypothese auch die logisch vorzüglichste sei, oder dass sie muthmasslich physikalisch das Feld behaupten werde. Gerade der Umstand, dass die in dem Gravitationsbegriff vorausgesetzte vollendete Unendlichkeit auf diesen Ausweg führt, berechtigt zu schweren Bedenken. Ist das Transfinite überhaupt ein physikalisch unzulässiger Begriff, so kann er auch nicht auf jenem indirecten Wege der zeitlosen Fortpflanzung einer Bewegungsenergie

eingeführt werden. So ergiebt sich auch von dieser Seite die Wahrscheinlichkeit, dass die Gravitation auf Fernewirkungen zurückzuführen sein wird, die mit sehr grosser, aber nicht unendlicher Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Die empirischen Data für eine solche Annahme müssten astronomischen Beobachtungen entnommen werden. Obgleich bisher keine Anhaltspunkte hierzu gegeben sind, so liegt doch die Existenz einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation mindestens nicht ausserhalb des Bereichs der Möglichkeit. In dem Augenblick aber, wo eine solche nachgewiesen wäre, würden die vorhin erwähnten Schwierigkeiten beseitigt sein ohne die widerspruchsvolle Annahme eines Vorgangs, der in verschwindender Zeit einen unendlichen Raum durchdringt. Als eine weitere Folge der dreifachen kosmologischen Unendlichkeit würde dann noch die eintreten, dass von einer universellen Gültigkeit des Gesetzes der Constanz der Energie, insofern man unter einer solchen die Gültigkeit für das Ganze der Welt versteht, nicht mehr geredet werden könnte. Eine physikalische Grösse ist constant, wenn sie niemals zu- oder abnehmen kann. Einer unendlichen Zahl können aber beliebige endliche Grössen zugefügt oder abgezogen werden, ohne dass sie sich darum in ihrer Grösse verändert. Das physikalische Mass der Constanz ist also überhaupt nur auf endliche Grössen oder auf abgeschlossene Massensysteme anwendbar. Da nun die einzelnen kosmischen Massensysteme niemals absolut abgeschlossen sein können, so würde unter der Voraussetzung eines dreifach unendlichen Universums das Energiegesetz überhaupt nur noch eine relative, d. h. für gewisse nach Zeit und Raum abgegrenzte Theile der Welt annähernd zutreffende Gültigkeit bewahren. Es versteht sich von selbst, dass hierin nicht im mindesten ein Widerspruch gegen jene Voraussetzung liegt. Vielmehr zeigt sich gerade an den aus dem Verwandlungsgesetz gezogenen Folgerungen, dass die an ein endliches System geknüpfte absolute Gültigkeit der Energiegesetze einer Correctur bedarf, welche am wirksamsten durch den Uebergang zu dem Begriff der dreifachen Unendlichkeit herbeigeführt wird.

## Drittes Capitel.

# Die Logik der Chemie.

## 1. Die chemischen Methoden.

### a. Allgemeine Aufgaben der chemischen Untersuchung.

Indem sich die Chemie die Aufgabe stellt, alle diejenigen Erscheinungen zu untersuchen, welche mit den stofflichen Eigenschaften der Körper zusammenhängen, hat sie vor allem Rechenschaft zu geben von den Eigenschaften der einfachen Stoffe, der durch unsere Hülfsmittel nicht weiter zerlegbaren Elemente, die in der Natur vorkommen. Sie hat sodann die Bedingungen, unter denen diese Elemente zu Verbindungen zusammentreten, sowie die Beziehungen zu ermitteln, in welchen die Eigenschaften der zusammengesetzten Körper zu denjenigen ihrer Bestandtheile stehen. Damit Hand in Hand geht die Aufsuchung der Ursachen, durch welche die zusammengesetzten Stoffe in ihre Elemente zerlegt werden, sowie die Feststellung der physikalischen Erscheinungen, von denen die Verbindungen und Zersetzungen der Körper begleitet sind. Das Ziel, welches die Chemie mittelst der Ergebnisse aller dieser Einzeluntersuchungen zu erreichen hofft, ist somit im allgemeinen ein doppeltes: es besteht in der Kenntniss der Stoffe und ihrer Verbindungen, und in dem Studium der Verbindungs- und Zerlegungsprocesse und ihrer Begleiterscheinungen. Der erste Theil dieser Aufgabe findet seine Verwirklichung in einem System der chemischen Verbindungen, der zweite in einer Theorie der chemischen Stoffbewewegungen.

Die Existenz der chemischen Verbindungen legt unmittelbar die Annahme eigenthümlicher Anziehungen zwischen den Bestandtheilen derselben nahe. Diese Annahme findet in dem Begriff der chemischen Affinität ihren Ausdruck, einem Begriff, welchen die Chemie schon in ihren Anfängen gewonnen hat, und welcher eben desshalb an und für sich völlig unbestimmt ist, da er die Ermittelung der Ursachen chemischer Verbindungen durchaus der näheren Untersuchung vorbehält. Von den beiden Theilen des chemischen Lehrgebäudes, in welchem diese Untersuchung abschliesst, dem System der chemischen Verbindungen und der Theorie der chemischen Stoffbewegungen, ist es speciell der letztere, dem die Beantwortung der Frage nach dem Wesen der Affinität zufällt. Nun kann erst mit Hülfe dieser Theorie eine rationelle Classification der Verbindungen gewonnen werden, während doch auch die Erkenntniss der Stoffbewegungen eine gewisse Uebersicht der Verbindungen voraussetzt. Hierdurch entsteht eine ziemlich verwickelte Wechselwirkung beider Untersuchungsgebiete. Es lässt sich nicht verkennen, dass in dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft der Einfluss der systematischen Classification

auf die theoretischen Anschauungen noch unverhältnissmässig gross ist, wogegen die umgekehrte Rückwirkung voraussichtlich in der zukünftigen Entwicklung der Chemie zu erhöhter Bedeutung gelangen wird. Insofern die Kenntniss der quantitativen Verbindungsverhältnisse der Stoffe, die das System bietet, an und für sich schon gewisse Aufschlüsse über die aus der Affinität der Elemente hervorgehenden Gleichgewichtszustände gewährt, pflegt man wohl auch die aus solchen Betrachtungen hervorgehenden theoretischen Anschauungen einer chemischen Statik zuzurechnen und dieser die eigentliche Theorie der Stoffbewegungen als chemische Dynamik gegenüberzustellen. Da wir nun auf die Art der Stoffbewegungen hauptsächlich aus den begleitenden thermischen, optischen, elektrischen Erscheinungen sowie aus den Veränderungen, die bei den chemischen Umsetzungen in den physikalischen Constanten der Körper, in ihrer Dichtigkeit, Wärmecapacität, ihrem Brechungs- und elektrischen Leitungsvermögen u. s. w., eintreten, Rückschlüsse machen können, so sieht sich schon die chemische Statik, noch mehr aber die Dynamik genöthigt, physikalische Untersuchungen zu Hülfe zu nehmen.

Die Chemie ist diejenige Naturwissenschaft, in welcher die Methoden der Induction ihre schärfste Ausprägung gefunden haben. Aeussere und innere Ursachen treffen zusammen, um diesen Erfolg herbeizuführen. Wie die deductive Natur der Mathematik und theoretischen Physik wesentlich durch die klare Erkenntniss der mathematischen und mechanischen Principien bedingt ist, von denen die Erklärung ausgehen kann, so verdankt umgekehrt die Chemie ihre methodischen Eigenschaften zum Theil der Unsicherheit, in der man sich in ihr noch über die nothwendigen principiellen Voraussetzungen befindet. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Bedingungen in nicht ferner Zeit sich verändern werden. In der That hat sich bereits in der »physikalischen Chemie« ein Untersuchungsgebiet abgetrennt, welches, hauptsächlich auf den Voraussetzungen der mechanischen Wärmetheorie fussend, die Chemie auch in methodischer Beziehung der Physik zu nähern sucht. Ein inneres und darum bleibenderes Motiv für jenen methodischen Charakter der chemischen Forschung liegt aber in der Beschaffenheit ihrer Aufgaben. Während bei physikalischen Problemen alle Einzelaufgaben innig in einander eingreifen, so dass sich meist bei einer und derselben Untersuchung verschiedene logische Methoden in schwer zu trennender Weise combiniren, sondern sich auf chemischem Gebiete deutlicher die einzelnen Verfahrungsweisen. Denn die Stoffbestandtheile sind in gewissem Sinne stabiler als andere Naturerscheinungen. Sie gestatten es der Forschung, die Probleme, die sich ihr in Bezug auf die materielle Zusammensetzung der Körper darbieten, in regelmässig geordneter Folge von Stufe zu Stufe zu lösen, und selbst in solchen Fällen, wo die späteren Aufgaben noch nicht lösbar sind, bieten die zunächst zugänglichen ein hinreichendes Interesse dar, um sie selbständig in Angriff zu nehmen. So kommt es, dass schon die der Induction als vorbereitende Hülfsmittel

dienenden Methoden der Analyse und Synthese namentlich in Bezug auf ihre elementaren Formen innerhalb der chemischen Forschung klarer als in irgend einem andern Gebiete entwickelt sind.

### b. Die chemische Analyse.

Die erste Frage, mit der wir an die Untersuchung der stofflichen Eigenschaften eines Körpers herantreten, ist die nach seiner Zusammensetzung aus einfacheren Bestandtheilen. Die Analyse ist daher historisch die zuerst zur Ausbildung gelangte chemische Methode, und sie bleibt fortan diejenige, die bei einer concreten Untersuchung allen andern voranzugehen pflegt. In den alchemistischen Anfängen der Chemie wurde die Ausführung derselben noch getrübt durch die aus der Aristotelischen Elementenlehre überkommene Annahme einer Verwandlungsfähigkeit der einfachen Stoffe. Erst Robert Boyle stellte, indem er diese Annahme beseitigte, der chemischen Untersuchung das bestimmte Ziel, die unveränderlichen Elementarbestandtheile der Körper nachzuweisen. Er wurde dadurch der eigentliche Schöpfer der chemischen Analyse, die er zum ersten Mal mit diesem Namen in die Wissenschaft einführte*). Seine Analyse ist aber noch ausschliesslich eine qualitative: sie begnügt sich mit dem Nachweis der Bestandtheile einer Verbindung. Dennoch lag bereits in den corpuscularen Vorstellungen, welche sich dieser Chemiker von dem Wesen der Verbindungen machte, der Keim zu der Entwicklung messender Untersuchungen. Indem er sich nämlich die Körper aus kleinsten und unveränderlichen Theilchen bestehend dachte, von deren wechselseitigen Anziehungen alle Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen abhingen, wurde unmittelbar die Frage nahe gelegt, in welchen Mengeverhältnissen sich die Theilchen verschiedener Elemente in den zusammengesetzten Körpern verbinden. Noch aber fehlte dem Zeitalter Boyle's die bestimmte Idee der Verbindung der Elemente nach constanten Gewichtsverhältnissen. Erst die Chemiker des 18. Jahrhunderts, ein Bergmann und Wenzel, welche von dieser Idee bei ihren Untersuchungen ausgingen, wurden dadurch Urheber der quantitativen Analyse. Diese blieb jedoch in ihrem Fortschritt gehemmt, so lange die phlogistische Verbrennungstheorie durch die Annahme eines Stoffs von negativer Schwere, des Phlogiston, die Ausbildung folgerichtiger Vorstellungen über die chemischen Verbindungserscheinungen unmöglich machte. Indem Lavoisier's Verbrennungstheorie diese Unklarheit beseitigte, bestätigte sie zugleich nach vorübergehenden Kämpfen die Voraussetzung, dass die constanten Gewichtsverhältnisse der Elemente einer Verbindung einfachen und regelmässigen Zahlenverhältnissen entsprechen. Durch dieses Gesetz der multiplen Proportionen wurde nunmehr der quantitativen Analyse eine Reihe bestimmter Aufgaben gestellt und zugleich der Weg

*) Vgl. Kopp, Geschichte der Chemie, II, S. 58.

gezeigt, auf welchem mit ihrer Hülfe ein auf die dauernden Affinitätswirkungen der Elemente gegründetes System der chemischen Verbindungen zu erreichen war. So ist hier von Stufe zu Stufe die Ausbildung der analytischen Methoden von Ideen ausgegangen, die ursprünglich einen hypothetischen Charakter besassen, dann aber in Folge der empirischen Bestätigungen, die sie erfuhren, den Werth von Principien gewannen, die für alle einzelnen Verfahrungsweisen massgebend wurden. Das Gesetz der Unveränderlichkeit der Stoffelemente bildete die Grundlage einer rationellen qualitativen Analyse; aus dem Gesetz der Verbindung nach constanten Gewichtsverhältnissen gingen die ersten Anfänge der quantitativen Analyse hervor, und das Gesetz der multiplen Proportionen lieferte endlich die stöchiometrischen Grundsätze, welche für die Verwerthung der Resultate dieser Analyse massgebend wurden.

Als sich die chemische Untersuchung in den Anfängen ihrer Entwicklung befand, lag ihre grösste Schwierigkeit darin, dass die elementaren Bestandtheile der Körper und die charakteristischen Eigenschaften derselben erst aufgefunden werden mussten, während doch die methodische Zerlegung einer Verbindung in ihre Bestandtheile eigentlich schon eine Kenntniss der Elemente und ihrer Eigenschaften voraussetzt. Darum machen hier die frühesten analytischen Versuche in viel höherem Grade als im Gebiet der physikalischen Forschung den Eindruck eines unsichern Umhertastens. Der einzige einigermassen zuverlässige Weg war, dass man zunächst die Eigenschaften derjenigen Stoffe untersuchte, die sich den gewöhnlichen Trennungsmitteln gegenüber als unzerlegbar erwiesen hatten, und dass man nun nachforschte, welche unter den so gefundenen Elementen aus einer gegebenen Verbindung sich ausscheiden liessen oder an den Eigenschaften derselben wieder zu erkennen seien. Der Durchführung dieser Methode stand aber die mangelhafte Ausbildung der analytischen Operationen im Wege. Die früheste Chemie, von der Metalluntersuchung ausgehend, kannte fast nur die Schmelzung in der Hitze, meist unter Beihülfe zufällig als nützlich erfundener Zusätze zu den Metallerzen oder Legirungen, ein Verfahren, welches ausschliesslich der Ausscheidung des edleren Metalls aus Verbindungen oder Gemengen diente. Allmählich gesellte sich dazu die Anwendung der einfachsten physikalischen Hülfsmittel zum Behuf der Isolirung bestimmter Verbindungen von andern, mit denen sie mechanisch gemengt vorkommen; so die Sublimation und Destillation für die Trennung flüchtiger Stoffe, der Gebrauch der Lösungsmittel zum Zweck der Scheidung der unlöslichen von den löslichen Bestandtheilen. Zuletzt wurde die dritte und wichtigste Classe analytischer Operationen ausgebildet, darin bestehend, dass man die zu untersuchenden Stoffe an den Erscheinungen erkennt, die sie in Folge der chemischen Wechselwirkung mit andern Stoffen von bekannten Eigenschaften, den so genannten Reagentien, darbieten. Die chemische Einwirkung des Reagens kann hierbei wieder durch erhöhte Temperatur oder durch Lösung vermittelt werden. Diese

dritte Methode ist für die analytische Chemie die weitaus fruchtbarste geworden; ihr gegenüber hat namentlich die zweite mehr den Charakter eines vorbereitenden Hülfsmittels angenommen, welches dazu dient, die chemischen Verbindungen eines Gemenges in gewisse Gruppen zu trennen, die dann gesondert der näheren Analyse mittelst der Reagirmethode unterworfen werden. Die letztere aber gestattet es theils durch die Niederschläge, welche die aus der Einwirkung der Reagentien hervorgehenden Verbindungen bilden, theils durch die charakteristischen Färbungen, welche die Verbindungen annehmen, die verschiedenen Bestandtheile eines untersuchten Körpers zu erkennen. Ferner macht es die Combination mit der Lösungsmethode möglich, allmählich aus einer complicirten Stoffverbindung alle einzelnen Bestandtheile theils direct, theils mit Hülfe chemischer Bindung zu isoliren, indem man die zuerst erhaltenen Niederschläge mit Lösungsmitteln behandelt, in den gewonnenen Lösungen wieder Niederschläge hervorbringt, u. s. w. Durch dieses Verfahren der successiven Isolirung der Stoffe wird die Reagirmethode namentlich auch das wirksamste Hülfsmittel der quantitativen Analyse.

Dagegen liegt es in dem Wesen dieser Methode, dass sie in der Regel nicht zu einer vollständigen Zerlegung der Körper in ihre einfachen Bestandtheile zu führen vermag. Indem sie nämlich im allgemeinen die gegebenen Verbindungen in andere Verbindungen überführt, deren Eigenschaften eine leichtere Isolirung gestatten, wird es ihr nur in seltenen Ausnahmefällen möglich, die letzten Elemente der Körper direct darzustellen. In dieser Beziehung treten ihr daher zwei physikalische Hülfsmittel ergänzend zur Seite, deren rationeller Benützung vorzugsweise die neuere Chemie ihre Kenntniss der elementaren Stoffe verdankt. Das erste dieser Hülfsmittel besteht in der allgemeinen Anwendung der Zerlegung durch die Wärme, das zweite in der Zerlegung durch den elektrischen Strom. Obgleich, wie schon oben bemerkt, die Benützung erhöhter Temperatur, speciell zum Zweck der Reindarstellung der edeln Metalle, eines der frühesten analytischen Hülfsmittel bildete, so beginnt doch die bewusste, von der Einsicht in die physikalischen Wirkungen der Wärme geleitete Anwendung dieses Verfahrens erst mit Lavoisier, und es liegt darin zum Theil die epochemachende Bedeutung der wissenschaftlichen Richtung, die er einschlägt. Während die vorangegangene Chemie an der Hand der Reagirmethode, die sie fast ausschliesslich befolgte, nur sporadisch mit elementaren Stoffen bekannt geworden war und sichere Hülfsmittel der Unterscheidung zwischen den zusammengesetzten und einfachen Körpern überhaupt noch nicht besass, wird von Lavoisier und seinen Nachfolgern die Aufgabe der vollständigen Zerlegung der Körper in ihre Elemente mit Erfolg in Angriff genommen, an welche dann unmittelbar die Frage nach der Gruppirung der Elemente in den Verbindungen oder nach der Elementarconstitution der Körper sich anschliesst. Bei diesem Uebergang kommt der Einführung eines zweiten chemischen Scheidemittels von physikalischer Natur

der Elektricität, die grösste Bedeutung zu. Denn die Ausscheidung der verschiedenen Bestandtheile einer Verbindung an den beiden Polen des galvanischen Stromes erweckte zugleich bestimmte Vorstellungen über die Art der wechselseitigen Bindung der Elemente, wodurch, abgesehen von der Richtigkeit der so entstandenen Vorstellungen, jedenfalls das Problem der Elementarconstitution zu klarerem Bewusstsein gebracht wurde.

Hiernach können wir allgemein die Hülfsmittel der chemischen Analyse in solche von physikalischem und in solche von specifisch chemischem Charakter unterscheiden. Ein Theil der ersteren benützt ausschliesslich Bewegungsvorgänge, an denen die ungetrennten chemischen Molecüle betheiligt sind. Hierher gehören die seit alter Zeit geübten Verfahrungsweisen der Lösung, Filtration, Destillation und Sublimation, zu denen in neuerer Zeit noch, als ein die mechanische Scheidung gewisser Lösungsgemenge vermittelnder Vorgang, die Diffusion getreten ist. Alle diese Hülfsmittel, die sich auf die Aggregatverhältnisse der Körper stützen, besitzen im ganzen nur einen vorbereitenden Charakter: sie bezwecken nicht die Zerlegung der Verbindungen selbst, sondern deren Ausscheidung aus Gemengen zum Behuf der nachfolgenden eigentlichen Analyse. Anders verhält es sich mit denjenigen physikalischen Methoden, welche die inneren Bewegungsvorgänge der chemischen Molecüle benützen, wie die Wärme und den elektrischen Strom. Ihre Tendenz ist dahin gerichtet, durch diese Bewegungen eine chemische Verbindung in ihre Elemente zu trennen. Wie jene mechanischen Vorbereitungsmittel den Anfang, so bilden daher sie in der Regel das Ende der Analyse. In der Mitte zwischen beiden liegen dann die chemischen Methoden im engeren Sinne oder die Reagirmethoden, welche in planmässiger Weise von den Affinitätsverhältnissen der Körper Gebrauch machen, um theils die durch mechanische Mittel nicht trennbaren Stoffe eines Gemenges, theils die näheren Bestandtheile einer chemischen Verbindung qualitativ und quantitativ zu bestimmen. Dabei kann übrigens diese chemische Methode in der mannigfaltigsten Weise mit den vorangegangenen physikalischen verbunden werden. So pflegt die Anwendung der Wärme durch die Zerlegungen, die sie bewirkt, zugleich neue Affinitäten frei zu machen, wodurch sie von selbst zur Combination mit der Reactionsmethode führt, ein Verfahren, welches dann noch durch die absichtliche Hinzufügung von Reagensstoffen unterstützt werden kann. Ein augenfälliges Beispiel dieser Art bietet die gewöhnliche Methode der organischen Elementaranalyse, bei welcher durch die Hinzufügung einer leicht reducirbaren Substanz im Ueberschuss zu dem einer starken Temperaturerhöhung ausgesetzten organischen Stoff die vollständige Verbrennung des Wasserstoffs zu Wasser und des Kohlenstoffs zu Kohlensäure eintritt, worauf man dann beide in gasförmigem Zustand mit Stoffen in Berührung bringt, die zu den gebildeten Verbrennungsproducten eine starke Affinität äussern. Hierdurch werden beide Gase in fixe Verbindungen übergeführt, in denen sie leicht

durch Wägung bestimmt werden können. Aehnlich pflegt sich die Zersetzung durch den galvanischen Strom sofort mit Affinitätswirkungen zu combiniren. Bei der Einwirkung des Stroms auf wässerige Lösungen z. B. reducirt am negativen Pol der ausgeschiedene Wasserstoff und oxydirt am positiven der Sauerstoff, sobald reducirbare und oxydirbare Körper vorhanden sind.

Mit den angeführten Hülfsmitteln ausgerüstet kann nun die chemische Analyse zwei Ziele verfolgen. Das eine besteht in der Ermittelung der Bestandtheile eines gegebenen Körpers, das andere in der Bestimmung der Elementarconstitution einer chemischen Verbindung. Das erste Verfahren entspricht der allgemeinen Form der elementaren Analyse, das zweite ist ein specieller Fall causaler Analyse. (Abschn. I, S. 2 f.) Auch hier muss selbstverständlich die erste der zweiten vorausgehen; doch kann für manche praktische Zwecke und in solchen Fällen, wo die Constitution der aufgefundenen Verbindungen bereits als bekannt vorausgesetzt werden darf, mit der Lösung der elementaren Aufgabe die ganze Untersuchung abgeschlossen sein. Da es sich hierbei im allgemeinen nur um die Anwendung fest bestimmter Regeln, die aus den bekannten Reactionen der einzelnen Stoffe gewonnen sind, handelt, so trägt der gewöhnliche Gang der qualitativen und quantitativen Analyse bei dem heutigen in Bezug auf die allgemeine Unterscheidung und Nachweisung der Elemente vorläufig beinahe schon abgeschlossenen Zustande der Chemie mehr einen technischen als wissenschaftlichen Charakter an sich. Nur in solchen Fällen, wo neue Untersuchungsmethoden der Elementaranalyse zu Hülfe kommen, wird für dieselbe so lange ein höheres Mass erfinderischer Thätigkeit in Anspruch genommen, bis sich auch hier bestimmte Regeln der technischen Ausführung entwickelt haben. In einem derartigen Uebergangsstadium befinden sich z. B. gegenwärtig noch die spektralanalytischen Methoden, namentlich in ihrer Anwendung auf die den sonstigen analytischen Hülfsmitteln völlig unzugänglichen selbstleuchtenden Gestirne. Abgesehen von solchen Ausnahmefällen beginnt aber die eigentlich wissenschaftliche Aufgabe erst mit der an die Resultate der Elementaranalyse sich anschliessenden Untersuchung der elementaren Constitution einer Verbindung, also mit der Frage, in welcher Weise die Elemente in Folge der Affinitätswirkungen an einander gekettet sind. Die erschöpfende Beantwortung derselben gehört an und für sich nicht mehr in das Gebiet der blossen Analyse, sondern sie fällt erst der auf Grund analytischer und synthetischer Untersuchungen operirenden chemischen Induction anheim. Gleichwohl ist es jene Frage, die schon der Analyse ihre Richtung anweist, und die zur Anwendung bestimmter analytischer Methoden geführt hat, welche für die blosse Kenntniss der elementaren Bestandtheile der Körper nicht erforderlich sein würden.

Nur bei den einfachsten chemischen Verbindungen ist mit der Elementaranalyse, mit dem Nachweis der in der Verbindung enthaltenen

Elemente und ihres quantitativen Verhältnisses, alles erledigt, was die analytische Untersuchung überhaupt zu leisten vermag. Sobald aber mehr als zwei Elemente in eine Verbindung eintreten, tritt an die Analyse die Aufgabe heran, nicht bloss die letzten Elemente nachzuweisen, sondern zunächst darzuthun, ob und in welcher Weise die zusammengesetzte Verbindung in einfachere Verbindungen zerlegt werden kann. Es tritt so der Elementaranalyse die stufenweise Analyse gegenüber als diejenige analytische Methode, welche der chemischen Induction die für die Auffindung der Constitution der Verbindungen zunächst massgebenden Erfahrungen entgegenbringt. Diese Methode wird ein um so unentbehrlicheres Hülfsmittel, je verwickelter sich die Verbindungen gestalten. Darum ist es vorzugsweise das Gebiet der organischen Chemie, in welchem dieselbe zur Entwicklung gelangt ist. Die Hülfsmittel, deren sie sich bedient, sind im wesentlichen die nämlichen, die auch bei der Elementaranalyse zur Anwendung kommen. Nur bringt in diesem Fall der Zweck der Analyse gewisse Beschränkungen mit sich, da dieser Zweck eine allmähliche Zerlegung fordert, bei der die Zwischenstufen einfacherer Verbindungen möglichst vollständig durchlaufen werden. Unter den physikalischen Einwirkungen ist es vor allem die Wärme, die sich, weil sie selbst eine sehr vollkommene Abstufung zulässt, zur Einleitung stufenweiser Veränderungen besonders geeignet erweist, sei es, dass sie für sich allein angewandt wird oder, wie es gewöhnlich geschieht, in Verbindung mit gewissen chemischen Affinitätswirkungen, die man durch sie zu steigern sucht. Selbst in den Fällen übrigens, wo ohne die Zuhülfenahme einer äusseren Affinität die Wärme zur Verwendung kommt, pflegt es an solchen begleitenden Affinitätswirkungen nicht zu fehlen. Denn indem die Wärme durch die Zunahme der molecularen Bewegungen, die sie erzeugt, die complexen Verbindungen spaltet, ruft sie zugleich zwischen den so entstandenen Bestandtheilen neue Affinitätswirkungen hervor, aus denen einfachere Verbindungen entspringen. So zerfallen die sauerstoffreichen organischen Säuren unter dem Einfluss der Wärme einerseits in die noch sauerstoffreicheren binären Verbindungen der Kohlensäure und des Wassers und anderseits in einfachere organische Säuren von geringerem Sauerstoffgehalt; die sauerstoffarmen Fettsäuren spalten sich in Kohlensäure und in flüchtige, völlig sauerstofffreie Producte, die Kohlenwasserstoffe.

Aehnlich wie in diesen Fällen der in den ursprünglichen Verbindungen vorhandene Sauerstoff unter dem Einfluss der Wärme Affinitätswirkungen äussert, welche auf die Art der Zerlegung von wesentlichem Einflusse sind, so spielen auch unter den äusseren Reagentien, welche Zerlegungen einleiten, die Oxydationsmittel, wie die Salpetersäure, die Hyperoxyde, die Hydrate der Alkalien, die hervorragendste Rolle. Durch die Oxydation der zusammengesetzten Fettsäuren z. B. entstehen einerseits einfachere flüchtige Fettsäuren, anderseits gewisse fixe Säuren, wie Bernsteinsäure, Oxalsäure u. s. w., beide von höherem Sauerstoffgehalt. Das thierische und pflanz-

liche Eiweiss liefert theils eine Reihe flüchtiger Fettsäuren, theils Ammoniakderivate, und diese zunächst entstehenden Producte können durch weitere Einwirkung des Sauerstoffs schliesslich vollständig in die binären Verbindungen Kohlensäure, Wasser und Ammoniak übergeführt werden.

Der Versuch, andere Elemente von starker Affinität in ähnlicher Weise wie den Sauerstoff zur Zerlegung der zusammengesetzten Kohlenstoffverbindungen zu verwenden, bildet einen wichtigen Wendepunkt in der Entwicklung der organischen Chemie. Insbesondere ist das Chlor in diesem Sinne benützt worden; neben ihm die nächst verwandten Elemente Brom und Jod, ausserdem Schwefel, Phosphor, Arsen und die mit starken Affinitätswirkungen begabten Metalle. Die so bewirkten Veränderungen unterscheiden sich nun aber von den Sauerstoffzersetzungen organischer Substanzen wesentlich dadurch, dass, sofern nicht andere analytische Hülfsmittel, wie die Wärme und Oxydation, zu Hülfe gerufen werden, die Einwirkung des zersetzenden Elementes sich darauf beschränkt, dass es an der Stelle eines andern Elementes, welches frei wird, in der Regel des Wasserstoffs, in die Verbindung eintritt. Man bezeichnet aus diesem Grund derartige Zersetzungen als Substitutionen. Zugleich aber ist klar, dass dieselben ihrem allgemeinen Charakter nach den Uebergang zu den synthetischen Methoden bilden. In der That kann man die Ueberführung einer Verbindung in ein Substitutionsproduct gleicher Stufe als einen Vorgang betrachten, bei welchem sich eine einfache Zerlegung, z. B. die Ausscheidung von Wasserstoff durch die Affinität des Chlor, und eine einfache Synthese, der Eintritt von Chlor an die Stelle des ausgeschiedenen Wasserstoff, unmittelbar an einander anschliessen.

Eine ähnliche Mittelstellung nehmen diejenigen Zersetzungsprocesse ein, welche auf dem Wege der so genannten Gährung eingeleitet werden. Nur besteht, während bei der Substitution das zuletzt entstehende Product auf einer Synthese beruht, umgekehrt bei der Gährung das Endresultat in einer Zerlegung, und es treten hier die synthetischen Vorgänge nur als intermediäre Processe in den Gährungserregern auf, welche die langsame und stufenweise Zerlegung des Gährungsmaterials einleiten. Da übrigens jene Gährungserreger in den meisten Fällen, wie z. B. bei der Milch- und Alkoholgährung, bei der Fäulniss und Verwesung, Organismen sind, so pflegt sich die Chemie derselben einfach als analytischer Hülfsmittel zu bedienen, indem sie die nähere Untersuchung jener synthetischen Processe, auf denen ihre Wirkung beruht, der Physiologie anheimgiebt. Als analytisches Hülfsmittel kann der Vorgang der Gährung entweder für sich allein oder in Verbindung mit Sauerstoffeinwirkung zur Anwendung kommen, und hiernach sind auch die Effecte der blossen Spaltungsfermente und der Oxydationsfermente von abweichender Art; insbesondere führen die letzteren im allgemeinen rascher eine völlige Zerlegung der organischen Stoffe in ihre binären Endproducte herbei.

### c. Die chemische Synthese.

Nachdem die chemische Analyse die zusammengesetzten Körper zerlegt hat, entsteht die umgekehrte Aufgabe, die Verbindungen aus ihren Elementen zusammenzusetzen. Durch die Lösung derselben sollen einerseits die Entstehungsbedingungen der Verbindungen erkannt, anderseits die Resultate der stufenweisen Analyse geprüft werden, um auf diese Weise eine vollständigere Grundlage für die chemische Induction zu gewinnen.

Die äusseren Hülfsmittel der chemischen Synthese sind mit denjenigen der Analyse völlig übereinstimmend. Wärme, Elektricität und chemische Affinität sind auch hier die hauptsächlichsten Agentien. Dies hat seinen naheliegenden Grund darin, dass die synthetischen Operationen immer analytische voraussetzen, die ihnen unmittelbar vorangehen müssen. Die Elemente, die in eine neue Verbindung eintreten sollen, müssen aus andern Verbindungen getrennt werden. Die chemische Synthese stützt sich daher auf die Affinität, welche die Elemente im Status nascendi entwickeln, und ihre Hülfsmittel sind analytische: sie sind dazu bestimmt, durch die Zerlegung vorhandener Verbindungen einen Status nascendi herbeizuführen, durch den sich ohne weitere Beihülfe die beabsichtigte Synthese vollziehen muss. Das Verständniss der synthetischen Operationen, namentlich insoweit die elementaren Körper an ihnen betheiligt sind, ist desshalb wesentlich erst durch die Annahme einer wechselseitigen Bindung gleichartiger Atome in den einfachen Stoffen sowie durch die Anschauungen der neueren Wärmetheorie über den Bewegungszustand der Körperelemente ermöglicht worden, und die synthetischen Processe haben ihrerseits zur Befestigung dieser theoretischen Vorstellungen beigetragen. Eine Mischung aus 2 Volumtheilen Wasserstoff und 1 Volum Sauerstoffgas kann bekanntlich bei mässiger Temperatur eine beliebig lange Zeit aufbewahrt werden, ohne dass die Affinität der beiden Gase zu einander rege wird, während ein wiederholtes Durchschlagen des elektrischen Funkens genügt, um in kurzer Zeit das Gasgemenge in Wasser zu verwandeln. Diese und zahlreiche andere ähnliche Erscheinungen werden vollkommen verständlich, wenn man voraussetzt, dass in dem Wasserstoff und Sauerstoff die gleichartigen Atome an einander gebunden sind, aus dieser Verbindung aber durch die Erschütterung, welche der elektrische Funke bewirkt, getrennt werden, so dass nun erst die Affinität der ungleichartigen Atome zur Wirkung gelangen kann. Auf das nämliche Princip lässt sich die Wirkung der Wärme zurückführen, die ein noch allgemeiner gebrauchtes Hülfsmittel zur Hervorbringung des für die chemische Synthese erforderlichen Entstehungszustandes ist.

Die Einwirkung der genannten physikalischen Agentien genügt in der Regel, um die einfachen binären Verbindungen, wie z. B. die des Chlor, Jod, Sauerstoff, Schwefel u. s. w. mit dem Wasserstoff, die der meisten nichtmetallischen und metallischen Elemente mit dem Sauerstoff, die ein-

fachsten Kohlenwasserstoffe, auf synthetischem Wege zu erzeugen. Dagegen verlangen die zusammengesetzteren Verbindungen, namentlich des Kohlenstoffs, durchweg ausserdem noch die Zuhülfenahme bestimmter Affinitätswirkungen, und es muss die Synthese eine stufenweise sein, wenn sie in fundamentaler Weise, d. h. von den Elementen ausgehend, durchgeführt werden soll. Diese stufenweise Synthese correspondirt dann aber dem umgekehrten Verfahren der stufenweisen Analyse auch darin, dass sie neben derselben das hauptsächlichste Mittel ist, um einen Einblick in die Constitution der Verbindungen zu erlangen. Eine besondere Wichtigkeit besitzt wegen der complicirten Beschaffenheit derselben die stufenweise Synthese der organischen Stoffe. In ihr spielt der Wasserstoff, als solcher oder in Verbindungen, eine ähnlich bedeutsame Rolle wie der Sauerstoff bei der stufenweisen Zersetzung. Der Wasserstoff kann aber hierbei theils direct an den Kohlenstoff gebunden, theils durch seine Affinität zum Sauerstoff wirksam werden, indem er sauerstoffreicheren organischen Stoffen Sauerstoff entzieht und dadurch sauerstoffärmere Verbindungen zurücklässt. Auf diese Weise verbindet sich dann die Synthese ähnlich mit dem Verfahren der Reduction, wie die Analyse der organischen Substanzen die Oxydation zu Hülfe nahm. Directe Wasserstoffbindungen kommen vor allem bei der Synthese der Elemente zu binären Verbindungen vor. So vereinigt sich der einfachste Kohlenwasserstoff, das Acetylen ($C_2H_2$), der unter dem Einfluss des elektrischen Funkens direct aus den Elementen entsteht, in der Wärme mit weiteren Mengen Wasserstoffs, indem aus ihm complexere Kohlenwasserstoffe von höherem Wasserstoffgehalt hervorgehen. Aehnliche Umwandlungen vollziehen sich durch den Einfluss einfacher wasserstoffhaltiger Verbindungen, wie der Jodwasserstoffsäure, in der Wärme. Wie in dem letzteren Fall die Affinität des Wasserstoffs im Status nascendi benützt wird, so geschieht dies auch bei denjenigen Synthesen, die sich als Reductionsvorgänge darstellen: so bei der Synthese der Ameisensäure ($CH_2O_2$) aus Kohlensäure und Wasser durch Einwirkung des metallischen Kalium, der Oxalsäure ($C_2H_2O_4$) aus Kohlensäure und Natrium oder aus Cyan und Wasser, u. dergl. In den meisten dieser Fälle wird die starke Affinität der Alkalimetalle zum Sauerstoff als Reductionsmittel verwerthet.

Da nun aber die einfachen Einwirkungen des elektrischen Schlags und der Wärme genügen, um die binären Verbindungen des Kohlenstoffs und Wasserstoffs direct aus den Elementen zusammenzusetzen, so spielt bei der aufsteigenden Synthese der organischen Verbindungen auch die Oxydation eine sehr wichtige Rolle; neben ihr kommt die Bindung anderer Elemente, wie des Chlors, der Alkalimetalle, sowie die directe Aufnahme des Wassers zu mannigfacher Verwerthung. So werden aus den Kohlenwasserstoffen auf synthetischem Weg Alkohole erzeugt, indem man zunächst durch Einwirkung von Chlor einen Chlorwasserstoffäther bildet und dann diesen durch Einwirkung von Kali oxydirt, wobei er in einen Alkohol

und in Chlorkalium zerfällt. Aus dem Alkohol lässt sich dann durch directe Oxydation die zugehörige Säure gewinnen, u. s. w.

Indem sie auf diese Weise in der mannigfaltigsten Art die Affinitätswirkungen der Elemente benützt, stützt sich die chemische Synthese auf die bei der analytischen Untersuchung gewonnenen Ergebnisse über die Affinitätsverhältnisse der Stoffe. Die synthetischen Versuche selbst werden sodann durch Vermuthungen über die Gruppirung der Elemente in den herzustellenden Verbindungen geleitet. Da durch die Ausführung der Operationen solche Vermuthungen bald bestätigt, bald widerlegt werden, so vervollständigen sich auf diesem Wege die mittelst der Analyse gewonnenen Anschauungen über die Constitution der Verbindungen, und es werden die für die chemische Induction und Deduction erforderlichen Voraussetzungen gewonnen.

### d. Die chemische Induction.

Die chemische Elementaranalyse begnügt sich mit der Nachweisung der unzerlegbaren Bestandtheile einer Verbindung und ihres quantitativen Verhältnisses. Die stufenweise Analyse ermittelt die einfacheren Zwischenproducte, die bei der allmählichen Zerlegung einer complexen Verbindung entstehen. Die Synthese bestätigt und vervollständigt sodann die hierbei erhaltenen Resultate, indem sie die Verbindungen theils aus ihren Elementen, theils aus einfacheren Verbindungen zusammensetzt. Da nun aber die bei der stufenweisen Zerlegung entstehenden Zwischenproducte in der Regel keineswegs in der Form, in welcher sie gewonnen werden, in der ursprünglichen Verbindung enthalten sind, und da ebenso bei der stufenweisen Synthese neue Stoffgruppirungen sich bilden können, so geben diese Untersuchungen niemals unmittelbaren Aufschluss über die Constitution einer Verbindung. Vielmehr müssen zu diesem Zweck zahlreiche unter verschiedenen Bedingungen vorgenommene analytische und synthetische Untersuchungen combinirt und mit den Untersuchungsresultaten an andern verwandten Verbindungen verglichen werden. Diese Combination der Resultate, bei der überdies die physikalischen Begleiterscheinungen der Zersetzungen und Verbindungen zu berücksichtigen sind, ist die Aufgabe der chemischen Induction.

Wie die physikalische Induction, so bedarf auch die chemische irgend welcher hypothetischer Voraussetzungen, welche ihr zur Führung bei der Verknüpfung der Untersuchungsresultate dienen müssen. Diese Voraussetzungen werden irgend einer an sich noch unzureichenden Gruppe von Erfahrungen entnommen. Der weitere Fortschritt der Induction vollzieht sich dann vermittelst der Bestätigung, Widerlegung oder Berichtigung solcher Hypothesen, ein Entwicklungsgang, welcher zu einer immer vollständigeren Uebereinstimmung der gewonnenen theoretischen Anschauungen mit den verschiedenartigen Erfahrungen führt. In der Chemie hat jedoch, wie in allen von der Physik abhängigen Zweigen der Naturlehre, diese Ent-

wicklung dadurch einen eigenthümlichen Charakter angenommen, dass vorwiegend durch die jeweils dominirenden physikalischen Anschauungen zunächst den provisorischen Hypothesen, dann aber auch den definitiven theoretischen Ansichten ihre Richtung gegeben wurde. In dieser Beziehung lassen sich vier Perioden in der Entwicklung der neueren Chemie unterscheiden, in deren jeder eine eigenthümliche Form der Induction herrschend ist, wobei aber diese nur in einer jener vier Perioden ausschliesslich von specifisch chemischen Thatsachen, in den drei übrigen vorwiegend von physikalischen Anschauungen bestimmt wird.

In der ersten Periode der chemischen Induction ist es die Gravitationstheorie, welche die massgebende Bedeutung besitzt. Schon der Umstand, dass sich die Chemie seit dem Beginn ihres quantitativen Zeitalters der Wage als des einzig geeigneten Hülfsmittels zur Nachweisung der Mengenverhältnisse der Stoffe bediente, konnte auf die Schwerkraft als die nächste Ursache der chemischen Affinität hinweisen, um so mehr, da auch die letztere als eine anziehende Kraft erschien. Das vorige Jahrhundert war aber unter der Nachwirkung der Newton'schen Gravitationstheorie geneigt, alle Anziehungserscheinungen auf die allgemeine Schwere zurückzuführen. In zwei Formen hat die Idee der Gravitation auf den Begriff der Affinität Anwendung gefunden. Bei der ersten suchte man den Erfahrungen über die constanten Gewichtsverhältnisse der in den Verbindungen enthaltenen Elemente unmittelbar mittelst bestimmter Voraussetzungen über die anziehenden Eigenschaften der kleinsten Theilchen der Körper Rechnung zu tragen; bei der zweiten suchte man die Abhängigkeit der Schweranziehung von der Masse direct auch auf die chemische Anziehung anzuwenden und die mit dieser Voraussetzung im Widerspruch stehende Constanz der Zusammensetzung gewisser Verbindungen aus physikalischen Nebenbedingungen zu erklären. Die erste Richtung ist durch Bergmann vertreten, der damit der Hauptbegründer des Begriffs der chemischen Affinität wird. Diese erscheint bei ihm als derjenige Specialfall der Schwerkraft, wo die letztere zwischen den kleinsten Theilchen der Körper wirksam wird, so dass sie unmittelbar von der Form und Stellung derselben abhängig ist. Hierdurch soll es geschehen, dass gewisse Atome sich leichter anziehen als andere, und dass sie sich regelmässig in bestimmten Zahlverhältnissen an einander lagern. So wird hier die allgemeine Anziehung zu einer »attractio electiva«, bei der alles von der ursprünglichen Natur der Elemente abhängt. Der Vertreter der zweiten Richtung ist Berthollet. Ihm gilt die Abhängigkeit der Anziehung von der Masse als ein festes Naturgesetz, das auch bei den chemischen Anziehungen keine wirklichen, sondern höchstens durch die Combination mit andern Naturgesetzen scheinbare Ausnahmen erleiden kann. Als solche Nebenbedingungen, welche die Wirksamkeit der Massen in den kleinsten Entfernungen beschränken, betrachtet er die Unlöslichkeit mancher Verbindungen, die Krystallisirbarkeit anderer, den gasförmigen Zustand gewisser Stoffe. Aber mit so richtigem

Blick er hierbei die von der starren Affinitätstheorie vernachlässigte Bedeutung der physikalischen Bedingungen der Verwandtschaftsäusserung vorausahnen mag, so bleibt er doch seinerseits allzu sehr in der Gravitationsidee befangen, um der specifischen Eigenthümlichkeit der chemischen Erscheinungen gerecht werden zu können. Das Gesetz der constanten Gewichtsverhältnisse der Elemente in den Verbindungen bleibt bei ihm eine Ausnahme, während es sich mehr und mehr durch die Fortschritte der quantitativen Analyse als die ausnahmslose Regel bestätigt, welche demnach auch den Hypothesen über das Wesen der chemischen Verbindungen ihre Richtung anweist. So erringt die Bergmann'sche Affinitätslehre den Sieg, und sie führt zugleich, indem das Gesetz der constanten Gewichtsverhältnisse durch Dalton zum Gesetz der multiplen Proportionen, d. h. der constanten und einfachen Gewichtsverhältnisse, eingeschränkt wird, mit innerer Nothwendigkeit zur atomistischen Hypothese. Die Anziehungen zwischen den Atomen werden nun zwar vielfach noch als Anziehungen kleinster Massen gedacht. Nachdem aber der specifische Inhalt des Gravitationsgesetzes verschwunden ist, steht der Unterordnung unter eine andere Naturkraft, die den Affinitätswirkungen homogener erscheint, nichts mehr im Wege.

Eine solche Naturkraft bietet sich in der galvanischen Elektricität dar. Die zweite Periode der chemischen Induction, zu welcher die auf das Gesetz der multiplen Proportionen gegründete atomistische Vorstellung den Uebergang bildet, gehört daher der elektrochemischen Hypothese an. Zwischen den Erscheinungen der Volta'schen Säule und der chemischen Wahlverwandtschaft besteht an sich schon eine gewisse Analogie. Wie die entgegengesetzten elektrischen Spannungen der Pole sich ausgleichen in dem elektrischen Strom, so neutralisiren sich Stoffe von entgegengesetzten Eigenschaften, wie Säure und Basis, indem sie sich durch chemische Wahlverwandtschaft verbinden. Die im Jahre 1800 von Nicholson und Carlisle entdeckte Wasserzersetzung durch die galvanische Kette, welcher bald die Nachweisung der zerlegenden Wirkung des Stromes auf andere Verbindungen nachfolgte, musste daher sofort die Idee einer näheren Beziehung der elektrischen Kraft zu der chemischen Affinität nahe legen. Auch diese Idee fand in zwei verschiedenen successiv entstandenen hypothetischen Anschauungen ihren Ausdruck. Dass die Affinität auf den entgegengesetzten elektrischen Eigenschaften der chemischen Elemente beruhe, war die Ueberzeugung, von der beide ausgingen. Der Gegensatz der Elemente selbst konnte nun aber wieder entweder als eine blosse Folge ihrer Berührung betrachtet oder auf ursprüngliche Eigenschaften derselben bezogen werden. In der ersten unmittelbar an die physikalische Contacthypothese Volta's anknüpfenden Weise dachte sich Humphry Davy den elektrochemischen Vorgang, in der zweiten, welche die elektrischen Gegensätze in directe Beziehung zur chemischen Affinität bringt, fasste Berzelius die Erscheinungen auf. Während dort die elektrischen Vorgänge

immer noch als Begleiterscheinungen der chemischen Wechselwirkungen betrachtet werden können, werden hier beide mit einander identificirt: die chemische Affinität selbst ist der elektrische Gegensatz der Atome. Diese letzteren aber dachte sich Berzelius, nach Analogie der einfachen Kette oder des Magnetes, jedes mit einem positiven und einem negativen Pole versehen; nur sollte für die verschiedenen Elemente die absolute Elektricitätsmenge und bei jedem einzelnen Elemente die relative der beiden Pole eine verschiedene sein, beim Sauerstoff also z. B. die negative, beim Wasserstoff die positive überwiegen. Die absolute Elektricitätsmenge der Atome wurde dann als massgebend für die Grösse, das relative Uebergewicht der einen oder andern als massgebend für die Richtung der Affinität betrachtet. Die aus dieser Hypothese hervorgegangenen Vorstellungen haben während einer längeren Zeit die chemische Induction geleitet. Auch in solchen Fällen, wo nicht etwa die wirkliche Zerlegung durch den galvanischen Strom diese Betrachtungsweise unmittelbar rechtfertigte, gewöhnte man sich, die Resultate der chemischen Analyse nach dem dualistischen Schema zu interpretiren, welches sich aus der elektrischen Spannungsreihe der Elemente ergab. Das Gebiet der unorganischen Chemie fügte sich leicht diesem Schema. Die meisten zusammengesetzten Körper liessen sich hier unmittelbar entweder als binäre Verbindungen aus einem elektropositiven und einem elektronegativen Bestandtheile betrachten, wie die Säuren, Basen und Haloidsalze, oder als quaternäre Verbindungen, die wieder aus zwei binären bestünden, wie die Salze der Sauerstoffsäuren. Zugleich hat hier diese einfache und gleichförmige Betrachtungsweise der chemischen Forschung zweifellos die grössten Dienste geleistet, wenn auch einzelne Erscheinungen sich nur gezwungen der Voraussetzung fügten. So erregte es frühe schon Bedenken, dass den Haloid- und den Sauerstoffsalzen trotz ihres ähnlichen Verhaltens eine ganz verschiedene Constitution zugeschrieben wurde, und dass gewisse Säuren, wie die Phosphor- und Arsensäure, mit verschiedenen Mengen einer Basis neutrale Salze bilden können*). Grössere Schwierigkeiten ergaben sich jedoch erst innerhalb der organischen Chemie in Folge der verwickelteren Beschaffenheit ihrer Verbindungen. Hier wurde man mehr und mehr gezwungen, sich von den thatsächlichen Grundlagen der elektrochemischen Hypothese zu entfernen, indem nicht mehr die wirkliche Zersetzbarkeit durch den elektrischen Strom, sondern die äussere Analogie der Verbindungsformeln mit denjenigen der unorganischen Chemie fast ausschliesslich massgebend wurde. Um diese Analogie herzustellen, sah man sich genöthigt, zu einer Hülfshypothese zu greifen, die übrigens abgesehen von dem Gesichtspunkte, der zunächst auf sie führte, der chemischen Forschung wichtige Dienste geleistet hat. Es ist dies die Hypothese der Radicale oder der Existenz gewisser Verbindungen, die in zusammengesetzteren die Rolle von Elementen übernehmen. Mit Hülfe

*) Liebig, Ann. d. Chem. u. Pharm., Bd. 25, 1838, S. 138 f.

dieser Voraussetzung wurde es leicht möglich, die binären Formeln der unorganischen Chemie auf die organischen Verbindungen zu übertragen. Man betrachtete also z. B. den gewöhnlichen Aether als ein Oxyd des hypothetischen Radicals Aethyl, den Alkohol als das Hydrat dieses Oxyds und dachte sich die verschiedenen Aetherverbindungen analog den Salzen der Metalloxyde zusammengesetzt; um die in die nämliche Reihe gehörende Essigsäure abzuleiten, war man dann freilich genöthigt, zu einem neuen wasserstoffärmeren Radical seine Zuflucht zu nehmen, als dessen Sauerstoffverbindung nun diese Säure erschien. Abgesehen von der hypothetischen Natur der angenommenen Radicale war hier die Analogie mit den unorganischen Basen, Hydraten und Salzen vielfach nur noch in den Formeln, nicht in dem chemischen Verhalten der Stoffe vorhanden, und noch weniger konnte an eine Durchführung des elektrochemischen Grundgedankens der dualistischen Hypothese in solchen Fällen gedacht werden. Diese letztere Thatsache kam in besonders augenfälliger Weise zum Vorschein, als man auf die umfangreiche Substituirbarkeit gewisser Elemente organischer Verbindungen durch andere aufmerksam wurde, Umwandlungen, bei denen die Verbindungen ihren chemischen Charakter beibehielten, obgleich dabei sehr häufig der elektropositive Wasserstoff durch elektronegative Elemente, wie das Chlor, ersetzt wurde.

So ging denn auch von der Untersuchung der Substitutionserscheinungen der Sturz der elektrochemischen Hypothese aus, und es eröffnete sich damit die dritte Periode der chemischen Induction, deren charakteristische Eigenthümlichkeit in ihrer specifisch chemischen Richtung besteht, insofern man nun die chemische Affinität nicht mehr als die Aeusserung irgend einer allgemeineren Naturkraft, wie der Gravitation oder der elektrischen Anziehung, sondern als eine den chemischen Atomen specifisch zukommende Kraft anzusehen begann. Gerade durch die Substitutionserscheinungen wurde man aber zugleich zu der Anschauung gedrängt, dass die Eigenschaften einer Verbindung nicht sowohl von den Eigenschaften der in ihr enthaltenen Elemente als von der Gruppirung dieser Elemente abhingen. Das Hauptinteresse concentrirte sich daher nun auf das Studium der Structur der Verbindungen. Es entstand so jene hauptsächlich von Dumas, Gerhardt und Laurent eingeschlagene Richtung, welche man passend als die der Structurchemie bezeichnet hat. Zur Erkenntniss der Structur einer Verbindung dient deren stufenweise Analyse und ganz besonders das Verfahren der Substitution. Jedes Element, das einem andern, und jede Atomgruppe, die einer andern substituirt werden kann, muss eben darum als denselben äquivalent in ihrer Affinitätswirkung angesehen werden. Die Hauptaufgabe der chemischen Forschung ist es demgemäss, alle chemischen Verbindungen auf gewisse Haupttypen zurückzuführen, aus denen sie entweder wirklich durch successive Substitution entstehen können, oder aus denen man sie wenigstens auf diesem Wege entstanden denken kann. Als solche Typen wurden zunächst Chlorwasser-

stoffsäure (HCl), Wasser ($H_2O$) und Ammoniak ($H_3N$) aufgestellt, denen dann später noch das Sumpfgas ($H_4C$) sich anreihte. Es lässt sich nicht verkennen, dass diese Auffassung, so unbefriedigend sie auch hinsichtlich der Frage nach dem Wesen der chemischen Affinität ist, doch für die Entwicklung der chemischen Induction von grosser Bedeutung, und dass sie selbst in dieser Entwicklung nothwendig begründet war. Das ungeheure Material der organischen Chemie bedurfte dringend einer systematischen Ordnung, welche es zugleich möglich machte, die etwa noch bestehenden Lücken des Systems zu erkennen und durch die Darstellung neuer Verbindungen auszufüllen. Diese Aufgabe hat die Structurchemie in vollkommenster Weise erfüllt. Sie hat namentlich mit Hülfe der Substitutionsmethode das chemische System fast mit einer Ueberfülle neuer Verbindungen bereichert, und sie hat zum ersten Mal eine Uebersicht über die Gesammtheit der organischen Verbindungen gegeben, in der die Methoden der stufenweisen Analyse und Synthese zur Herstellung natürlicher Gruppen möglichst verwerthet wurden. Aber der grosse Mangel dieser Richtung war, dass unter ihren Händen die Chemie völlig den Charakter einer erklärenden Naturwissenschaft verlor. Sie war eine descriptive und classificatorische Wissenschaft geworden, in der selbst das Experiment nur zu systematischen Zwecken, zur Herstellung von Verbindungen, welche das System voraussehen liess, nicht aber zur Auffindung der Ursachen der Erscheinungen diente. Darum ist auch der in der Chemie meistens gebrauchte Ausdruck Typentheorie für die hier zu Grunde liegende Auffassung kaum ein geeigneter. Jede Theorie verlangt eine Hypothese, welche über den Grund der untersuchten Erscheinungen Rechenschaft giebt. Eine derartige Hypothese ist aber in der Annahme der Typen ebenso wenig enthalten wie etwa in den Classificationsprincipien des Linné'schen oder Decandolle'schen Pflanzensystems.

Dennoch weist schon die so genannte Typentheorie auf eine Affinitätshypothese hin, die denn auch in folgerichtiger Entwicklung aus ihr hervorgegangen ist. Trotz mancher Willkürlichkeiten leitete nämlich das von ihr aufgestellte System nicht bloss die chemische Induction, sondern es wurde auch umgekehrt von ihr geleitet, da man die Resultate der stufenweisen Zerlegung und Substitution bei den aufgestellten Structurformeln verwerthete. Darum war das System zwar in den Hauptgliederungen ein künstliches, in Bezug auf die Zusammenfassung der einzelnen Gruppen der Verbindungen aber im wesentlichen ein natürliches. Nothwendig mussten daher an den typischen Formeln die wirklichen Affinitätsverhältnisse der in sie eingehenden Atome und Atomgruppen irgendwie zum Vorschein kommen, und es bedurfte so im Grunde nur einer geeigneten Interpretation jener Formeln, um zu einer rein chemischen Affinitätshypothese zu gelangen. In der That ist auf diesem Wege aus den Anschauungen der Structurchemie die so genannte Valenzhypothese hervorgegangen, in welcher der von der ersteren angebahnte rein chemische Standpunkt

seinen theoretischen Ausdruck fand. Die Valenzhypothese stützte sich auf die im allgemeinen schon aus den Structurformeln ersichtliche Thatsache, dass die verschiedene Affinitätsgrösse der einzelnen Elemente an den verschiedenen Atommengen anderer Elemente, welche sie zu binden vermögen, gemessen werden kann. So lehrt schon der Anblick der Formeln für die vier Haupttypen Chlorwasserstoff, Wasser, Ammoniak, Sumpfgas, dass, wenn man die Affinität des in allen diesen Verbindungen enthaltenen Wasserstoffs als Einheit annimmt, das Chlor eine, der Sauerstoff zwei, der Stickstoff drei und der Kohlenstoff vier Affinitätseinheiten besitzt. Demnach werden diese vier Elemente von der Valenzhypothese als 1-, 2-, 3- und 4-werthig bezeichnet. Die meisten andern einfachen Stoffe zeigen entsprechende Affinitätsverhältnisse; nur einige der seltenen Elemente ist man genöthigt als 5- und 6- oder selbst 8-werthige aufzufassen.

Die nähere Betrachtung dieser Hypothese zeigt ohne weiteres, dass dieselbe nur in unzureichender und einseitiger Weise von den Eigenschaften der chemischen Verbindungen Rechenschaft giebt. Sie berücksichtigt nur die quantitativen Verbindungsverhältnisse der Elemente in der Mehrzahl der chemischen Verbindungen, lässt aber die Abhängigkeit der sonstigen Eigenschaften der letzteren von den Eigenschaften der in sie eingehenden Grundbestandtheile, den grösseren oder geringeren Grad der Zersetzbarkeit der Körper sowie ihr physikalisches Verhalten ganz ausser Betracht. Dazu kommt, dass sich eine immerhin nicht kleine Anzahl von Verbindungen, wie das Kohlenoxyd, viele Kohlenwasserstoffe, dem Massstab der constanten Werthigkeit nicht fügt, eine Thatsache, welche darauf hinweist, dass der Affinitätswerth keine constante, sondern eine mit äusseren Bedingungen, wie Temperatur, Einfluss anderer Stoffe, einigermassen variable Grösse ist. Nur scheint diese Grösse nicht stetig, sondern, gemäss dem Gesetz der multiplen Proportionen, nach bestimmten einfachen ganzen Zahlenverhältnissen veränderlich zu sein, und ausserdem scheint es für jedes Element einen bestimmten Maximalwerth der Affinitätsgrösse zu geben, der nicht überschritten werden kann.

Diese Erwägungen leiten unmittelbar zu denjenigen Gesichtspunkten über, welche in der vierten Periode der chemischen Induction massgebend werden. Ihr gehört die Gegenwart und voraussichtlich noch mehr die nächste Zukunft der chemischen Forschung an; die Anfänge ihrer Entwicklung reichen aber vielfach in die vorige Periode zurück, aus der in Folge der allmählichen Mitberücksichtigung der physikalischen Bedingungen der chemischen Wechselwirkungen die neue Richtung hervorgeht. Zunächst waren es die begleitenden Wärmeerscheinungen, die ebensowohl durch den Einfluss der Temperatur auf die Entstehung der Verbindungen und auf ihre Eigenschaften wie durch die Temperaturveränderungen, welche die chemischen Vorgänge selbst hervorbringen, der Untersuchung eine Reihe von Fragen stellten, deren Beantwortung dann der chemischen Induction neue Gesichtspunkte an die Hand gab. Dabei wurde die Richtung

der letzteren ausserdem durch die theoretischen Vorstellungen bestimmt, auf welche die mechanische Wärmetheorie in der neueren Physik an der Hand des Princips der Erhaltung der Energie geführt worden war. Jene theoretischen Vorstellungen enthielten zugleich die innere Rechtfertigung für die überwiegende Berücksichtigung der thermischen Vorgänge gegenüber andern die chemischen Processe begleitenden physikalischen Erscheinungen. Indem nämlich die mechanische Wärmetheorie die Wärmeerscheinungen auf die Bewegungen der ponderabeln Theilchen der Körper zurückführt, muss sie die chemischen Zerlegungen und Verbindungen, die ebenfalls auf solchen Bewegungen beruhen, als gleichartige Vorgänge auffassen, und sie wird von vornherein erwarten dürfen, dass jedem chemischen Vorgang ein bestimmter thermischer Vorgang entsprechen werde, so zwar, dass beide als innig mit einander zusammenhängende Bestandtheile eines und desselben Processes erscheinen. Auf solche Weise tritt diese vierte Periode der chemischen Induction namentlich den die erste und zweite beherrschenden physikalischen Ideen als die Periode der thermochemischen Untersuchungen und Theorien gegenüber.

Zunächst waltet nun auch hier noch ein Standpunkt vor, den zu verlassen die früheren Richtungen in den sie beherrschenden Ideen kein zwingendes Motiv fanden, dessen Festhaltung aber namentlich durch den starren chemischen Affinitätsbegriff, wie ihn die Valenzhypothese zur Geltung gebracht, geradezu gefordert war. Es ist dies der Standpunkt der rein statischen Betrachtung der chemischen Vorgänge. Er besteht darin, dass bei jeder Zersetzung oder Synthese nur der Anfangs- und Endzustand der in Wechselwirkung tretenden Stoffe in Betracht gezogen wird, ohne Rücksicht auf die etwa durchlaufenen Zwischenzustände, und ohne Rücksicht namentlich auf die Geschwindigkeit, mit welcher die Processe vor sich gehen. Auch bei der Untersuchung der thermischen Vorgänge liess dieser Standpunkt sich festhalten. Die bei der Oxydation eines Körpers entwickelte Verbrennungswärme, die bei den meisten Zerlegungen eintretende Wärmebindung, die Wärmecapacität eines einfachen oder zusammengesetzten Körpers, endlich die unter Berücksichtigung der Temperatur und des Drucks eintretenden Volumänderungen gasförmiger Stoffe bei ihrer Verbindung oder Zerlegung sind sämmtlich statische Grössen, insofern es sich bei ihrer Bestimmung lediglich um die Vergleichung zweier Gleichgewichtszustände handelt, nicht aber um die Frage, wie der eine dieser Zustände in den andern übergegangen ist. Gleichwohl liegt diese Frage hier so nahe, dass sie nicht auf die Dauer umgangen werden kann. So entsteht die Nothwendigkeit, das bisher bei dem Studium der chemischen Processe völlig vernachlässigte Element der Zeit mit in Betracht zu ziehen, und es tritt so jener chemischen Statik, die fortan ihren Werth behält, eine chemische Dynamik mit neuen Aufgaben gegenüber. Da auf die Geschwindigkeit, mit welcher sich die chemischen Vorgänge vollziehen, äussere Nebenbedingungen natürlich von viel grösserem Einflusse sind als

auf die statischen Endzustände, so wird nun die der chemischen Dynamik dienende Induction in höherem Grade genöthigt, solche Nebenbedingungen, wie die Massen der in Wechselwirkung tretenden Stoffe, das Vorhandensein anderer Stoffe, die Beschaffenheit der Lösungsmittel u. s. w., zu berücksichtigen. Obgleich dieses ganze Gebiet der chemischen Dynamik gegenwärtig noch in seinen Anfängen begriffen ist, so lässt sich doch voraussehen, dass es in nicht ferner Zeit der chemischen Induction eine veränderte Gestalt geben wird, wodurch dieselbe in methodischer Beziehung mehr als bis jetzt der physikalischen Induction an die Seite tritt. Die chemische Analyse und Synthese werden dann nicht mehr die ausschliesslichen Hülfsmittel sein, mit denen die Induction, geleitet von bestimmten hypothetischen Vorstellungen über die Affinitätsbeziehungen der Stoffe, operirt, sondern diese Hülfsmittel werden sich mit der physikalischen Analyse der den chemischen Process begleitenden Erscheinungen combiniren, und es werden durch die Erfolge dieser combinirten Methode auch die theoretischen Voraussetzungen der Chemie Modificationen erfahren, in denen die innigere Beziehung zum Ausdruck kommt, in welche die Gebiete der chemischen und physikalischen Forschung getreten sind.

### e. Die chemische Abstraction und Deduction.

Die Erhebung der Chemie zu einer selbständigen Wissenschaft ist aus dem nämlichen isolirenden Abstractionsverfahren hervorgegangen, welches die Trennung der verschiedenen Zweige physikalischer Forschung veranlasst hat. Auch wird hinsichtlich der letzten Probleme der chemischen Untersuchung diese Abstraction stets aufrecht erhalten bleiben, da die elektrischen, thermischen und sonstigen physikalischen Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge von der Chemie nur insoweit in Betracht gezogen werden, als sie mit den Verbindungen und Zerlegungen der Stoffe, diesem eigentlichen Object chemischer Forschung, in causalem Zusammenhange stehen.

Ein unmittelbares Ergebniss dieser Abstraction ist die Aufstellung eines Systems von Zeichen für die einfachen Stoffe, welches durch Combination zugleich die symbolische Darstellung jeder beliebigen chemischen Verbindung gestattet. Die Anwendung solcher Zeichen geht bis in die alchemistischen Anfänge der Chemie zurück; alle früheren Versuche sind aber durch die von Berzelius eingeführten Buchstabensymbole verdrängt worden. Dieselben vereinigen drei Eigenschaften, deren einleuchtender Zweckmässigkeit sie ihre rasche Einführung verdanken. Erstens gestattet das hier benützte Princip der Bezeichnung ohne weiteres die Anwendung auf neu entdeckte Elemente; zweitens ergiebt sich aus den den Symbolen beigefügten Zahlen unmittelbar die stöchiometrische Zusammensetzung einer Verbindung; drittens lassen sich die Anschauungen über die Structur der letzteren durch Gruppirung der Symbole, diejenigen über synthetische und

analytische Vorgänge durch Gleichungen versinnlichen, indem man im letzteren Fall von dem Plus-, Minus- und Gleichheitszeichen mit einer durch die chemische Anwendung nahe gelegten Modification der Bedeutung Gebrauch macht. Bei allem dem aber wird von den physikalischen Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge vollständig abstrahirt. Die chemischen Verbindungs- und Operationsformeln veranschaulichen uns nur den rein chemischen Theil des Vorgangs; über die thermischen Erscheinungen, den Einfluss der Aggregatzustände oder die Anwesenheit anderer, nicht direct bei dem betreffenden Process betheiligter Stoffe geben sie uns gar keine Auskunft. Dieser abstracte Charakter der chemischen Formeln darf um so weniger aus dem Auge verloren werden, als er zugleich eine zureichende Berücksichtigung der ursprünglichen Bedingungen eines Vorgangs ausschliesst. Von einer algebraischen Gleichung, der sie äusserlich ähnlich sieht, ist darum eine chemische Operationsformel wesentlich verschieden. Während jene unter allen Umständen richtig ist, sobald sich beide Seiten zu Null aufheben, ist die chemische Gleichung selbstverständlich nur dann richtig, wenn die linke Seite den Anfangszustand, die rechte den Endzustand eines Vorgangs in Bezug auf die thatsächliche Gruppirung der Elemente richtig darstellt. Da nun aber die chemischen Bedingungen für den eintretenden Erfolg in der ursprünglichen Constitution der in Wechselwirkung tretenden Stoffe enthalten sein müssen, so enthält jede Operationsgleichung zugleich den Hinweis auf diejenige symbolische Darstellung der einzelnen in sie eingehenden Verbindungsformeln, die von vornherein den wirklichen Erfolg als den unter allen möglichen wahrscheinlichsten erscheinen lässt. Auf diese Weise gehen aus den bloss die stöchiometrischen Verhältnisse der Elemente berücksichtigenden empirischen Formeln vermittelst der gewisse Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen zum Ausdruck bringenden Operationsgleichungen rationelle Formeln hervor. Dabei kann es nun freilich sich ereignen, dass unter verschiedenen physikalischen und chemischen Bedingungen abweichende Operationsgleichungen gewonnen werden, aus denen sich etwa auch abweichende rationelle Formeln für eine und dieselbe Verbindung ergeben können. Unter allen diesen Formeln die wahrscheinlichste zu finden, ist die Aufgabe der chemischen Induction. Es erhellt aber ohne weiteres, ein wie mächtiges Hülfsmittel derselben hier die chemische Symbolik ist, indem sie eine grosse Zahl analytischer und synthetischer Ergebnisse schnell übersehen lässt. Ein gewisser Mangel derselben liegt freilich darin, dass sie, der Schrift sich anschliessend, genöthigt ist, die Verbindungen in Gruppen zu zerlegen, die in einer Ebene und so viel als möglich sogar linear angeordnet werden, während doch die Elemente in den wirklichen Verbindungen jedenfalls nach drei Dimensionen geordnet sind. Darin liegt zunächst eine deutliche Warnung, dass man der hypothetischen und beschränkten Bedeutung der durch die gewöhnliche Symbolik ausgedrückten Beziehungen eingedenk bleibe, anderseits aber auch eine Aufforderung, zu versuchen,

ob sich nicht über bestimmte, namentlich physikalische Eigenschaften der chemischen Verbindungen durch eine körperlich gedachte Anordnung der Atome Rechenschaft geben lasse*).

Je weniger nun aber überhaupt die Betrachtung der rein chemischen Seite der chemischen Wechselwirkungen eine ausreichende Erklärung der letzteren zu geben im Stande ist, um so mehr bedarf auch hier die Abstraction des ergänzenden Verfahrens der Colligation. Diese besteht im vorliegenden Falle darin, dass die Untersuchung den specifisch chemischen Standpunkt mit dem physikalischen vereinigt, indem sie successiv über die einzelnen physikalischen Phänomene, welche die Verbindungen und Zersetzungen der Stoffe begleiten, Rechenschaft giebt. Ist auch der nächste Effect dieser Umkehrung des ursprünglichen Abstractionsverfahrens eine grössere Verwicklung der Untersuchungsmethoden und eine Vermehrung der in Rücksicht gezogenen Thatsachen, so wird doch durch den Enderfolg im allgemeinen eine Vereinfachung der Gesichtspunkte herbeigeführt. Denn indem jene Colligation schliesslich die Subsumtion der chemischen Erscheinungen unter physikalische Principien ermöglicht, bringt sie zugleich die chemischen Stoffbewegungen in unmittelbarste Beziehung zur allgemeinen Mechanik. Die chemische Statik und Dynamik wird zu einem Bestandtheil der Mechanik der Wärme und gestattet so, die chemischen Vorgänge auf verhältnissmässig einfache mechanische Anschauungen zurückzuführen, die gleichwohl nicht bloss über den specifisch chemischen Inhalt der Erscheinungen, sondern auch über alle anderen begleitenden Processe Rechenschaft ablegen.

Von der jeweiligen Stufe der chemischen Abstraction ist nun die Form der Deduction der chemischen Thatsachen wesentlich abhängig. Je isolirender noch die Abstraction verfährt, um so mehr herrscht als die fast ausschliessliche Deductionsmethode die Analogie vor. Jede der grundlegenden Anschauungen, welche während der Entwicklung der Chemie massgebend waren, stützte sich auf eine meistens nicht sehr grosse Zahl von durch Induction gefundenen Thatsachen. Nach der Analogie dieser Thatsachen wurden dann aber alle übrigen Erfahrungen beurtheilt, und in der Regel wurden die Experimente, die man zur Zerlegung bestimmter Verbindungen oder zur Herstellung neuer unternahm, von eben solchen Analogieschlüssen geleitet. So construirte die dualistische Richtung der Chemie alle möglichen unorganischen und organischen Verbindungen nach Analogie gewisser binärer Zusammensetzungen. Von einer Analogie mit dem Verhalten der Elemente, namentlich der Metalle, ausgehend bildete man den Begriff des Radicals. Während der Herrschaft der Structurchemie war dieses Verfahren nicht einmal mehr, wie bei der elektrochemischen Hypothese, von gewissen physikalischen Gesichtspunkten geleitet; um so

---

*) Vgl. J. H. van t'Hoff, Die Lagerung der Atome im Raume. Deutsch bearbeitet von F. Herrmann. Braunschweig 1877.

mehr aber verdrängte es hier sogar die Induction, da oft genug Analogien für die Anschauungen über die Structur einer Verbindung bestimmender wurden als die unmittelbaren Resultate der stufenweisen Analyse und Synthese. Die Valenztheorie vertiefte zwar diese lediglich von der chemischen Gruppirung ausgehenden Analogien, indem sie den Affinitätswerth der Elemente zur Geltung brachte. Aber nachdem letzterer für jedes Element aus einer beschränkten Anzahl von Verbindungen durch Induction gefunden war, wurde er nun wieder der Ausgangspunkt zahlreicher Analogiebildungen.

Erst in Folge der umfassenderen Berücksichtigung der physikalischen Bedingungen und Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge hat mit diesem Analogieverfahren theilweise die vollkommenere Form der physikalischen Deduction sich verbunden, die nicht wie die Analogie von dem Einzelnen auf das Einzelne schliesst, sondern aus bestimmten allgemeinen Principien die speciellen Thatsachen ableitet. Zunächst hat auch hier unter dem Einfluss der thermochemischen Studien das Princip der Erhaltung der Energie seine allgemeingültige Bedeutung bewährt. Neben ihm sind einige andere Voraussetzungen, die aus der Anwendung speciellerer Vorstellungen der mechanischen Wärmetheorie auf die chemischen Processe entsprangen, fruchtbare Ausgangspunkte für die Deductionen der chemischen Statik und Dynamik geworden. In erster Linie steht hier die aus dem Gesetz der gleichen thermischen Ausdehnung der vollkommenen Gase abgeleitete Voraussetzung, die unter dem Namen des Avogadro'schen Gesetzes bekannt ist, sowie das von Dulong und Petit für den festen Aggregatzustand der Körper aufgestellte Gesetz der gleichen Wärmecapacität der Atome. Während diese Gesetze nebst einigen anderen Hülfsprincipien hauptsächlich die Grundlagen der chemischen Statik abgeben, stützt sich die chemische Dynamik unmittelbar auf das allgemeine Energiegesetz, um ausserdem für gewisse Betrachtungen die mechanischen Vorstellungen zu Hülfe zu nehmen, welche die Physik in Bezug auf die Bewegungszustände der Körper in ihren verschiedenen Aggregatzuständen entwickelt hat, Vorstellungen, die sich leicht auch auf das Verhalten der Atome in ihren Verbindungen übertragen lassen. Die logische Untersuchung aller dieser dem physikalischen Gebiet entlehnter Principien wird im folgenden unsere Aufgabe sein; ihnen voraus werden wir aber diejenigen allgemeinen Begriffe besprechen müssen, welche direct aus der chemischen Induction hervorgegangen sind, und mit denen jene physikalischen Principien in der Anwendung combinirt werden.

## 2. Die chemische Statik und Dynamik.

### a. Die Principien der chemischen Statik.

Die Entwicklung der Principien der chemischen Statik hat von dem Gesetz der multiplen Proportionen ihren Ausgang genommen. Dasselbe

stellt fest, dass diejenigen Gewichtsmengen zweier Elemente A und B, die sich mit einer und derselben Menge eines dritten Elementes C verbinden, entweder die nämlichen sind, in denen sich A und B auch unter einander verbinden, oder zu den letzteren in dem Verhältnisse einfacher ganzer Zahlen stehen. Dieses Gesetz führt fast unvermeidlich zu atomistischen Vorstellungen. Denn es legt die Deutung nahe, dass die einfachsten Gewichtsverhältnisse, in denen sich die Elemente verbinden können, dem Gewichtsverhältnisse ihrer Atome entsprechen. Auf diese Weise hat in der That Dalton, der Entdecker des Gesetzes der multiplen Proportionen und der Begründer der chemischen Atomistik, den Begriff des Atomgewichts geschaffen. Dieser Grundbegriff der chemischen Statik, von welchem alle andern Begriffe derselben abhängen, lässt nun wieder zwei verschiedene Deutungen zu. Man kann denselben erstens im nächsten Anschlusse an das Gesetz der multiplen Proportionen einfach als einen hypothetischen Ausdruck für die thatsächlichen Verhältnisse der Verbindungsgewichte der Stoffe auffassen; es lassen sich aber auch unter Hinzunahme des Begriffs der chemischen Affinität die Atomgewichte als diejenigen relativen Mengen einfacher Stoffe betrachten, die bei der chemischen Bindung einander vertreten können, also hinsichtlich ihres Affinitätswerthes einander äquivalent sind. Auf diese Weise geht der Begriff des Atomgewichts in denjenigen des Aequivalentgewichts über. Man hat längere Zeit diesen Ausdruck desshalb vorgezogen, weil er nicht, wie der des Atomgewichts, eine hypothetische Voraussetzung enthalte. Es ist aber leicht zu sehen, dass, wenn man den letzteren lediglich in der ihm durch das Gesetz der multiplen Proportionen gegebenen thatsächlichen Bedeutung auffasst, gerade das umgekehrte der Fall ist. Dann nämlich bedeutet das Atomgewicht nichts weiter als das relative Gewicht der kleinsten Menge eines Elementes, die in Verbindungen eintreten kann. Diese Menge wird nur desshalb ein chemisches Atom genannt, weil sie bei allen chemischen Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen als eine nicht weiter theilbare Menge in Betracht kommt. Das Atomgewicht bezeichnet also eine aus dem Gesetz der multiplen Proportionen unmittelbar zu folgernde Thatsache. Der Begriff des Aequivalentgewichtes dagegen verbindet diese Thatsache mit der weiteren Voraussetzung, dass jene kleinsten Verbindungsgewichte in Bezug auf ihren Affinitätswerth einander gleichwerthig seien, einer Voraussetzung, die nicht nur hypothetisch, sondern in dieser Fassung sogar unrichtig ist.

Nichts desto weniger hat diese Umwandlung in den Begriff des Aequivalentgewichts das nächste vom rein chemischen Standpunkte aus zu erlangende Hülfsmittel zur Bestimmung der Atomgewichte oder einfachsten Mischungsgewichte dargeboten. Denn das Gesetz der multiplen Proportionen gab darüber keinen sicheren Aufschluss. Wenn man z. B. fand, dass das Kaliumoxyd auf 1 Theil Sauerstoff 4,9 Kalium enthält, so blieb unsicher, ob das Atomgewicht des Sauerstoffs zu 1, 2, 3 . . . und dem-

gemäss dasjenige des Kaliums zu 1, 2, 3 . . . mal 4,9 anzusetzen sei. Als man aber fand, dass der dem Kalium in seinen Affinitätsverhältnissen analoge Wasserstoff sich mit Sauerstoff im Verhältniss von 1 : 8 zu Wasser verbinde, so sah man sich, sobald das kleinste Verbindungsgewicht des Wasserstoffs als Einheit des Atomgewichts betrachtet wurde, genöthigt, das letztere für den Sauerstoff = 8 und für das Kalium = 39,2 anzunehmen. Ebenso konnten dann aber die Atomgewichte der übrigen Metalle aus ihren analogen Sauerstoffverbindungen bestimmt werden. Diese Ermittelung der Aequivalentgewichte empfing ausserdem eine Stütze an der quantitativen Bestimmung der durch die Elektrolyse gewonnenen Zersetzungsproducte der Verbindungen, da nach dem von Faraday gefundenen Gesetze der festen elektrolytischen Action gleich grosse Mengen strömender Elektricität die Elemente aus analog zusammengesetzten Verbindungen in Mengeverhältnissen ausscheiden, die ihren Aequivalentgewichten entsprechen.

Gleichwohl gab diese Bestimmungsweise, namentlich in solchen Fällen, wo zwei Elemente mehrere Verbindungen mit einander eingehen, keine unzweideutigen Werthe für die Atomgewichte. Auch beruhte sie auf der Annahme, dass die im freien Zustand existirende einfachste Verbindung zweier Elemente die einfachste überhaupt mögliche sei, eine Voraussetzung, die an sich durchaus nicht gerechtfertigt ist, und gegen die sich späterhin namentlich aus der Constitution der organischen Verbindungen gegründete Bedenken ergaben. So war z. B. nur unter jener Voraussetzung für das Wasser die Formel HO (1 Atom Wasserstoff auf 1 Atom Sauerstoff mit dem Gewichtsverhältniss 1 : 8) gerechtfertigt. Sobald aber in irgend einer zusammengesetzteren Verbindung eine Atomgruppe anzunehmen war, in der das Gewichtsverhältniss von H zu O 1 : 16 betrug, so musste offenbar für diese die einfache Formel HO reservirt, also das Atomgewicht des Sauerstoffs verdoppelt und demnach das Wasser = $H_2O$ angesetzt werden.

Bevor jedoch diese Gesichtspunkte zur Geltung kamen, war es eine bei den Verbindungen der gasförmigen Elemente zu beobachtende Regelmässigkeit, welche eine Verwerthung für die Bestimmung der Atomgewichte nahe legte. Nach einem von Gay Lussac entdeckten Gesetze verbinden sich nämlich die Gase entweder nach gleichen oder den nächststehenden einfachen Volumverhältnissen. Dieses Gesetz veranlasste bereits Berzelius zu der Vermuthung, dass die Gewichte gleicher Volumina gasförmiger Elemente im selben Verhältnisse stehen wie ihre Atomgewichte oder, mit andern Worten, dass die Atome aller Elemente im gasförmigen Zustand den gleichen Raum einnehmen. War diese Hypothese richtig, so entsprachen die Volumtheile der in einer Verbindung enthaltenen gasförmigen Elemente unmittelbar den Atomzahlen. Die Chlorwasserstoffsäure erhielt also die Formel HCl, weil sich 1 Volum Wasserstoff mit 1 Volum Chlor verbindet, das Wasser dagegen die Formel $H_2O$, weil in ihm 2 Volumina

Wasserstoff auf 1 Volum Sauerstoff enthalten sind. Bedeutsamer für die chemische Statik wurde dieses Berzelius'sche Volumgesetz erst, als Avogadro neben den Volumverhältnissen der einfachen auch diejenigen der zusammengesetzten Gase in Rücksicht zog und dabei insbesondere die etwaigen Volumänderungen beachtete, die in Folge der chemischen Bindung eintreten. Diese Erwägungen führten ihn zu dem neuen wichtigen Begriff des chemischen Molecüls als der kleinsten für sich bestehenden Atomgruppe und zu der Hypothese, dass in gleichen Raumtheilen aller Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die nämliche Anzahl von Molecülen enthalten sei. Als ein Corollarsatz hierzu hat dann der Satz zu gelten, dass auch in den einfachen Gasen die Molecüle zusammengesetzt sind, indem die einfachen von den zusammengesetzten Körpern nur dadurch sich unterscheiden, dass in jenen die Molecüle aus gleichartigen, in diesen aus verschiedenartigen Atomen bestehen*). Dieser Satz ergab sich, sobald die Berzelius'sche Hypothese von den Atomen auf die Molecüle der zusammengesetzten Gase übertragen war, ohne weiteres aus der Vergleichung der Volumverhältnisse der Verbindungen und ihrer Bestandtheile. Da sich z. B. 1 Volum Chlor und 1 Volum Wasserstoff verbinden, um 2 Volumina chlorwasserstoffsaures Gas zu bilden, so müssen nothwendig, wenn in jedem Volum dieser Gase gleich viel Molecüle enthalten sein sollen, die Molecüle des Chlors und des Wasserstoffs ebenso wie die des Chlorwasserstoffs aus zwei Atomen zusammengesetzt sein.

In doppelter Beziehung bildet die Avogadro'sche Hypothese einen bedeutsamen Wendepunkt in den chemischen Anschauungen. Einerseits erweiterte sie im Anschlusse an den neu gebildeten Begriff des chemischen Molecüls den Affinitätsbegriff, indem sie die Anwendung desselben auch auf die chemisch unzerlegbaren Stoffe veranlasste; anderseits gab sie ein unzweideutiges physikalisches Mass ab für die Bestimmung der Atomgewichte der Elemente und der Elementarconstitution der Verbindungen. Beide Rückwirkungen gelangten aber erst dann zu ihrer Bedeutung, als der Avogadro'sche Satz selbst durch die neuere mechanische Wärmetheorie seine tiefere Begründung empfangen hatte. Die Vorstellung der gleichen Molecülzahl aller Gase im gleichen Volum erschien nun als eine nothwendige Folgerung aus den Grundbedingungen des molecularen Bewegungszustandes der Gase, und sie trat in unmittelbare Beziehung zu den aus denselben Bedingungen entspringenden einfachen Gesetzen von Mariotte und von Gay Lussac über das Verhältniss des Volums gasförmiger Körper zu Druck und Temperatur. Auch die früher so räthselhafte Regel von der chemischen Wirksamkeit der Elemente im Status nascendi gewann an der

*) Zur Geschichte der Avogadro'schen Hypothese vgl. H. Kopp, Die Entwicklung der Chemie in der neueren Zeit, München 1873, S. 349 f., und Lothar Meyer, Die modernen Theorien der Chemie, 2. Aufl., S. 21 f.

Hand des neuen Molecülbegriffs und der Voraussetzungen über die thermischen Bewegungen der Molecüle ihre leicht verständliche mechanische Interpretation.

Dennoch bleibt die Verwerthung der Avogadro'schen Hypothese für den Hauptzweck, für welchen sie aufgestellt wurde, für die Bestimmung der Atomgewichte der Elemente, wegen der Beschränkung auf den gasförmigen Zustand derselben eine begrenzte. Um so glücklicher fügt es sich, dass gerade für die dem gasförmigen Zustande am fernsten stehenden festen Elemente abermals das thermische Verhalten einen Massstab für die Bestimmung der Atomgewichte abgiebt, indem bei den meisten derselben nach dem von Dulong und Petit aufgefundenen Gesetze die Wärmecapacität oder diejenige Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur der Gewichtseinheit einer Substanz um $1^0$ C. zu erhöhen, ein reciprokes Verhalten zeigt zu dem Atomgewichte, so dass die Producte aus den Wärmecapacitäten in die Atomgewichte innerhalb bestimmter, übrigens für die verschiedenen Elemente etwas wechselnder Temperaturgrenzen annähernd einander gleich sind*). Dieses Verhalten lässt nur die Deutung zu, dass die Atome der einfachen Körper im festen Zustand die nämliche specifische Wärme besitzen, oder dass ihnen, mechanisch ausgedrückt, bei gleicher Wärmezufuhr die gleiche Energie der Schwingungsbewegung mitgetheilt wird. Auch dieser Satz wird wieder mechanisch verständlich unter der Voraussetzung, dass im starren, ähnlich wie im gasförmigen Zustande, das physikalische Verhalten der Körper ein annähernd gleichförmiges ist. Gerade unter dieser Voraussetzung liegt es aber nahe, die mechanische Bedeutung des Gesetzes von den Atomen auf die Molecüle zu übertragen. In der That ist dies durch ein von F. Neumann aufgestelltes Theorem geschehen, nach welchem die Moleculargewichtswärmen analog zusammengesetzter Verbindungen annähernd einander gleich sind**).

Wie bei den auf die Gesetze von Dulong und Petit und von F. Neumann gegründeten Beobachtungen die Effecte der Wärmezufuhr benützt werden, um über das Verhalten der Atome und ihrer Verbindungen Aufschluss zu gewinnen, so kann nun überhaupt das gleichartige oder verschiedene physikalische Verhalten der Körper zu Rückschlüssen auf ihre chemische Constitution dienen.. So schliesst man bei Verbindungen, bei denen man aus chemischen Gründen eine Analogie der Zusammensetzung anzunehmen berechtigt ist, aus der Gleichheit der Krystallform auf ein correspondirendes Verhalten der Atomzahl ihrer Elemente, so dass, wenn das Atomgewicht des einen Elementes einer binären Verbindung bekannt ist, dasjenige des andern daraus abgeleitet werden kann. Insbesondere sieht man sich zu einer solchen Folgerung dann berechtigt, wenn die analoge Zusammensetzung der isomorphen Verbindungen darin ihren Ausdruck findet, dass die

*) Vgl. H. F. Weber, Pogg. Ann., 1875, Bd. 154, S. 367.

**) F. Neumann, Pogg. Ann., Bd. 23. S. 1.

eine Verbindung in die andere lediglich durch Ersetzung eines bestimmten Elementes durch ein anderes umgewandelt werden kann. In ähnlicher Weise lassen sich aus dem analogen Verhalten bestimmter physikalischer Constanten, wie des Siedepunkts, der Schmelzwärme, der Verbrennungswärme, des Brechungs- und elektrischen Leitungsvermögens, sowie aus der regelmässigen Veränderung einzelner unter diesen Constanten bei gleichartigen chemischen Aenderungen Rückschlüsse machen auf die atomistische Constitution der Körper. Unter jenen physikalischen Constanten sind wieder diejenigen, die sich auf die thermischen Vorgänge beziehen, von hervorragender Wichtigkeit. Indem die chemische Statik von ihnen Gebrauch macht, stützt sie sich aber bereits zum Theil auf dynamische Gesichtspunkte; nur bleibt die Verwerthung der thermischen Vorgänge so lange eine vorwiegend statische, als man, wie dies bei der Bestimmung der Schmelzungs-, Lösungs- und Verbrennungswärme geschieht, nur die Endeffecte der thermischen Vorgänge, nicht den wechselnden zeitlichen Verlauf derselben berücksichtigt.

### b. Die Principien der chemischen Dynamik.

Durch die Benützung der erörterten Principien sucht die chemische Statik die Bedingungen der wechselseitigen Bindung der Atome zu ermitteln. Doch gewinnt sie auf diesem Wege keinen Aufschluss über das Wesen der chemischen Affinitätskräfte, ja sie vermag nicht einmal ein zureichendes Mass für die Wirksamkeit derselben in verschiedenen Fällen aufzufinden. Insbesondere enthält der aus der Structur der Verbindungen abgeleitete Begriff der Valenz ein solches Mass durchaus nicht, da durch denselben nur ein verhältnissmässig beschränkter einzelner Effect der Affinitätskräfte bestimmt wird. Denn die Grösse der wirklichen Affinität hängt zunächst von der Festigkeit ab, mit der die Atome an einander gebunden sind, während der Valenzbegriff bloss für die relativen Zahlenwerthe der Atome im chemischen Molecül gewisse Maximalwerthe feststellt.

Nur eine einzige unter den bereits erwähnten physikalischen Constanten der chemischen Vorgänge steht zu der Grösse der Affinität in einer so nahen Beziehung, dass sie unter geeigneten Bedingungen ein Mass für die Intensität der Affinitätswirkungen abzugeben vermag: dies ist die so genannte Verbrennungswärme oder diejenige Wärmemenge, welche in Folge der Verbindung der Atome frei wird und auf calorimetrischem Wege gemessen werden kann. Indem dieselbe die Energie der schwingenden Bewegungen misst, welche während eines durch die Wirkung der Affinitätskräfte stattfindenden Ueberganges aus einem bestimmten Zustand chemischer Bindung in einen anderen stattfinden, gestattet sie einen Rückschluss auf die Grösse des Kraftaufwandes, der zur Herbeiführung dieser Zustandsänderung erforderlich ist. Aber auch hier kann diese Grösse nicht etwa unmittelbar aus der beobachteten Verbrennungswärme erschlossen werden, sondern

es ist dazu ausserdem die Erwägung einerseits des vorangegangenen Zustandes der Atome und anderseits der sonstigen die thermischen Vorgänge beeinflussenden Veränderungen, insbesondere also der etwa gleichzeitig eintretenden und regelmässig von Wärmebindung begleiteten Dissociationen erforderlich. Auf diese Weise stellt sich die wirklich als Mass einer gegebenen Affinitätswirkung verwerthbare Verbrennungswärme regelmässig als Glied einer thermischen Gleichung dar, in welcher sich auf der nämlichen Seite noch andere, theils positive, theils negative Glieder befinden, während die andere als einziges Glied die gesammte bei dem betreffenden chemischen Vorgang beobachtete thermische Veränderung enthält. Man bezeichnet jede solche Veränderung als Wärmetönung und nennt dieselbe positiv, wenn sie einem Freiwerden von Wärme, negativ, wenn sie einer Bindung derselben entspricht. Hiernach ist die gesammte in einem Versuch beobachtete Wärmetönung im allgemeinen einer Summe positiver und negativer Wärmetönungen gleichzusetzen, deren Einzelbestimmung erfordert wird, wenn der thermische Werth einer gegebenen Affinitätsäusserung gemessen werden soll. Diese Messung wird möglich, sobald es gelingt eine hinreichende Zahl thermischer Gleichungen zu gewinnen, um aus ihnen das gesuchte Glied berechnen zu können*). Mittelst der Vergleichung der so erhaltenen thermischen Affinitätswerthe lassen sich dann zuweilen auch Rückschlüsse machen auf die Gruppirung der Atome. So liefert der Umstand, dass isomere Körper aus ihren Elementen mit fast identischen Wärmeentwickelungen hervorgehen, eine werthvolle Bestätigung für die Gleichartigkeit ihrer Zusammensetzung**). Wenn bei der Aufnahme von Wassermolecülen durch ein Salz die Wärmetönung für mehrere successiv aufgenommene Molecüle die nämliche ist, so lässt sich daraus auf die übereinstimmende Lagerung derselben schliessen***) u. s. w. Uebrigens ist im Auge zu behalten, dass die chemischen Kräfte nicht bloss Wärme, sondern auch andere Formen der Energie hervorbringen können, wobei keineswegs eine der Grösse der Leistung entsprechende Aenderung der Temperatur einzutreten braucht, ein Fall, welcher z. B. bei den Arbeitsleistungen der galvanischen Batterien in augenfälliger Weise verwirklicht ist. Die von der chemischen Dynamik im allgemeinen festgehaltene Voraussetzung, dass die sämmtlichen Affinitätswirkungen in thermischen Veränderungen ihren Ausdruck finden, kann daher in solchen Fällen nicht mehr vollständig zutreffen†).

*) Vgl. Berthelot in zahlreichen Aufsätzen der Comptes rend. de l'Acad. des sciences, und Julius Thomsen, Thermochemische Untersuchungen, Bd. I, Leipzig 1882.

**) Berthelot, Compt. rend., t. 83, p. 413.

***) Thomsen, Journ. f. prakt. Chemie, N. F., Bd. 18, S. 48 f.

†) Helmholtz, Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsber. der Berl. Akad., 1882, S. 22.

Gegen alle diese Affinitätsbestimmungen auf thermischem Wege lässt sich endlich noch der Einwand erheben, dass bei ihnen der Factor der Zeit keine Berücksichtigung gefunden hat. Für die vollständige Bestimmung der Grösse einer Kraft ist es an und für sich unerlässlich, dass man nicht bloss die Arbeitsmenge kenne, die sie zu leisten vermag, sondern auch die Zeit, die sie dazu nöthig hat. Die besonderen Bedingungen der chemischen Wirkungen gestatten es allerdings mehr, als es bei den meisten physikalischen Processen erlaubt ist, von der Geschwindigkeit der Vorgänge zu abstrahiren. Einerseits nämlich folgt aus dem Valenzgesetz, dass bei dem Zusammentreffen bestimmter in Affinitätsbeziehungen stehender Stoffe nach kürzerer oder längerer Zeit ein dauernder Gleichgewichtszustand entstehen muss, wo dann der Gesammtwerth der thermischen Aenderungen, der vom Anfang der Reaction an verflossen ist, am einfachsten den chemischen Arbeitseffect ermessen lässt. Anderseits vollziehen sich in vielen Fällen, z. B. bei der Bildung löslicher Salze in Folge der Wirkung einer Säure auf eine Basis im flüssigen Zustande, die Reactionen so schnell, dass sich der zeitliche Verlauf derselben den Messungshülfsmitteln entzieht. Gleichwohl bleibt die Untersuchung der zeitlichen Verhältnisse chemischer Vorgänge als eine wichtige Aufgabe bestehen, deren Lösung erst eine Massbestimmung der Affinitätskräfte ermöglichen wird, die den allgemeinen Principien physikalischer Messung Genüge leistet. Denn die Schätzung der Grösse einer bewegenden Kraft fordert die Ermittelung der Geschwindigkeit der von ihr ausgelösten Bewegungen. Dabei haben aber die chemischen Stoffbewegungen die Eigenschaft aller Molecularbewegungen, dass sie für uns nur messbar werden, wenn bestimmte Veränderungen in dem bisher bestehenden Gleichgewichtszustand der Stoffe eintreten, während sie sich sofort wieder unserer Messung entziehen, sobald ein neuer Gleichgewichtszustand entstanden ist, ohne dass darum der letztere als ein wirklicher Ruhezustand der Atome und Molecüle aufzufassen wäre. Die nächste Analogie zeigen in dieser Beziehung die chemischen Stoffbewegungen mit den durch gewisse äussere Bedingungen beschränkten Aenderungen der Aggregatzustände, z. B. mit der Verdampfung einer Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Raume. So lange der letztere nicht bei der vorhandenen Temperatur mit Dampf gesättigt ist, findet eine messbare Molecularbewegung statt, indem innerhalb eines jeden Zeittheilchens eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in Dampf sich verwandelt. Sobald dagegen der über der Flüssigkeit befindliche Raum mit Dampf gesättigt ist, hört die Molecularbewegung auf unmittelbar messbar zu sein, ohne dass sie darum aufhörte zu existiren. Vielmehr besteht der eingetretene Gleichgewichtszustand eben darin, dass nun in jedem Zeittheilchen ebenso viele Molecüle aus der Flüssigkeit in den umgebenden Raum übergehen, als umgekehrt aus diesem wieder zu der Flüssigkeit zurückkehren. Nun gehen bei dem allgemeinsten Fall chemischer Wechselwirkung zwei Verbindungen A und B durch zwischen ihnen stattfindende Affinitätsbeziehungen in zwei neue Verbindungen A'

und B' über. Da aber auch in den ursprünglichen Stoffen A und B die Elemente durch bestimmte Affinitäten zusammengehalten sind, so werden nun umgekehrt A' und B' wieder in einem gewissen Grade in die Verbindungen A und B sich umzuwandeln streben. Es werden also im allgemeinen zwei entgegengesetzte Verwandlungen erfolgen, und Gleichgewicht wird eingetreten sein, sobald die in der Zeiteinheit stattfindende Rückbildung von A + B der Neubildung von A' + B' gleich geworden ist. Von diesem Augenblick an hört die chemische Molecularbewegung auf messbar zu sein, während, so lange die Reaction stattfindet, die Energie derselben oder die Grösse der chemischen Affinitätswirkung durch die in der Zeiteinheit gebildete Menge der neuen Stoffe A' und B' gemessen werden kann. Es erhellt ohne weiteres, dass die so bestimmte Affinitätskraft nicht bloss von dem allgemeinen chemischen Verhalten der Stoffe, sondern auch von den relativen Massen, welche in Wechselwirkung treten, abhängig ist; auch liegt es nahe zu vermuthen, dass die Anwesenheit anderer, fremder Stoffe auf die Grösse der Affinitätswirkungen von einem gewissen Einflusse sein werde. In der That hat sich dies im allgemeinen durch die Untersuchung bestätigt. Doch ist man noch nicht zur Aufstellung vollkommen einwurfsfreier Gesetze über die Grösse und den Verlauf der Affinitätswirkungen unter verschiedenen Bedingungen gelangt*).

## 3. Der chemische Atombegriff.

Früher als die Physik ist die Chemie durch zwingende Gründe zur Annahme atomistischer Vorstellungen geführt worden. Darum fehlt hier fast vollständig jener Kampf der Atomistik mit der Continuitätshypothese, der bis in die neueste Zeit die physikalische Naturerklärung entzweite. Seit man überhaupt das Princip der Constanz der Materie festhielt, musste man das Wesen der chemischen Verbindungserscheinungen auf wechselnde Gruppirungen an sich unveränderlicher Elemente zurückzuführen suchen. Seit Boyle waren daher corpusculare Vorstellungen, die den Keim der späteren Atomistik Dalton's in sich schlossen, in der Chemie verbreitet. Für Dalton selbst aber wurde die Aufstellung des Princips der multiplen Proportionen das Motiv zur weiteren Ausbildung dieser Vorstellungen. Er zuerst entwickelte jenen folgenreichen Begriff des Atomgewichts, der als unmittelbarer theoretischer Ausdruck des Gesetzes der multiplen Proportionen sich ergab und zur Grundlage aller folgenden stöchiometrischen Untersuchungen geworden ist. Auch Dalton's Atome besitzen eine corpusculare Beschaffenheit; er glaubt ihnen der Einfachheit wegen eine kugel-

*) Vgl. Guldberg und Waage, Journ. f. prakt. Chem., N. F., Bd. 19, 1879, S. 69.

förmige Gestalt zuschreiben zu müssen. Da aber dieser Atombegriff aus dem Begriff des chemischen Elementes hervorgegangen ist, so werden ebenso viele qualitativ verschiedene Atome angenommen, als es verschiedene Elemente giebt. Das Atomgewicht gilt nur als diejenige unter den Eigenschaften der Elemente, welche für die quantitative Untersuchung die grösste Wichtigkeit besitzt; doch finden neben ihm noch weitere, namentlich das elektrische Verhalten und die specifische Wärme, die gebührende Würdigung. Alle diese Eigenschaften des elementaren Atoms werden als letzte nicht weiter erklärbare Thatsachen betrachtet.

In der hier angedeuteten Weise ist der chemische Atombegriff im wesentlichen bis heute bestehen geblieben. In der That reicht derselbe zur Erklärung der sämmtlichen unserer genaueren Untersuchung zugänglichen Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen vollkommen aus. Hervorgegangen aus dem Princip der Constanz der Materie und aus dem Gesetz der Verbindung der Elemente nach einfachen Gewichtsverhältnissen, will er nur eine anschauliche Darstellung der Thatsachen ermöglichen, die in jenen Principien ihren Ausdruck finden. Nichts desto weniger beginnen fast mit dem Moment der Begründung der chemischen Atomistik Versuche, welche dahin gerichtet sind, den durch die gewöhnlichen Hülfsmittel der chemischen Analyse und Synthese gewonnenen Atombegriff zu überschreiten und zu einer abstracteren Fassung desselben zu gelangen, welche nicht bloss die Eigenschaften der Verbindungen aus denjenigen ihrer Elemente, sondern auch die Eigenschaften der Elemente selbst in ihren gegenseitigen Verhältnissen begreiflich machen soll. Damit verbindet sich zugleich die Aussicht auf den weiteren Vortheil, dass auf diesem Wege eine nähere Beziehung des chemischen zu dem allgemeinen physikalischen Atombegriff möglich werde. In methodischer Beziehung ist es charakteristisch, dass, während der bisherige Atombegriff einfach aus dem Motiv der Umsetzung der analytischen Fundamentalgesetze in eine anschauliche Vorstellung hervorgegangen war, nunmehr diese Weiterbildungen durchweg auf die Nachweisung von Analogien in dem Verhalten verschiedener Elemente sich stützen. Hierin verräth sich deutlich das vorbereitende Stadium der Untersuchung, in welchem man sich noch befindet. In Ermangelung der directen Nachweisung einer Zerlegbarkeit der bisher angenommenen Atome sieht man sich genöthigt, die Analogie im Verhalten gewisser Elemente mit demjenigen chemischer Verbindungen zu Hülfe zu nehmen, um hieraus eine gewisse Wahrscheinlichkeit für die zusammengesetzte Natur der gewöhnlich als elementar angesehenen Stoffe zu gewinnen. Auf diese Weise bewahrt das in anderen Theilen der chemischen Theorie so einflussreiche Verfahren der Analogie auch hier seine Bedeutung. Daneben ist freilich der Einfluss des allgemeinen Strebens nach Vereinfachung der Voraussetzungen nicht zu verkennen. Die grösste Einfachheit in Bezug auf die letzten Elemente der Erklärung würde ja dann erreicht sein, wenn es gelänge, alle chemischen Erscheinungen aus den wechselnden Gruppirungen

und Bewegungen eines einzigen Urstoffes abzuleiten. Indem die Annahme irgend welcher qualitativer Unterschiede für denselben hinwegfiele, würde überdies nunmehr das nämliche Princip der Reduction aller Erscheinungen auf die Bewegungen eines nur durch die Bewegung für uns wahrnehmbaren Stoffes Platz greifen, welches in der physikalischen Naturerklärung zur Geltung gelangt ist. Damit wäre auch für die Chemie der Uebergang aus der qualitativen in die rein quantitative Atomistik vollendet.

Die Versuche einer derartigen Umgestaltung des chemischen Atombegriffs beginnen unmittelbar nach den ersten quantitativen Bestimmungen der Atomgewichte. Sie finden ihren Ausdruck in der Hypothese Prout's, die Atomgewichte aller Elemente seien Multipla vom Atomgewicht des Wasserstoffs, einer Hypothese, welche von selbst dazu führt, in dem Wasserstoff das Urelement zu vermuthen. Während längerer Zeit zurückgedrängt, hat diese Annahme schliesslich in den genauesten Atomgewichtsbestimmungen der neueren Zeit eine approximative Bestätigung empfangen, die aber freilich, eben weil sie keine vollkommen genaue ist und die Abweichungen immerhin die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten, darauf hinweist, dass das Prout'sche Gesetz nur eine Annäherung an die Wahrheit enthält.

Zu der Thatsache, dass die Atomgewichte fast sämmtlicher Elemente annähernd durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, wenn man das Gewicht des Wasserstoffatoms der Einheit gleichsetzt, treten nun aber eine Reihe von Analogien zwischen den Atomgewichten und den so genannten Moleculargewichten chemischer Verbindungen*). Unter dem Moleculargewicht versteht man die Summe der Atomgewichte, die ein Molecül als kleinster ohne Zersetzung isolirbarer Theil eines Körpers enthält. Das Moleculargewicht des Radicals Methyl ($CH_3$) besteht also z. B. aus 1 Atomgewicht Kohlenstoff und 3 Atomgewichten Wasserstoff. Daraus ergiebt sich von selbst, dass die Moleculargewichte solcher Verbindungen, die homologe Reihen bilden, in regelmässigen Verhältnissen zu einander stehen müssen. Die organischen Radicale von der allgemeinen Formel $C_{2n}H_{2n+1}$, wie Methyl ($CH_3$), Aethyl ($C_2H_5$), Propyl ($C_3H_7$), Butyl ($C_4H_9$), bilden z. B. eine homologe Reihe. Jedes Glied dieser Reihe unterscheidet sich von dem vorangehenden durch die Atomgruppe $CH_2$, demnach auch jedes Moleculargewicht von dem vorangehenden durch die dem Moleculargewicht von $CH_2$ entsprechende constante Zahl. Nun finden sich zwischen den Atomgewichten chemisch verwandter Elemente ähnliche constante Differenzen. So unterscheiden sich Lithium, Natrium und Kalium je durch eine Atomgewichtsdifferenz 16. In dieselbe Reihe gehören Rubidium und Caesium, wo annähernd die Differenz Rb—Ka und ebenso Cs—Rb $=$ 3 . 16 ist. Solche constante Differenzen, die noch zwischen anderen Elementen wieder-

*) Vgl. zu dem folgenden Lothar Meyer, Die modernen Theorien der Chemie, 2. Aufl., S. 289 f.

kehren, legen die Vermuthung nahe, dass die Atomgewichte in Wahrheit die Bedeutung von Moleculargewichten höherer Ordnung besitzen, und dass also die Verwandtschaft gewisser Elemente auf ähnlichen Uebereinstimmungen in der Gruppirung ihrer Atome beruhe, wie die Verwandtschaft der durch die analytischen Hülfsmittel zerlegbaren Verbindungen. Auf diese Weise erfährt die früher (S. 396) hervorgehobene Analogie zwischen den Radicalen organischer Verbindungen und den Elementen ihre vollständige Umkehrung: die Elemente erscheinen nun analog den Radicalen, und zwar in einer Weise, welche in ihnen Radicale einfacherer Elemente vermuthen lässt.

In der Aufsuchung weiterer Analogien zwischen Elementen und Verbindungen kam vor allem dem Begriff des Atomvolums, welcher dem des Atomgewichts ergänzend zur Seite trat, eine wichtige Rolle zu. Wie wir allgemein durch Vergleichung des Gewichtes eines Körpers mit seinem specifischen Gewicht das Volum desselben bestimmen können, so lässt sich das Atomvolum eines Elementes gewinnen, indem man das Atomgewicht durch das specifische Gewicht dividirt. Da die Atomgewichte nur in Bezug auf ihren relativen Werth festgestellt werden können, so ist das nämliche mit dem Atomvolum der Fall: dasselbe misst das Volum irgend eines Atoms, wenn das Volum eines bestimmten Atoms, z. B. des Wasserstoffatoms, zur Einheit genommen wird. Die Ermittelung des Atomvolums bietet sich nun für die Nachforschung über das Wesen der Atome desshalb als die nächste Aufgabe dar, weil sie in directester Weise die Frage nach der Existenz einer gleichartigen Urmaterie zu beantworten scheint. Bestehen nämlich die Atome der verschiedenen Elemente aus einer und derselben Substanz, so ist es denkbar, dass das Volum der Atome proportional dem Atomgewicht zunimmt. Freilich wird aber nicht umgekehrt geschlossen werden dürfen, dass, wenn die empirische Bestimmung des Atomvolums eine solche Zunahme nicht ergiebt, nun damit auch eine ursprüngliche Verschiedenheit in der elementaren Beschaffenheit der Atome erwiesen sei. Denn welche Annahme man auch über die räumliche Beschaffenheit derselben machen möge, auf keinen Fall darf man hoffen, dass es gelingen werde, das specifische Gewicht der Atome selbst zu bestimmen, ohne Rücksicht auf die zwischen ihnen und zwischen ihren Moleculargruppirungen befindlichen Zwischenräume. Vielmehr wird die für uns messbare Atomdichte im allgemeinen eine Function zweier Grössen sein, des specifischen Gewichtes der Atome selbst und der von den interstitiellen Zwischenräumen abhängigen Substanzverdichtung. Nehmen wir gemäss der Hypothese eines gleichartigen Urstoffes an, dass die erste dieser Grössen constant sei, so wird sich unsere Messung der Atomdichte ausschliesslich auf die durch die Atom- und Molecularinterstitien bedingte Substanzverdichtung beziehen, und es wird demnach auch das Atomvolum voraussichtlich zwar im allgemeinen mit dem Atomgewicht zunehmen, ohne dass jedoch hierbei ein regelmässiges Wachsthum zu erwarten wäre, da jene Substanzverdichtung voraussichtlich in den verschiedenen Elementen

von wechselnder Grösse ist. Höchstens kann man auch hier wieder vermuthen, dass, falls die gewöhnlich angenommenen chemischen Atome zusammengesetzt sind, bei Atomen von analoger Zusammensetzung die Verhältnisse der Substanzverdichtung von übereinstimmender Art sein werden. In der That wird nun die letztere Voraussage durch die Erfahrung bestätigt. Trägt man die Atomgewichte der Elemente successiv auf einer einzigen Abscissenlinie auf, und stellt man die Atomvolumina derselben durch die zugehörigen Ordinaten dar, so wachsen die letzteren keineswegs proportional mit den Abscissen, sondern man erhält durch Verbindung ihrer Endpunkte eine in mehreren aufeinanderfolgenden Wellenlinien auf- und absteigende Curve. Die Elemente von verwandtem chemischem Verhalten entsprechen keineswegs etwa benachbarten Punkten, wohl aber entsprechen sie solchen Punkten in verschiedenen Theilen der Curve, die in Bezug auf den ganzen Verlauf derselben eine übereinstimmende Lage besitzen. So bilden z. B. die leichten Metalle Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium die Maxima der auf einander folgenden Wellencurven, während Kohlenstoff, Silicium, die schweren Metalle, die tief gelegenen Stellen einnehmen. Dort ist also die Substanzverdichtung am kleinsten, hier am grössten im Verhältniss zu dem Atomgewicht oder zu der in dem chemischen Gesammtatom vorauszusetzenden Anzahl von Uratomen. Hält man diese Erfahrung zusammen mit der oben erwähnten Thatsache der regelmässigen Differenzen zwischen den Atomgewichten, so gewinnt die Anschauung mehr und mehr an Boden, dass die chemische Verwandtschaft bestimmter Elemente auf der analogen Gruppirung einfacher Atome in ihnen beruht, und die Hypothese eines gemeinsamen Urstoffs, dem der Wasserstoff als das am einfachsten constituirte chemische Element am nächsten kommt, erscheint als eine zulässige Voraussetzung. Ist aber diese Voraussetzung richtig, so werden dann wiederum die sonstigen physikalischen Eigenschaften der unzerlegbaren Stoffe, wie Aggregatzustand, elektrisches Verhalten, Lichtbrechungsvermögen, in einem gewissen Zusammenhang mit der Verbindungsweise der Uratome und namentlich mit der stattfindenden Substanzverdichtung stehen müssen. In der That ist es möglich gewesen, einige Beziehungen dieser Art insofern nachzuweisen, als auf der das Verhältniss zwischen Atomvolum und Atomgewicht darstellenden Curve den Punkten von entsprechender Lage analoge physikalische Eigenschaften der betreffenden Elemente entsprechen. Nur *eine* physikalische Eigenschaft macht in dieser Hinsicht eine bemerkenswerthe Ausnahme, die specifische Wärme, deren Verhältniss zu dem Atomgewicht, wie wir oben (S. 408) sahen, nach dem Gesetze von *Dulong* und *Petit* ein constantes ist, eine Thatsache, welche darauf hinzuweisen scheint, dass die im gewöhnlichen Sinne angenommenen chemischen Atome die letzten schwingungsfähigen Elemente der Materie sind. Immerhin beweist diese Thatsache nicht, dass jene Atome absolut untheilbar seien, sondern sie bildet im Grunde nur eine physikalische Bestätigung der schon aus den chemischen Erscheinungen

zu erschliessenden ausserordentlich innigen Bindung der Uratome in dem chemischen Atom. Zudem bleibt es möglich, dass die Abweichungen, welche die Atomwärmen verschiedener Elemente bei wechselnden Temperaturen darbieten, aus der mit wachsender Temperatur zunehmenden Betheiligung der Uratome an den Wärmeschwingungen zu erklären sind, wie solches zuerst von Kopp in Bezug auf die Elemente Kohlenstoff, Brom und Silicium, deren Atomwärme in besonders hohem Grade mit der Temperatur schwankt, angenommen worden ist.

Die bisher erörterten Schlüsse sind Analogien von doppelter Art. Theils stützen sie sich auf die äussere Analogie, welche das Verhältniss der Atomgewichte verwandter Elemente mit demjenigen der Moleculargewichte verwandter Verbindungen darbietet; theils beziehen sie sich auf die inneren Analogien zwischen dem sonstigen physikalischen und chemischen Verhalten der Elemente und dem Verhalten der Atomgewichte. Zunächst stellte sich eine Analogie der letzteren Art für die Atomvolumina heraus, welche da, wo die Atomgewichte übereinstimmende Differenzen zeigen, eine übereinstimmende Richtung ihrer Aenderung erkennen lassen; in vollständige Analogie mit den Veränderungen des Atomvolums traten dann wieder andere physikalische Eigenschaften, die ähnlich wie jenes als periodische Functionen der Atomgewichtsgrösse darstellbar sind. Dieses Beweismaterial ist nun schliesslich noch durch eine Analogie ganz anderen Ursprungs verstärkt worden, die bis jetzt für sich allein vielleicht von keiner entscheidenden Bedeutung sein würde, im Verein mit den angeführten Momenten aber immerhin ins Gewicht fällt. Sie besteht darin, dass die Spektra der Elemente beim Uebergang von niedrigeren zu höheren Temperaturen ähnliche Veränderungen zeigen, wie sie die Spektra der Verbindungen unter den nämlichen Verhältnissen darbieten. Da nun die Temperatursteigerung die allgemeinste Bedingung der chemischen Dissociation ist, so erweckt dieses ähnliche Verhalten die Vermuthung, dass auch die Elemente dissociationsfähig, also zusammengesetzt seien*). Einigermassen unterstützt wird eine solche Folgerung durch die Vergleichung der Fixsternspektren, welche zeigt, dass, je wärmer ein Stern, desto einfacher sein Spektrum ist, und dass mit abnehmender Temperatur der Gestirne die metallischen Elemente in der Reihenfolge ihrer Atomgewichte auftreten. Auch die Untersuchung der so genannten planetarischen Nebel tritt für die nämliche Vermuthung ein, da die Spektralanalyse nachweist, dass viele derselben vorwiegend aus einfachen Gasen von niedrigem Atomgewichte, insbesondere aus Wasserstoff und Stickstoff bestehen, eine Thatsache, welche es nahe legt, die Hypothese Kant's über den Ursprung der Planetensysteme

*) J. N. Lockyer, Studien zur Spektralanalyse, deutsche Ausgabe, Leipzip 1879, S. 172, und Compt. rend., t. 92, 1881, p. 904. Uebrigens sind die Schlüsse von Lockyer nicht ohne Widerspruch geblieben. Vgl. hierüber H. W. Vogel in den Sitzungsber. der Berliner Akad., 1882, S. 905.

mit der Voraussetzung einer successiven Entstehung der chemischen Elemente aus einfacheren Uratomen zu verbinden.

Es ist augenfällig, dass alle diese Beweisführungen dem Zweifel ausgesetzt bleiben: die einen wegen der allgemeinen Unsicherheit des Analogieschlusses, die anderen wegen der abweichenden Deutungen, welche die Erscheinungen zulassen. Aber sie verstärken sich durch ihre Verbindung und eröffnen so die Aussicht auf eine Umbildung des chemischen Atombegriffs, welche denselben erst in den Stand setzen wird, in ähnlichem Sinne als Grundlage einer Chemie der Elemente zu dienen, wie die heutige Chemie wesentlich nur eine Chemie der Verbindungen ist. Auch die letztere wird aber aus der Erklärung der Eigenschaften der Elemente wichtige Aufschlüsse gewinnen, da eine tiefere Erfassung des Affinitätsbegriffes durchaus an die Erkenntniss der inneren Beziehungen der chemischen Elemente gebunden ist. In dieser Hinsicht ist namentlich der heute gangbare Valenzbegriff sichtlich nur ein vorübergehender Nothbehelf. Abgesehen von den specifischen Vortheilen, welche die Umgestaltung des chemischen Atombegriffs erwarten lässt, würde aber in logischer Hinsicht als der wichtigste dadurch angebahnte Fortschritt die Uebereinstimmung mit dem physikalischen Atombegriff gelten müssen, weil damit zugleich eine Anpassung an die in Bezug auf den objectiven Substanzbegriff aufzustellenden erkenntnisstheoretischen Forderungen erzielt würde. Denn eine Auffassung des Atoms, welche in diesem irgend welche ursprüngliche qualitative Unterschiede bestehen lässt, ist auf die Dauer schon desshalb unhaltbar, weil sie gegenüber den Resultaten der physikalischen Analyse als ein letzter Rest der naiven Objectivirung unserer Empfindungen erscheint. Wenn, wie die mechanische Physik voraussetzt, die Materie uns nur durch ihre Bewegungen gegeben und daher alle Verschiedenheit der Erscheinungen auf Unterschiede dieser Bewegungen zurückzuführen ist, so liegt darin zugleich die Forderung, die Materie selbst als ein gleichartiges Substrat zu denken, welches erst durch seine mannigfachen Bewegungen und deren Combinationen auch die Stoffunterschiede der Körper bedingt.

## Viertes Capitel.

# Die Logik der Biologie.

## 1. Die biologischen Methoden.

### a. Allgemeine Aufgaben der biologischen Forschung.

Schon der rohesten Beobachtung treten die specifischen Eigenthümlichkeiten der Lebenserscheinungen in so augenfälliger Weise entgegen, dass die Unterscheidung der lebenden von den leblosen Körpern in die ersten Anfänge der Wissenschaft zurückreicht. Die hierdurch bedingte Abzweigung der biologischen Wissenschaften von dem Gesammtgebiet der Naturlehre ist für die Ausbildung der systematischen Theile der ersteren ohne Zweifel förderlich gewesen. Doch mit den wachsenden Kenntnissen der beschreibenden Naturgeschichte konnte die physiologische Erklärung der Lebenserscheinungen nicht gleichen Schritt halten. Bis in den Anfang unseres Jahrhunderts war fast das ganze Material, über welches die Physiologie zu ihren Schlüssen verfügte, der naturgeschichtlichen Forschung entlehnt, da die Anatomie, diese Hauptstütze der Physiologie, ganz und gar im Sinne einer beschreibenden Naturwissenschaft betrieben wurde. Die Versuche Harvey's und seiner Nachfolger über den Blutkreislauf, Haller's und Fontana's über die Sensibilität und Irritabilität der thierischen Theile, Spallanzani's über die Bedingungen der Befruchtung sind fast die einzigen Anfänge experimenteller Untersuchung aus älterer Zeit, die eine bleibende Bedeutung in Anspruch nehmen können. Um so freier erging sich aber die Physiologie in den willkürlichsten Hypothesen. Vitalistische und mechanistische Anschauungen wechselten in bunter Folge. Während jene von vornherein einer Einordnung der Lebenserscheinungen in den allgemeinen Causalzusammenhang der Dinge entsagten, meinten diese die Principien der exactesten physikalischen Disciplin, der Mechanik, hier sofort anwenden zu können. Der Erfolg war in beiden Fällen ein Gebäude von Hypothesen, dem die sichere Basis der Beobachtung mangelte.

Diese Umstände, die in der Schwierigkeit der biologischen Aufgaben begründet sind, machen es begreiflich, dass die Biologie weiter als irgend ein anderer Zweig der Naturforschung zurückgeblieben ist, und dass noch jetzt, obgleich man sich mehr als früher der methodologischen Forderungen bewusst geworden, dennoch der Streit der Hypothesen in ihr eine bedeutsame Rolle spielt. Sogar die Anordnung und die wechselseitige Abhängigkeit der einzelnen Disciplinen beginnt erst allmählich eine logisch correctere Form anzunehmen. Je mehr die Naturgeschichte in ihrer Ausbildung von der Physiologie eingeholt wird, um so energischer erhebt diese den Anspruch, als das Fundament der gesammten Biologie zu gelten. Auf der einen Seite zieht sie die anatomische Untersuchung ganz in ihre Dienste

und verleiht derselben eine erhöhte Fruchtbarkeit durch die Verbindung mit dem physiologischen Experimente; auf der andern Seite reformirt sie die Grundbegriffe der systematischen Naturgeschichte und sucht dem Zusammenhang des Systems ein genetisches Verständniss abzugewinnen. Gleichzeitig aber beginnt man das Gebiet der abnormen Lebenserscheinungen nicht mehr als ein dem normalen Leben fremdartiges zu betrachten. Die Pathologie sucht sich in eine pathologische Physiologie umzuwandeln, indem sie auf Grund physiologischer Thatsachen und Gesetze ein Verständniss der Krankheitsformen und ihres Verlaufs zu gewinnen strebt.

In diesen Betrachtungen über die Entwicklung der biologischen Aufgaben sind die Gesichtspunkte enthalten, nach denen die systematische Gliederung der biologischen Wissenschaften zu beurtheilen ist. Wie die Gesammtheit der Naturwissenschaften auf der Physik, so ruht die biologische Wissenschaft auf der Physiologie als derjenigen Disciplin, welche sich mit der Erklärung der Lebenserscheinungen beschäftigt. Während hier die allgemeine Physiologie die Probleme der Organisation und des Lebens überhaupt zu untersuchen hat, sind die verschiedenen Gebiete der speciellen Physiologie bestrebt, den besonderen Gestaltungen nachzugehen, welche diese Probleme in Folge der Lebens- und Organisationsbedingungen der verschiedenen Classen lebender Geschöpfe annehmen. Mit jenem glücklichen Instinkt, mit welchem so manchmal die Unterscheidungen der Sprache der wissenschaftlichen Zergliederung vorauseilen, wurden von Anfang an Pflanze und Thier als die beiden Hauptobjecte der speciellen Physiologie hingestellt. Die tiefer eindringende Untersuchung hat, so sehr es in Folge der Bemühungen um eine genauere Begriffsbestimmung an Grenzverschiebungen nicht fehlte, doch im ganzen daran nichts zu ändern vermocht. Auch die Annahme von Zwischenwesen zwischen Pflanzen- und Thierreich würde, wenn sie sich sollte rechtfertigen lassen, die Haupteintheilung der speciellen Physiologie in Pflanzen- und Thierphysiologie unberührt lassen, da gerade in Folge ihrer sytematischen Stellung derartige Zwischenwesen durchaus dem Untersuchungsgebiet der allgemeinen Physiologie zugewiesen werden müssten. Dagegen steht nichts im Wege, die beiden Theile der speciellen Physiologie nach theoretischen oder praktischen Rücksichten noch weiter zu gliedern. So nimmt in der That die Thierphysiologie in ihrer heutigen Gestalt vorwiegende Rücksicht auf den Menschen, so dass sie ein Aggregat aus specieller Thierphysiologie und Physiologie des Menschen bildet, zu welchem ausserdem noch einzelne Entlehnungen aus der allgemeinen Physiologie zu kommen pflegen. In weiterem Umfange als, wie in diesem Fall, das praktische Bedürfniss dürfte aber in der Zukunft das theoretische Interesse eine Ablösung speciellerer physiologischer Untersuchungen fordern. Denn nur durch die Erforschung der einzelnen Organisations- und Entwicklungsbedingungen kann die Physiologie den Anspruch, für die Systematik des Pflanzen- und Thierreichs eine erklärende Grundlage zu schaffen, mit Erfolg zur Geltung

bringen, ähnlich wie in der Chemie das System der chemischen Verbindungen sich stützt auf das Studium der chemischen Affinitätswirkungen. In der That hat in diesem Sinne die Entwicklungsgeschichte bereits eine umfassende Verwerthung gefunden. Doch wird die Bedeutung ihres Einflusses, so hoch dieselbe an sich zu stellen ist, bis jetzt noch beeinträchtigt durch die geringen Kenntnisse, die wir von den physiologischen Bedingungen der Entwicklungsvorgänge besitzen.

Während auf diese Weise die Physiologie durch ihre fortgesetzte Specialisirung die systematische Naturgeschichte der Organismen aus sich hervorgehen lässt, führt auf der andern Seite von selbst die normale zur pathologischen Physiologie hinüber, indem die Beeinträchtigung der Lebensfunctionen durch willkürlich gesetzte Störungen überall schon in der normalen Physiologie als eines der wirksamsten Hülfsmittel Verwendung findet. Wie dort zwischen Physiologie und Systematik eine vergleichende Physiologie, so tritt darum hier zwischen Physiologie und Pathologie eine experimentelle Pathologie als vermittelnde Hülfswissenschaft.

### b. Die morphologische Analyse.

Die Anatomie hat sich zwar aus praktischen Ursachen, speciell als Anatomie des Menschen, eine selbständige Stellung errungen. Theoretisch betrachtet ist sie aber keine besondere Wissenschaft, sondern eine mit eigenthümlichen Hülfsmitteln arbeitende physiologische Methode und eine Darstellung der Resultate, die mittelst dieser Methode gewonnen wurden. Zwar scheint sie sich auf den ersten Blick dadurch von der Physiologie zu unterscheiden, dass sie am todten, diese am lebenden Körper ihre Studien macht*). Aber gerade dies ist nur ein Unterschied der Methode, und ein solcher, der nicht einmal überall vorhält. Es giebt eben physiologische Thatsachen, die sich auch noch an der Leiche feststellen lassen; sie sind es, welche die Anatomie mit den ihr verfügbaren Methoden untersucht. Aber im einzelnen findet diese Regel mannigfache Ausnahmen. Wo wir Grund haben anzunehmen, dass unmittelbar nach dem Tode erhebliche Veränderungen eintreten, wie bei der Elementarstructur jugendlicher Zellen, der Nervenfasern u. dergl., da verlangt auch der Anatom, dass die Theile während des Lebens untersucht werden. Er gestattet sich also die Untersuchung des todten Organismus nur insoweit, als die Voraussetzung erlaubt ist, dass an demselben keine durch die anatomischen Methoden nachweisbaren Structurveränderungen in Folge des Todes eingetreten sind.

Es giebt nur ein Merkmal, welches klar und scharf die Anatomie von den übrigen Gebieten der Physiologie trennt. Dasselbe liegt darin, dass sich die Anatomie nur mit jenen Eigenschaften und Vorgängen beschäftigt, welche in der Form der lebenden Wesen und ihrer Theile zum

*) Vgl. Cohnheim, Vorlesungen über allgem. Pathologie, 2. Aufl., I, S. 8 f.

Ausdruck kommen. Aber auch dies beruht bloss auf einem Unterschied der Methode. Denn es ist begreiflich, dass die Untersuchung der Formverhältnisse eigenthümliche Methoden verlangt, die z. B. von den zur Untersuchung der Stoffbestandtheile, der mechanischen, thermischen, elektrischen Eigenschaften benützten Methoden wesentlich verschieden sind. Die Form ist desshalb kein von diesen andern Eigenschaften isolirtes oder wenigstens auf die Dauer zu isolirendes Object. Vielmehr wird ein Verständniss der Formen schliesslich nur durch die Berücksichtigung aller andern physiologischen Factoren zu gewinnen sein. In der That ist dieser Standpunkt der Betrachtung in der Pflanzenphysiologie bereits allgemein zur Anwendung gelangt. Nur in der animalischen Physiologie fristet der Gedanke einer Morphologie, die es mit eigenthümlichen, allen sonstigen physiologischen Erscheinungen fremdartig gegenüberstehenden Gestaltungsgesetzen der thierischen Körper zu thun habe, noch immer sein Dasein. Er ist hier als ein Rest jener Verwechslung ästhetisirender Naturbetrachtung mit wirklicher Naturerklärung zurückgeblieben, welche als eine Nachwirkung der Schelling'schen Naturphilosophie in der systematischen Naturgeschichte lange noch einen bedeutsamen und während einer gewissen Zeit in mancher Beziehung fruchtbaren Einfluss ausgeübt hat*).

Schon bei der anatomischen Methode kommt nun sofort eine Eigenthümlichkeit der biologischen Methodik zur Geltung, die in der Schwierigkeit und Verwicklung der Probleme ihren nahe liegenden Grund hat. Sie besteht in dem grossen Uebergewicht des analytischen Elementes. In dieser Beziehung steht der gegenwärtige Zustand der Biologie noch um eine Stufe zurück hinter demjenigen der chemischen Forschung. In der Biologie geht die Untersuchung fast völlig auf in einer Analyse der Erscheinungen. Innerhalb dieser nimmt die anatomische oder morphologische Analyse die erste Stelle ein, nicht nur weil sie am frühesten und unmittelbarsten sich darbietet, sondern auch weil ohne sie ein fruchtbarer Uebergang zu den andern Methoden nicht zu gewinnen ist. Die morphologische Analyse zerfällt aber wieder in verschiedene Stadien. Nach den Hülfsmitteln, mit denen sie operirt, lassen sich deren drei unterscheiden. Das erste besteht in der Zerlegung des zusammengesetzten Organismus in seine Organe und Gewebe. Es erledigt diejenigen Aufgaben, die man, weil sie sich zumeist ohne die Hülfe des Mikroskops erledigen lassen, häufig der »gröberen Anatomie« zurechnet; wir ziehen es vor, die hierher gehörigen Methoden, weil sie durchgängig mechanischer Art sind, als die der mechanischen Morphologie zu bezeichnen. Das zweite Stadium sucht, an das erste anknüpfend, die Organe und Gewebe in ihre Form-

*) Es sei hier erinnert auf botanischem Gebiet an die morphologischen Arbeiten von C. Schimper und Alex. Braun, und an die grossentheils der thierischen Morphologie gewidmeten Betrachtungen von H. G. Bronn in seinen „Morphologischen Studien“. Vgl. Abschn. I, S. 48 f.

elemente zu zerlegen. Es bedarf dazu des Mikroskops und seiner Hülfsapparate und mag daher das Stadium der optischen Morphologie genannt werden. Endlich das dritte begnügt sich nicht mit einer Analyse der vorhandenen Formelemente, sondern es sucht auf die letzteren durch physikalische und chemische Hülfsmittel verändernd einzuwirken, um über ihre functionelle Bedeutung Aufschluss zu gewinnen: das Stadium der experimentellen Morphologie. Man darf sich nun aber nicht vorstellen, dass diese Stadien strenge von einander zu sondern seien. Vielmehr finden sich im einzelnen mannigfache Abweichungen von jener regelmässigen Reihenfolge. Einerseits sehen sich die früheren Stadien genöthigt, gelegentlich die Hülfsmittel der späteren zu ihren Zwecken herbeizuziehen; und anderseits werden die Hülfsmittel und Resultate der früheren in die späteren hinübergenommen. So gewinnen mechanische Gesichtspunkte eine grosse Bedeutung in der optischen Morphologie, und die Hülfsmittel der letzteren bilden fortan einen integrirenden Bestandtheil der experimentellen morphologischen Untersuchung.

Sehen wir ab von diesen Uebergängen und Wechselwirkungen, so ist der mechanischen Morphologie in der Untersuchung der Lage- und Formverhältnisse der unmittelbar sinnlich wahrnehmbaren Organe und Gewebe ihr Arbeitsgebiet klar vorgezeichnet. Sie hat keineswegs eine blosse Beschreibung der Theile zu geben, wie dies in der älteren Anatomie durchgängig geschah, sondern, so weit sie es mit ihren Hülfsmitteln vermag, hat sie in die Bedingungen der Formeigenthümlichkeiten einzudringen, die sich ihr durch die anatomische Zergliederung erschliessen. Eine Beschreibung des Scelets, welche auf die Wachsthumsbedingungen und die mechanische Bedeutung der Knochenformen keine Rücksicht nimmt, eine Untersuchung des Muskelsystems, welche den Zusammenhang der Elasticität, Form und Anordnung der Muskeln mit ihrer Function mit Stillschweigen übergeht, eine Darstellung der Kreislaufsorgane, die von den hydraulischen Principien, welche ein Verständniss derselben erschliessen können, nichts zu sagen weiss, — eine Anatomie dieser Art würde eine Wissenschaft sein, aus welcher der Geist der Wissenschaft verschwunden wäre. Es liegt in der Natur der anatomischen Probleme, die mit denjenigen der praktischen Mechanik die grösste Verwandtschaft besitzen, dass sie wie diese bei ihren Untersuchungen zunächst von teleologischen Principien geleitet wird*). Der nächste Standpunkt der mechanischen Morphologie ist immer der, dass sie in dem Organismus einen natürlichen Mechanismus sieht, dessen Einrichtungen sie mit Rücksicht auf seine Leistungen zergliedert. Aber es ereignet sich von selbst im Verlaufe dieser Untersuchung, dass sich die teleologische in die causale Betrachtung umkehrt. Indem der Organismus bestimmte mechanische Leistungen verrichtet, sind die Organe, die

*) Vgl. hierzu die allgemeinen Erörterungen über das Zweckprincip, Bd. I, S. 577 f.

sich daran betheiligen, selbst mechanischen Bedingungen unterworfen, die zu einem grossen Theil in der Function ihre Quelle haben und verstärkend auf die Leistungsfähigkeit der Organe zurückwirken. Die Anordnung der absorbirenden und saftführenden Zellen in der Pflanze ist in eminentem Sinne zweckmässig für die Mechanik des Stoffaustausches, und diese letztere erzeugt wieder Wachsthumsbedingungen, welche die Zweckmässigkeit der Structur befestigen und vergrössern. Die Gelenkenden der Knochen sind vortreffliche Hülfsmittel für die Mechanik der thierischen Bewegungen, diese Bewegungen aber verleihen ihrerseits den Gelenken die zur Function günstigste Beschaffenheit, indem die in Contact tretenden Flächen sich abschleifen, der Muskelzug die Angriffsstellen der bewegenden Kräfte zweckmässig gestaltet, und schliesslich der mechanische Druck selbst auf die Ernährung in solcher Weise zurückwirkt, dass die Ablagerung der Knochenmasse den mechanischen Bedingungen sich anpasst*). Je mehr die Untersuchung fortschreitet, um so mehr gewinnt diese causale über die anfängliche bloss teleologische Analyse das Uebergewicht, und, so ferne dieses Ziel auch noch sein mag, so lässt es sich doch unschwer voraussagen, dass erst dann die mechanische Morphologie ihre Aufgaben als wirklich erfüllt ansehen kann, wenn ihr eine Auffassung der Formen gelungen ist, in welcher sich causale und teleologische Erklärung vereinigen. Es zeigt sich nun aber an vielen Orten, dass die mechanischen Hülfsmittel zur Lösung der Probleme nicht ausreichen, sondern dass die mechanische zur optischen Morphologie ihre Zuflucht nehmen muss.

Nach ihrem logischen Charakter ist die mikroskopische Erforschung der Gewebe und Organe eine blosse Fortsetzung der mechanischen Untersuchung. In nicht anderer Weise als diese sucht auch jene die Organismen in die durch ihre äussere Form unterscheidbaren Bestandtheile zu zerlegen. Aber durch die Herbeiziehung optischer Werkzeuge gelingt es ihr, was für das blosse Auge homogen erscheint in weitere Bestandtheile zu trennen; dadurch erhebt sie sich zu der Untersuchung der Formelemente und ihrer Beziehungen, bei der sie übrigens selbstverständlich die Hülfsmittel der mechanischen Zerlegung mit verwendet, indem sie nur, der Feinheit ihrer Objecte entsprechend, durchgehends einer feineren Technik bedarf. Theils aber weil diese Technik immer noch verhältnissmässig roh ist den zarten und leicht zerstörbaren mikroskopischen Objecten gegenüber, theils weil die optische Zergliederung es mit sich bringt, dass für sie nur solche Formbestandtheile unterscheidbar sind, die verschiedenes Lichtbrechungsvermögen besitzen, sieht sich die optische Morphologie genöthigt, zahlreiche weitere Hülfsmittel herbeizuziehen, die irgendwie verändernd auf die untersuchten Gewebe und Formelemente einwirken und dadurch Gegenstände zur Anschauung bringen, die sonst der-

*) Vgl. G. H. Meyer, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes. Leipzig 1873.

selben mehr oder minder entgehen würden. Hierher gehören die zahlreichen Härtungs- und Färbungsmethoden, von denen die ersteren hauptsächlich dazu bestimmt sind, den Lagezusammenhang der Elemente weicher Gewebe sichtbar zu machen, während die letzteren Unterschiede von Geweben oder Formelementen hervorbringen oder verstärken sollen, daher diese Färbungsmittel besonders dann sich nützlich erweisen, wenn sie in Folge chemischer Einwirkungen nur mit einzelnen Bestandtheilen sich verbinden, andere aber unverändert lassen. Je mehr es fast ausschliesslich das Glück des Zufalls ist, welches den Mikroskopiker bei der Wahl solcher Mittel leitet, um so reicher ist der Vorrath möglicher Hülfsquellen, und um so leichter erscheint es denkbar, dass auf diesem Wege trotz der unzähligen Versuche, die schon gemacht sind, auch in der Zukunft noch manches erreichbar sei. Viel wichtiger aber als eine Vermehrung dieser secundären Hülfsmittel würde es sein, wenn die Leistungsfähigkeit des Mikroskops selber erheblich vergrössert würde. Denn gewiss mit Recht hat man bemerkt, dass die Entdeckungen der mikroskopischen Anatomie in erster Linie den Optikern zu verdanken sind*). In der That, wie die Einführung des zusammengesetzten Mikroskops in das Arbeitszimmer des Biologen unmittelbar gefolgt war von der Entdeckung der Formelemente des Pflanzen- und Thierkörpers, so ist in der neuesten Zeit die Auffindung einer feineren Structur dieser Formelemente eine unmittelbare Rückwirkung der Einführung der Linsenimmersion mit ihrer stärkeren und lichtreicheren Vergrösserung gewesen. Sollte daher die Voraussage richtig sein, dass aus theoretischen Gründen die jetzt erreichte Grenze der Vergrösserung nicht mehr überschritten werden könne, so würde damit zweifelsohne im grossen und ganzen durch das bisher Erreichte überhaupt die Grenze der morphologischen Analyse bezeichnet sein**). Aber da seit dieser Voraussage immerhin auf einem bei ihr nicht berücksichtigten Wege, durch Verbesserung der Beleuchtungsapparate und durch die Wahl des Oels als Immersionsflüssigkeit, abermals ein nicht unwesentlicher Fortschritt in der Leistungsfähigkeit der Mikroskope geschehen ist, so bleibt wohl die Hoffnung, dass auch in der Zukunft noch Fortschritte geschehen können, die wir jetzt nicht voraussehen. Eine bedeutsame Hülfe entsteht der unmittelbaren optischen Zergliederung ausserdem nicht selten durch die Herbeiziehung von Polarisationsinstrumenten, welche theils über krystallinische Structuren der mikroskopischen Objecte, theils über ungleiche Spannungsverhältnisse der festen Gewebe Aufschluss geben können, wobei freilich die Beobachtung häufig zwischen diesen beiden Deutungen die Wahl lässt***).

So wenig wie die mechanische kann sich nun aber die optische

---

*) Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung. Leipzig 1882, S. 9.

**) Helmholtz, Poggendorff's Annalen, Jubelband, 1874, S. 557.

***) Vgl. Naegeli und Schwendener, Das Mikroskop. Leipzig 1867, S. 307 f.

Morphologie auf eine blosse Beschreibung des Gesehenen beschränken. Vielmehr wird sie von selbst dazu gedrängt, über die mechanischen Bedingungen Rechenschaft abzulegen, denen die einzelnen Formelemente eines Gewebes vermöge ihrer Wechselwirkungen ausgesetzt sind. Bei zahlreichen pflanzlichen und thierischen Geweben genügt ein Blick in das Mikroskop, um dem Beobachter die Ueberzeugung zu geben, dass die Form der Elemente wesentlich durch die Art ihrer Coexistenz bestimmt wird. Bei der Pflanze nehmen dadurch die Grenzlinien der Zellwände und ihrer Complexe nicht selten geometrisch regelmässige Formen an, die unmittelbar Rückschlüsse auf die mechanischen Wachsthumsbedingungen gestatten*). In thierischen Geweben sind die Verhältnisse durchweg complicirter. Nichts desto weniger begegnen uns auch hier, wie z. B. in den Epithelial- und Drüsengeweben, gewisse regelmässige Anordnungen; jedenfalls aber wird das Problem dadurch nicht aufgehoben, dass es in diesem Fall grösseren Schwierigkeiten begegnet. Alle derartigen Untersuchungen über die wechselseitige Formbestimmung der morphologischen Elemente müssen jedoch gewisse Fundamentalbedingungen als gegeben hinnehmen, weil deren causale Verfolgung der mikroskopischen Zergliederung als solcher verschlossen bleibt. Diese Bedingungen bestehen vor allem in der ungleichen Wachsthumsgeschwindigkeit der verschiedenen Elemente und Elementencomplexe. Ueber die Ursachen der letzteren lassen sich nicht oder doch nur zum allergeringsten Theil durch die blosse Beobachtung Aufschlüsse gewinnen. Hier muss sich daher die mikroskopische Untersuchung mit den andern biologischen Methoden verbinden; insbesondere verspricht für dieses wie für manche ähnliche Probleme die directe Combination der mikroskopischen Beobachtung mit der experimentellen Einwirkung fruchtbringend zu werden.

Die Methoden der aus einer solchen Combination hervorgehenden experimentellen Morphologie bilden nun, diesem gemischten Ursprung gemäss, nicht eigentlich selbständige Verfahrungsweisen, sondern sie sind Verbindungen der mikroskopischen Beobachtung mit verschiedenen Formen des physiologischen Experimentes. Dabei werden aber dem letzteren durch die Verhältnisse der mikroskopischen Beobachtung gewisse Schranken auferlegt, welche dieser Art des Experimentes immerhin eine eigenthümliche Stellung sichern. Vor allem sind zwei Bedingungen für dasselbe charakteristisch. Erstens kann es sich nur auf solche Vorgänge beziehen, die an den mikroskopischen Elementen isolirt zur Erscheinung kommen, und zweitens ist es im allgemeinen nicht möglich, die Elemente, deren experimentelle Beeinflussung beabsichtigt wird, allein zu verändern, sondern man muss die Einwirkungen auf das ganze Object ausdehnen, welchem die Elemente angehören. Beide Bedingungen stehen mit einander und zugleich mit den schwierigen, nur in entfernter Annäherung erreichbaren Aufgaben

*) J. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie. Leipzig 1882, S. 531. S. Schwendener, Monatsberichte der Berliner Akad., April 1880.

der experimentellen Morphologie im Zusammenhang. Diese bezweckt ja schliesslich nichts anderes als eine experimentelle Untersuchung der elementaren Lebensprocesse. Es ist bis jetzt nur möglich, die letzteren zu verfolgen, insoweit sie sich in unmittelbaren Veränderungen des mikroskopischen Bildes oder allenfalls noch derjenigen Eigenschaften zu erkennen geben, die sich der Untersuchung mit dem polarisirten Lichtstrahl verrathen; alle sonstigen physikalischen und chemischen Veränderungen bleiben ausgeschlossen. Der specifische Unterschied dieser Experimente von den an grössern Organen oder am ganzen Pflanzen- und Thierorganismus auszuführenden besteht daher darin, dass das Wesen der letzteren Versuche immer in der ausschliesslichen oder vorwiegenden Einwirkung auf einzelne Theile besteht, wobei die übrigen möglichst unverändert bleiben, während das mikroskopische Experiment eine solche Isolirung nur in sehr unvollkommener Weise vornehmen kann. Dadurch beschränken sich aber wesentlich die Aufgaben dieser sonst so aussichtsreichen Untersuchungen. Das hauptsächlichste Gebiet derselben bleiben bis jetzt die elementaren Bewegungsvorgänge, wie Protoplasma-, Wimper- und Muskelbewegungen, letztere namentlich mit Rücksicht auf die etwaigen Veränderungen der doppelbrechenden Muskelelemente. Daran schliesst sich das Studium der capillaren Kreislaufserscheinungen und der in das pathologische Gebiet der Entzündungs- und Exsudationsprocesse herüberreichenden Effecte von experimentellen Einwirkungen auf dieselben. Auch die Regenerations-, Befruchtungs- und Entwicklungsvorgänge haben bis zu einem gewissen Grade bereits begonnen, Objecte der experimentellen Morphologie zu werden. Gegenüber diesem Umfang wachsender Aufgaben ist das Inventar experimenteller Hülfsmittel leider ein sehr beschränktes: die Wärme, chemische Einwirkungen und der elektrische Strom, sie alle im Verhältniss zur Zartheit der Objecte in ziemlich roher Form der Anwendung, bilden neben dem Polarisationsapparat und der gelegentlichen mechanischen Einwirkung die einzigen Hülfsmittel, über welche der Mikroskopiker bei seinen Versuchen gebietet.

### c. Die physiologisch-chemische Untersuchung.

An die Untersuchung der Formbestandtheile schliesst sich diejenige der Stoffbestandtheile am unmittelbarsten an. Die Physiologie verwendet hier keine ihr eigenthümlichen Methoden, sondern sie entlehnt dieselben der Chemie, aber sie bedient sich ihrer allerdings unter wesentlich andern Gesichtspunkten. Die Eigenschaften der organischen Stoffbestandtheile sind für sie nur insofern von Interesse, als sie auf die Lebenseigenschaften der Organismen, ihrer Gewebe und Organe Licht werfen. Da nun an und für sich sowohl die Eigenschaften einer chemischen Verbindung wie ihre Entstehungsbedingungen in der rationellen Zusammensetzung derselben ihren Ausdruck finden müssen, so ist die Kenntniss der Constitution der

organischen Stoffe auch für die Physiologie von unschätzbarem Werthe, und nicht minder lassen sich reiche Aufschlüsse über die chemischen Vorgänge im Thierkörper erwarten, wenn es gelingt, dessen Stoffverbindungen auf synthetischem Wege aus den Elementen oder aus einfacheren Verbindungen herzustellen. Leider aber ist die chemische Analyse und Synthese noch weit von diesem Ziele entfernt. Gerade von den physiologisch wichtigsten Stoffen, den Eiweisskörpern und ihren Verwandten, kennen wir mit Sicherheit nur die elementare Zusammensetzung; auch die für die Lebensfunctionen so wichtigen pflanzlichen und thierischen Farbstoffe, wie das Chlorophyll und Hämoglobin, sind uns noch gänzlich dunkel in Bezug auf ihre Constitution. Dem entsprechend ist man zwar im allgemeinen im Stande, die einfacheren organischen Stoffe, welche die Bestandtheile thierischer und pflanzlicher Excrete zu bilden pflegen, auch auf künstlichem Wege durch Oxydation und Spaltung zu erzeugen. Für die zusammengesetzteren Gewebsbestandtheile aber sind bis jetzt nur die Organismen selbst, namentlich die Pflanzen, als Erzeugungsstätten bekannt. Dieser Umstand hat die Folge mit sich geführt, dass die chemischen Processe im Thierkörper unserem Verständnisse zugänglicher sind als diejenigen in der Pflanze.

Da die Untersuchung der chemischen Stoffbestandtheile für die Physiologie nur das Mittel bildet, um zu einem Verständniss der chemischen Lebenserscheinungen zu gelangen, so verwendet sie neben der chemischen Analyse hauptsächlich noch zwei Methoden: 1) die vergleichende Beobachtung der die chemischen Processe begleitenden morphologischen Vorgänge, und 2) die Nachbildung der physiologisch-chemischen Processe ausserhalb des Organismus. Bei allen den synthetischen Processen im Pflanzen- und Thierkörper, deren künstliche Nacherzeugung unmöglich ist, wie der Bildung des Amylons, der Cellulose, des Chlorophylls, der Eiweissstoffe in der Pflanze, oder der Rückbildung des Verdauungseiweisses in genuines Eiweiss, der Bildung von Hämoglobin, Protoplasma- und Kernsubstanzen der Zellen im Thierkörper, sind wir auf die erste dieser Methoden angewiesen. Hier ist es besonders die Pflanzenphysiologie, in der auf das glücklichste die mikroskopische Beobachtung der chemischen Analyse zu Hülfe gekommen ist, indem es ihr gelang, die Succession des Auftretens der einzelnen Zellbestandtheile mit einiger Sicherheit zu ermitteln*). Zurückgeblieben ist in dieser Beziehung die animalische Physiologie, wohl desshalb, weil sich hier einige der wichtigsten Stoffbildungsvorgänge, wie die Regeneration des genuinen Eiweisses, der morphologischen Untersuchung entziehen; nur über die Bildung der Blutbestandtheile besitzen wir manche, aber chemisch noch schwer zu deutende Beobachtungen. Uebrigens ist es ein Nachtheil dieser Methode, dass sie uns immer nur über die äussere Succession der Erscheinungen Auskunft giebt, und dass daher die eigentlich chemische Seite des

*) Vgl. Jul. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, S. 357 f. Pfeffer, Pflanzenphysiologie, I, S. 266 f.

Vorgangs der Hypothese überlassen bleibt, welche letztere natürlich um so unsicherer ist, je weniger wir von der wahren Constitution der in Frage kommenden Verbindungen unterrichtet sind. Hier ist daher die Methode der Nachbildung der Processe ausserhalb des Organismus ungleich fruchtbarer; ihr Nachtheil besteht nur darin, dass sie im allgemeinen bloss auf die organischen Zersetzungsprocesse, und auch auf diese nicht in allen Fällen, anwendbar ist. So können wir zwar durch künstliche Verdauungsgemische und auf noch andern Wegen Eiweisskörper in Peptone, durch Fermente die complexeren Kohlehydrate in einfachere umwandeln, wir vermögen ferner die meisten thierischen Excretionsstoffe künstlich aus Gewebebildnern durch die Einwirkung von Oxydationsmitteln zu erzeugen, aber im letzteren Falle weichen die Producte quantitativ und zum Theil qualitativ sehr erheblich von denjenigen ab, welche bei der natürlichen Oxydadation im thierischen Körper selbst entstehen. Die hypothetische Reconstruction der physiologisch-chemischen Processe bleibt also auch hier nicht erspart, und die künstliche Nachbildung der Producte vermittelt höchstens eine gewisse chemische Controle der Hypothesen, die leider zumeist noch der zureichenden Verification entbehren.

### d. Die physiologisch-physikalische Untersuchung.

Wie die chemische Untersuchung der Lebenserscheinungen der Chemie, so entlehnt die physikalische der Physik ihre fundamentalen Methoden. Auch hier gliedert sich die Untersuchung in eine Analyse der Eigenschaften und in eine solche der Vorgänge. Wir untersuchen, um die Leistungsfähigkeit der einzelnen Organe und Gewebe zu würdigen, die Elasticität und Cohäsion der Knochen und Muskeln, die osmotischen Eigenschaften pflanzlicher und thierischer Membranen, die Wärmeverhältnisse der verschiedenen Organe, die elektrischen Eigenschaften bestimmter Gewebe. Manche dieser Untersuchungen, wie die der Elasticität und Cohäsion, berühren sich mit den Aufgaben der mechanischen Morphologie, andere, wie die der optischen Eigenschaften, werden, von der Prüfung der brechenden Medien des Auges abgesehen, fast ganz von der optischen Morphologie in Anspruch genommen. Ueberall da bleibt aber die Untersuchung der physikalischen Eigenschaften der specifisch physikalischen Untersuchung vorbehalten, wo dieselbe nur die Vorbereitung bilden soll für die Erforschung der Veränderungen, welche die Theile bei ihrer Function erfahren. In diesem Sinne prüfen wir zunächst die elastischen Eigenschaften des Muskels im Ruhezustand, um dann die Veränderungen derselben während seiner Contraction zu ermitteln, oder wir vergleichen die elektrischen Eigenschaften der Nerven und Muskeln vor und während der Reizung. Aehnlich bildet die thermische Untersuchung der Theile in ihrem gewöhnlichen normalen Zustand die Vorbereitung, um die mannigfachen Abweichungen davon in

Folge bestimmter innerer Vorgänge oder äusserer Einwirkungen messend zu verfolgen.

Auch die physikalische Untersuchung versucht es, wo irgend möglich, die physikalischen Processe, die im lebenden Körper zur Beobachtung kommen, ausserhalb desselben nachzubilden, um sie auf diese Weise vollständiger in ihren Entstehungsbedingungen zu erforschen. Aber diese Nachbildung gelingt noch viel schwieriger als die der chemischen Processe. Denn gerade die physikalische Seite der Lebensvorgänge ist nicht nur an jene zusammengesetzten organischen Stoffe gebunden, deren synthetische Erzeugung ausserhalb des Pflanzen- und Thierkörpers bis jetzt nicht gelang, sondern sie hängt sogar von bestimmten physiologischen Eigenschaften der Stoffe ab, welche ausserhalb des lebenden Organismus unwiederbringlich verloren gehen. Dadurch ist das Gebiet der synthetischen Untersuchungen der physiologischen Physik ausserordentlich eng umgrenzt. Es beschränkt sich fast ganz auf einige Fälle, in denen die dem todten Körper entnommenen Gewebe noch sich zu Versuchen verwerthen lassen, aus denen auf die physiologischen Processe, an denen jene Gewebe betheiligt sind, Rückschlüsse gemacht werden können. Ein wichtiges Gebiet dieser Art bilden die osmotischen Versuche. Hier werden pflanzliche und thierische Membranen oder andere poröse Scheidewände benützt, um über die allgemeinen Gesetze der unter ähnlichen Bedingungen jedenfalls auch innerhalb des Organismus stattfindenden Diffusion von Flüssigkeiten oder Gasen durch feuchte Membranen Aufschluss zu gewinnen. Ein anderes Gebiet bilden die calorimetrischen Versuche der Physiologie, die den Zweck verfolgen, aus der Verbrennungswärme der Nahrungs- und Gewebsbestandtheile auf den Werth, den diese für die Wärmebildung und Arbeitserzeugung innerhalb des lebenden Körpers besitzen, zurückschliessen zu lassen. In noch andern Fällen, in denen eine solche directe Synthese organischer Processe ausserhalb des Organismus nicht möglich ist, versucht man unter Umständen eine schematische Nachbildung, indem man von der Voraussetzung ausgeht, dass ähnlichen Wirkungen auch ähnliche Ursachen entsprechen werden. Man construirt z. B. durch Verlöthung von Kupfer- und Zinkstücken Elemente, die, in eine leitende Flüssigkeit getaucht, Effecte hervorbringen, die den Nerven- und Muskelströmen ähnlich sind*). Oder man erzielt an einer vom Strom durchflossenen Ampère'schen Drahtspirale Verkürzungen, die den Muskelcontractionen zu gleichen scheinen**). Versuche dieser Art können ebenso gefährlich wie nützlich sein. Die logische Regel, dass zwar mit dem Grund die Folge, keineswegs aber mit der Folge der Grund gegeben ist, darf bei ihnen nicht übersehen werden. Die Verkürzung eines Körpers kann selbstverständlich noch auf sehr vielen andern

*) E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Elektricität, I, S. 577 f.

**) Wundt, Lehre von der Muskelbewegung, S. 167.

Wegen zu Stande kommen als durch einen Strom, der ähnlich wie in einer Ampère'schen Spirale fliesst. Der schematische Versuch erreicht also höchstens dies, dass er die allgemeine Möglichkeit einer Hypothese beweist; die Verification der letzteren muss aber auf anderen Wegen gesucht werden. Hierzu, wie zu vielen andern Zwecken, pflegt sich der physikalische Versuch vornehmlich mit der specifisch physiologischen Form des Experimentes, mit der Vivisection, zu verbinden.

### e. Die physiologische und pathologische Functionsanalyse.

Die Hülfsmittel der morphologischen, chemischen und physikalischen Untersuchung reichen, so unerlässlich sie sind, doch für sich allein niemals zu, um vollständigen Aufschluss über die Functionen des lebenden Organismus und seiner Theile zu geben, sondern sie müssen zu diesem Zweck durch eine experimentelle Analyse der Functionen ergänzt werden. Unter dieser verstehen wir aber jeden willkürlichen Eingriff in die Lebensvorgänge, welcher nachweisbare Veränderungen derselben herbeiführt. In den meisten Fällen bringt es ein solcher Eingriff mit sich, dass der Zusammenhang der Theile durch mechanische Gewalt verändert werden muss, indem man bald einzelne Organe völlig eliminirt, bald sie irgend welchen instrumentellen Einwirkungen zugänglich macht. Das häufigste und unerlässlichste Hülfsmittel der Functionsanalyse ist daher die Vivisection, aber sie ist keineswegs das einzige, da zu ähnlichen Zwecken auch Einwirkungen auf den ganzen Organismus oder dessen einzelne Organe vorkommen können, bei denen keine Zergliederung desselben stattfindet.

Die physiologische Functionsanalyse kann entweder von der Frage nach der Function gewisser Organe oder Organcomplexe oder aber von der Frage nach der Wirkung bestimmter äusserer Agentien auf den Organismus oder einzelne Theile desselben ausgehen. Die erste dieser Fragen ist die nächstliegende und kommt bei der Untersuchung der normalen Lebensvorgänge vorwiegend zur Anwendung; wir wollen die von ihr ausgehenden Methoden als die der directen Funtionsanalyse bezeichnen. Die zweite Frage erhebt sich vorzugsweise in solchen Fällen, wo die functionellen Erscheinungen im allgemeinen bereits bekannt sind, und wo die Veränderungen derselben unter bestimmten ungewöhnlichen Einwirkungen erforscht werden sollen. Die von ihr ausgehenden Methoden, die wir als die Influenzmethoden bezeichnen wollen, dienen theils zur näheren Untersuchung bestimmter normaler Lebenseinflüsse mittelst der Abänderung der letzteren, theils bilden sie, unter Zuhülfenahme abnormer Einwirkungen, das hauptsächlichste Inventar der experimentellen Pathologie. Uebrigens ist es selbstverständlich, dass beide Methoden nur an ihren Ausgangspunkten sich unterscheiden, in der Durchführung aber fortwährend in einander eingreifen.

Die directe Functionsanalyse benützt zwei Fundamental-

methoden, die meistens nach oder neben einander zur Anwendung kommen, wenn nicht aus bestimmten Gründen die eine von ihnen unmöglich wird. Sie lassen sich als specielle Fälle der allgemeinen Methoden der Elimination und der Gradation der Bedingungen betrachten (S. 289). Die erste besteht in der Functionsaufhebung, die zweite in der quantitativen Functionsveränderung. Eine Functionsaufhebung wird bald durch die völlige Entfernung eines Organes, bald durch die Lösung seiner functionellen Verbindungen bewirkt. Es ist besonders der Anfang der Functionsanalyse, bei dem es sich zunächst nur um die Feststellung der allgemeinen physiologischen Function bestimmter Organe handelt, welcher diese Hülfsmittel verwendet. So hat die Pflanzenphysiologie die Wege der Saftströmung in den dicotylen Holzpflanzen durch die Beobachtung des Einflusses, welchen Partialdurchschneidungen des Stengels auf die Ernährung der einzelnen Theile ausüben, zu ermitteln gesucht. Die animalische Physiologie hat zur Bestimmung der Functionen der Nervenwurzeln, der Nervenfasern des Rückenmarks, der einzelnen Theile des Gehirns Durchschneidungs- und Exstirpationsversuche angewandt. Ebenso sind einzelne Drüsen, wie die Milz, bei niederen Thieren die Leber, zum Behuf der Feststellung ihrer physiologischen Bedeutung ganz aus dem Körper entfernt worden. Eine weit mannigfaltigere Anwendung lassen die Methoden der quantitativen Functionsänderung zu. In den einfachsten Fällen bedient man sich ihrer zum Behuf der Bestätigung der auf dem Weg der Aufhebung der Function gewonnenen Resultate. Hier verlangt dann der Gegensatz, dass die Aenderung in einer Steigerung der Function bestehe. Dahin gehören namentlich die qualitativen Reizversuche der animalischen Nervenphysiologie. Bei Reizung einer Nervenwurzel z. B. müssen die eintretenden Schmerzäusserungen oder Muskelcontractionen den bei der Durchschneidung beobachteten Ausfallserscheinungen entsprechen. Complicirtere Aufgaben für diese Methode ergeben sich, wenn die allgemeine Beschaffenheit der Function ermittelt ist und es sich nun darum handelt, dieselbe in Bezug auf ihre einzelnen Bedingungen näher zu verfolgen. Hier wird es erforderlich, die Veränderungen zu bestimmen, denen die Functionen in Folge bestimmter äusserer Einwirkungen unterworfen sind, und diese Veränderungen messend unter steter Vergleichung mit der quantitativen Abstufung der äusseren Einwirkungen selbst zu prüfen. Da nun die letzteren stets physikalischer und chemischer Art sind, so sieht sich die Functionsänderung in der Regel genöthigt, die physikalisch- und chemisch-physiologische Untersuchung zu ihrer Hülfe herbeizuziehen. So untersucht die Pflanzenphysiologie die vegetabilischen Ernährungsvorgänge, indem sie in willkürlicher Weise die chemische Beschaffenheit der die Wurzel umgebenden Ernährungsflüssigkeiten oder der umgebenden Luft verändert und nun theils das Wachsthum der Pflanze, theils die Beschaffenheit ihrer Stoffwechselproducte quantitativ ermittelt. So untersucht man ferner seit den berühmten Versuchen von Knight den Einfluss der Schwere auf das Wachsthum der

Pflanzen, indem man theils dieselben in eine von ihrer Normalstellung abweichende Lage bringt, theils die normale Wirkung der Schwere in einem bestimmten Grade durch die Wirkung einer centrifugalen Beschleunigung compensirt*). Die animalische Physiologie verfolgt die Schwankungen des Blutdrucks, indem sie gleichzeitig bald das Herz, bald die Blutgefässe, bald die Athmungsmechanik bestimmten verändernden Bedingungen aussetzt, u. s. w. In allen diesen Fällen verbindet sich nicht selten die Functionsänderung mit der Influenzmethode; immerhin bleibt der Ausgangspunkt ein anderer, insofern nicht die allgemeine Frage erhoben wird, welchen Einfluss ein bestimmtes Agens auf den Organismus ausübt, sondern die speciellere, welche Veränderungen eine bestimmte Function durch eine äussere Einwirkung erfährt. Die Stellung dieser Frage setzt daher meistens schon gewisse Resultate voraus, die zuvor durch die eigentliche Influenzmethode erhalten worden sind. So ist man zur Verwendung gewisser Gifte für die physiologische Functionsanalyse erst geschritten, nachdem die von den Toxikologen angewandte Influenzmethode einzelne Wirkungen derselben kennen gelehrt hatte. Nachdem man z. B. erfahren, dass das Strychnin Starrkrämpfe verursacht, welche durch Hautreize ausgelöst werden, lag es nahe, dasselbe bei der Analyse der Rückenmarksfunctionen zu verwerthen, und ähnliche Gesichtspunkte haben zur Anwendung anderer Gifte, wie des Digitalin, Atropin, Muscarin u. s. w., bei der physiologischen Analyse der Herzinnervation geführt**).

Die letzteren Bemerkungen kennzeichnen schon die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Influenzmethode. Die Frage, welche Wirkung ein bestimmtes Agens auf den Organismus ausübt, ist an und für sich ebenso gut möglich wie die andere, welche Leistungen der Organismus selbst oder ein einzelner Theil desselben vollbringt. Aber in dem Zusammenhang physiologischer Untersuchungen wird man doch nur unter zwei Bedingungen zu jener ersten Fragestellung kommen: erstens in den Anfängen der Forschung, in denen noch ein unsicheres Umhertasten nach den zweckmässigsten Hülfsmitteln der Functionsanalyse stattfindet, und wo sich nun die Influenzmethode mit der Functionsaufhebung combinirt, um der tiefer eindringenden quantitativen Functionsänderung den Weg zu bereiten; und zweitens in dem speciellen Fall, wo es sich darum handelt, theils die Bedingungen des Uebergangs der normalen in die abnormen Lebenserscheinungen, theils aber auch direct die Heilsamkeit oder Schädlichkeit gewisser äusserer Einwirkungen zu erforschen. Mit diesen Problemen befinden wir uns aber ganz und gar auf dem Boden der experimentellen Pathologie, in deren Diensten gegenwärtig noch vorzugsweise die Influenzmethode Verwendung findet. Natürlich können in diesem Sinne alle

*) Vgl. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, S. 828 f.

**) Vgl. mein Lehrbuch der Physiologie, 4. Aufl., S. 336, 347.

möglichen Einflüsse, mechanische, thermische, elektrische, chemische, in Frage kommen. Aber vorzugsweise sind es doch zwei Arten der Einwirkung, die das physiologische und pathologische Interesse in Anspruch nehmen: erstens gewisse Intoxicationen, d. h. chemische, insbesondere toxische Einwirkungen auf den Organismus, die ebenso für das Verständniss der Störungen der Functionen wie für dasjenige der medicamentösen Beeinflussungen von Interesse sind; zweitens gewisse Einwirkungen niederer Organismen auf höhere, unter denen die unter dem Namen der Infectionen bekannten Einwirkungen bestimmter Spaltpilze eine hervorragende Stellung einnehmen. Ein zureichendes Verständniss der auf diese Weise mittelst der Influenzmethode erhaltenen Resultate ist natürlich nur auf Grund einer eingehenden Analyse der normalen Lebensfunctionen möglich; doch können die ersteren wieder für die letztere fruchtbringend werden, wie dies namentlich die Geschichte der Intoxicationsversuche deutlich zeigt, während das Studium der Infectionen hierfür noch allzu sehr in seinen Anfängen begriffen ist. Immerhin lassen die Erscheinungen des periodischen Verlaufs der meisten Infectionen, der Immunität gegen künftige Ansteckungen bei manchen unter ihnen, der Vererbung bei andern vermuthen, dass die hier sich erhebenden Fragen mit den tiefsten Problemen der Biologie im Zusammenhang stehen. Die Schwierigkeit des Studiums der Infectionen liegt jedoch hauptsächlich darin, dass dasselbe gleichzeitig eine Functionsanalyse der inficirten wie der inficirenden Organismen voraussetzt, von denen die letzteren häufig sogar morphologisch noch nicht einmal bekannt sind.

Neben diesem experimentellen Weg giebt es einen zweiten, auf welchem die pathologische der normalen Physiologie Dienste zu leisten berufen ist: es ist dies die Beobachtung bestimmter, durch Krankheitsbedingungen herbeigeführter Functionsstörungen und ihre Vergleichung mit den sie verursachenden Structurveränderungen. Die Resultate der klinischen und der pathologisch-anatomischen Beobachtung können so in ihrer Vereinigung einen Werth gewinnen, welcher dem der Vivisection äquivalent ist. Dabei findet lediglich eine Umkehrung der bei der letzteren befolgten Methodik statt, indem die Beobachtung der anatomischen Läsion der Beobachtung der functionellen Veränderungen nicht vorangeht, sondern nachfolgt. Doch ist oft genug auch das physiologische Experiment genöthigt, diesen Gang einzuhalten, da eine genauere Untersuchung selbst der willkürlich gesetzten anatomischen Störungen nicht selten während des Lebens unmöglich ist. Der grösste Nachtheil der pathologischen Beobachtung liegt darin, dass sie von der Gunst des Zufalls abhängt. Aber für die meisten Gebiete der Physiologie ist sie das einzige Hülfsmittel, welches es ermöglicht, den Menschen selbst zum Object der functionellen Analyse zu machen. Unschätzbar ist sie darum namentlich in solchen Fällen, wo die Bedingungen der menschlichen Organisation erheblich abweichen, wie z. B. bei den Functionen der höheren Nervencentren. Ausserdem hat hier die

Beobachtung am Menschen noch den besonderen Vortheil, dass sie eine zuverlässigere Prüfung der psychischen Veränderungen gestattet, welche die physischen Störungen begleiten.

## 2. Die allgemeinen Gesetze der Lebenserscheinungen.

### a. Die biologischen Richtungen.

Auf andern Gebieten der Naturforschung sind die Gegensätze der Zweck- und Causalerklärung gegenwärtig beinahe verschwunden, oder sie haben doch aufgehört Gegensätze zu sein, da man den teleologischen Principien stets zugleich eine causale Bedeutung zugesteht. (Vgl. oben S. 255 f.) Anders in der Biologie. Hier dauert der Kampf jener Anschauungen immer noch fort. Zugleich aber hat vermöge der besonderen Natur des Gegenstandes die teleologische Auffassung eigenthümliche Formen angenommen, die, historisch aus einander hervorgegangen, unter den Namen des Animismus und Vitalismus bekannt sind. Ihnen gegenüber hat die streng causale Auffassung der Lebensprocesse stets die mechanische Natur der letzteren behauptet und demgemäss die Forderung aufgestellt, dass die Physiologie den Organismus unter dem Gesichtspunkt einer natürlich entstandenen Maschine zu betrachten habe*).

Der Kampf dieser Anschauungen reicht bis in die frühesten Anfänge der Speculation zurück. Indem der Hylozoismus der ältesten Naturphilosophie das Bewusstsein auf die äussere Natur überträgt, denkt er sich unter allen Naturerscheinungen zumeist die Lebensvorgänge nach Analogie der zweckbewussten Willenshandlungen. Umgekehrt unterwirft die Atomistik dem der äusseren Natur entnommenen Princip der mechanischen Bewegung das eigene Sein des Menschen; das Leben entspringt ihr, wie alles Geschehen, aus dem Stoss der Atome. Gerade wegen der Ausschliesslichkeit, mit welcher diese Richtungen ihre Principien anwenden, stehen sie sich aber näher als die später aus ihnen hervorgegangenen Entwicklungen. Dem antiken Atomismus gilt schliesslich ebenso gut wie dem ursprünglichen Hylozoismus die Seele als der Grund des Lebens. Erst die Platonisch-Aristotelische Philosophie hat durch den Gegensatz, in welchem sie sich zu dem Materialismus der älteren Naturphilosophie entwickelte, die Ausbildung der animistischen Anschauung in ihrer engeren Begrenzung auf die eigentlichen Lebenserscheinungen angeregt. Sogar die Unterscheidung höherer geistiger Kräfte von den niederen, an die Materie gebundenen Lebenskräften ist in ihr bereits vorgebildet. Als daher späterhin die peripatetische und die stoische Schule den Platonischen Dualismus zu beseitigen

*) Ueber die allgemeinere Bedeutung der genannten Richtungen vgl. Bd. I, S. 569 f.

suchten, lag es nahe, jene Lebenskräfte selbst als materielle Principien zu denken und auf diese Weise dem causalen Materialismus der Atomistiker einen teleologischen gegenüberzustellen. Erzwangen sich nun vollends innerhalb des letzteren wiederum die Bewusstseinsvorgänge die Anerkennung einer Selbständigkeit, die ihre Trennung von den sonstigen Lebenserscheinungen rechtfertigte, so war damit jener Vitalismus fertig, den zuerst Galen in die Biologie einführte, und der die Herrschaft der Galenischen Medicin lange überdauert hat.

Dieser Entstehung gemäss bildet der Vitalismus eine Art Mittelglied zwischen Animismus und Mechanismus. Mit dem ersteren nimmt er in den lebenden Wesen zweckthätige Kräfte an, mit dem letzteren setzt er voraus, dass die Ursachen des Lebens an die lebende Materie als solche gebunden seien. Eben desshalb lässt leicht die vitalistische Anschauung mit einer mechanistischen und atomistischen in Bezug auf die leblose Natur sich vereinigen. Gerade in dieser letzteren Form hat aber der Vitalismus die neuere Physiologie von Albrecht Haller bis auf Johannes Müller beherrscht. Es ist dann während einiger Jahrzehnte in Folge des Aufschwungs der physikalischen und chemischen Forschungsmethoden die mechanistische Anschauung in den Vordergrund getreten, bis in der neuesten Zeit durch die Beschäftigung mit den Entwicklungsproblemen abermals teleologische Erklärungsprincipien zu grösserer Geltung gelangten. Diese vermeiden es aber unter der sichtlichen Nachwirkung der vorangegangenen Periode geflissentlich die Form des früheren Vitalismus anzunehmen. Hierdurch gewinnen die gegenwärtig in der Biologie herrschenden Anschauungen einen höchst eigenthümlichen Charakter, der deutlich zeigt, dass die Wissenschaft selbst in einem Uebergangszustand begriffen ist, in welchem sie eine Vermittelung zwischen jenen Gegensätzen zu finden sucht.

An verschiedenen Erscheinungen giebt sich dieser Uebergangscharakter zu erkennen. Die auffallendste besteht in dem weitverbreiteten Vorkommen einer unbewussten Teleologie, welche meistens mit einer energischen Polemik gegen die bewusste Teleologie verbunden ist, womit es dann unmittelbar zusammenhängt, dass gewisse teleologische Erklärungen von ihren Urhebern oder Anhängern für causale, wenn nicht gar für »mechanische« gehalten werden. So kann man in Schriften über die Darwin'sche Theorie zahlreichen Ausführungen begegnen, in denen es als ein grosses Verdienst Darwin's gepriesen wird, dass durch ihn an die Stelle eines mystischen Schöpfungsplanes oder zweckthätiger Lebenskräfte eine »Causalerklärung« der Lebensformen durch die Gesetze der Vererbung, der Anpassung und des Kampfes ums Dasein getreten sei*). Wir meinen nun, dass das Verdienst Darwin's nicht im geringsten geschmälert wird, wenn man zugesteht, dass diese Gesetze zunächst einen rein teleologischen Cha-

*) Vgl. z. B. Haeckel, Generelle Morphologie der Organismen, Bd. I, S. 97 f.

rakter besitzen. Denn die Bedeutung seiner Theorie besteht gerade darin, dass sie eine unfruchtbare durch eine voraussichtlich fruchtbarere Teleologie ersetzt hat, indem die von ihr aufgestellten teleologischen Principien mehr Aussicht zu einer künftigen Causalerklärung darbieten als die Lebenskräfte der älteren Biologie. Dieser Nutzen der Darwin'schen Theorie wird freilich wieder in Frage gestellt, wenn man sich, wie es so häufig geschieht, bei den Begriffen der Vererbung und Anpassung beruhigt, als ob es, wo sie einmal ins Feld geführt sind, überhaupt nichts mehr zu fragen gäbe.

Eine zweite Erscheinung, die mit der obigen nahe zusammenhängt, besteht in der Umdeutung solcher Lebenserscheinungen, die man sonst gewohnt war in ihren causalen Beziehungen aufzufassen, in teleologische Formen. So hat man die mechanische Wirkung, welche die Function der Organe auf deren Structur ausübt, wie dieselbe in der Form und Anordnung der Pflanzenzellen, in der Lagerung der Knochenbälkchen nach den Richtungen des stärksten Druckes und in vielen andern Erscheinungen hervortritt, vielfach auch als eine wechselseitige Anpassung bezeichnet oder auf einen »Kampf der Theile im Organismus« *) zurückgeführt, ähnlich wie, über das Gebiet der Lebenserscheinungen hinausgehend, sogar von einem »Kampf der Molecüle« und von einem »Kampf ums Dasein am Himmel« gesprochen wurde **). Man kann nicht behaupten, dass derartige teleologische Umdeutungen die betreffenden Erscheinungen unserem Verständnisse näher bringen. Nichts desto weniger lässt sich ihnen insofern ein gewisser Nutzen nicht absprechen, als sie deutlich darauf hinweisen, dass teleologische und causale Erklärungen nicht nothwendig einander widerstreiten müssen.

In der That geschieht dies letztere niemals, wenn dem Zweckbegriff die ihm gebührende Stellung angewiesen wird. (Vgl. Bd. I, S. 557 f.) Dass aber ganz besonders die Biologie zu jener Umkehrung der causalen Betrachtung herausfordert, in welcher alle Zweckerklärung besteht, dies kann nach der Beschaffenheit ihrer Objecte nicht zweifelhaft sein. Niemand hat dies, ohne sich freilich dessen bewusst zu sein, nachdrücklicher anerkannt als die mechanistische Richtung in der Physiologie, indem sie mit Vorliebe den Organismus als eine »natürliche Maschine« bezeichnete. Werden doch die Leistungen einer Maschine vor allem nach den Zwecken beurtheilt, die sie erfüllen soll, daher nächst der Biologie gerade die Mechanik am reichsten an teleologischen Principien ist. (S. 251.) In ihr ist aber zugleich für alle andern Naturwissenschaften ein Vorbild aufgestellt für die Beziehung, in welche die teleologischen zu den causalen

*) W. Roux, Der Kampf der Theile im Organismus. Leipzig 1881.

**) C. du Prel, Der Kampf ums Dasein am Himmel, 2. Aufl., Berlin 1876. Pfaundler, Der Kampf ums Dasein unter den Molecülen. Poggendorff's Ann., Jubelband, 1874, S. 182.

Principien treten müssen, wenn beide in fruchtbarer Weise zusammenwirken sollen.

Nach diesem Vorbilde ist denn auch namentlich vermittelst der morphologischen Methode in neuerer Zeit mancher bedeutungsvolle Beitrag zum Verständniss der mechanischen Zweckmässigkeit der Organismen geliefert worden. Wenn hierbei zunächst die Bau- und Structurverhältnisse, die bleibenden Erzeugnisse bestimmter physiologischer Functionen, mehr als die Functionen selbst einer Erklärung zugänglich waren, so ist dies desshalb begreiflich, weil bei jenen Verhältnissen nur einfache statische und mechanische Principien zur Anwendung kommen, während die physiologischen Functionen überall auf einem verwickelten Zusammenwirken physikalischer und chemischer Kräfte beruhen. Hier ist darum ein Ineinandergreifen teleologischer und causaler Erklärung bis jetzt nur dann möglich, wenn man sich, wie z. B. bei der Theorie der Blutbewegung, auf die Betrachtung der unmittelbar wirksamen mechanischen Kräfte beschränken kann. Um so charakteristischer ist es aber für die sich vollziehende Wandlung der biologischen Anschauungen, dass man in einem ähnlichen Sinne von einer »teleologischen Mechanik« auch in solchen Fällen schon zu sprechen beginnt, wo der eigentliche Grund der Zweckmässigkeit gar nicht erklärt, sondern als gegeben in den vorhandenen Eigenschaften der Organismen vorausgesetzt wird. So z. B. wenn man darauf hinweist, dass trockene Stoffe besonders stark die Nerven der Mundschleimhaut erregen, wodurch die für das Verdauungsgeschäft äusserst zweckmässige Speichelabsonderung bewirkt werde, oder dass Sauerstoffmangel die Athembewegungen in Gang bringe, welche letztere jenen Mangel wieder beseitigen, u. s. w. *) Hier fehlt uns eben zum vollen Verständniss der mechanischen Zweckmässigkeit die Kenntniss der ursächlichen Bedingungen, durch welche diejenigen Einrichtungen der Organisation entstanden sind, vermöge deren, wie Pflüger sich ausdrückt, »die Ursache eines jeden Bedürfnisses eines lebendigen Wesens zugleich die Ursache der Befriedigung des Bedürfnisses ist«. Dieser Satz selbst ermächtigt uns nur, unter Voraussetzung der gegebenen zweckmässigen Organisation das Zweckprincip in dem allein berechtigten Sinne zu verwenden, in welchem jeder zweckmässige Zusammenhang zugleich ein Causalzusammenhang ist. Immerhin ist mit dieser Richtigstellung ein wichtiger Schritt geschehen. Zunächst musste der Gedanke der mechanischen Zweckmässigkeit, welchen William Harvey schon für die Mechanik des Kreislaufs verwerthete, auf alle andern Functionen ausgedehnt werden. Diese Leistung hat hauptsächlich die neueste Periode der physiologischen Forschung vollbracht, die in Folge des Gegensatzes, in welchem sie sich zu dem vorangegangenen Vitalismus befand, zuerst jede Teleologie perhorrescirte, um schliesslich doch selbst, gezwungen durch die Natur ihrer Untersuchungsobjecte, in der mechanischen Teleo-

*) Pflüger, in seinem Archiv f. Physiologie, Bd. 15, S. 57 f.

logie zu endigen. Dabei ist bis heute jene Idee der »natürlichen Maschine«, die sich in den alten iatromechanischen Schulen ausgebildet hatte, darin lebendig geblieben, dass man den letzten Grund der zweckmässigen Mechanik des Lebens, den Organismus selbst, meist als gegeben voraussetzte und daher die Beschäftigung mit den Entwicklungserscheinungen geflissentlich vermied. Auch diese Periode scheint sich aber bereits ihrem Ende zu nähern. Im Anschlusse an die Theorie der Entstehung der Arten ist das Interesse an den Entwicklungsproblemen lebendiger geworden, während zugleich die Möglichkeit einer Lösung derselben in erreichbarere Entfernung gerückt scheint. Ist es auch zunächst der Natur der Sache nach die morphologische Methode, die hier überwiegt, so beginnen doch neben ihr die übrigen Hülfsmittel der Experimentalphysiologie allmählich der Entwicklungsgeschichte dienstbar zu werden. Ob eine teleologische Mechanik, welche nicht bloss den gewordenen, sondern auch den werdenden Organismus umfasst, jemals zur Vollendung gelangen wird, mag zweifelhaft scheinen. Schwerlich wird dieses Gebiet ganz der Herrschaft unverificirbarer Hypothesen, die gleichwohl zur Vollendung der Einheit unserer Naturanschauung unerlässlich sind, sich entziehen können. Jeder Schritt weiter dürfte aber der Erkenntniss näher führen, dass zur Erklärung der ersten Entstehung organischer Zweckmässigkeit jene subjective Form der Zweckerklärung nicht mehr ausreicht, in die wir nöthigenfalls jede Causalerklärung umkehren können, sondern dass hier der Zweck objective Bedeutung gewinnt, da die lebenden Wesen nicht bloss durch äussere Ursachen bewegt werden, sondern vor allem auch sich selbst nach Zweckvorstellungen bewegen, so dass wir schon bei den niedersten Formen, und gerade bei ihnen mehr als bei manchen der entwickelteren, zweckmässige Handlungen, die sichtlich ein Bewusstsein verrathen, einen Einfluss gewinnen sehen auf die bleibende Organisation.

### b. Teleologische Principien der Biologie.

Der Begriff des Zwecks ist auf die lebenden Wesen in doppelter Weise anwendbar, indem entweder die Eigenschaften derselben oder die an ihnen zur Beobachtung kommenden Lebensvorgänge unter dem Gesichtspunkt jenes Begriffs betrachtet werden. Die erste dieser teleologischen Auffassungen ist im ganzen die frühere, doch geht sie ohne deutliche Grenze in die zweite über. Was uns in die Augen fällt, ehe wir uns noch den Zusammenhang der einzelnen Lebensprocesse klar gemacht haben, ist die Zweckmässigkeit der Organisation, wie sie ebensowohl an den Eigenschaften des ganzen Organismus wie an denjenigen seiner einzelnen Theile erkennbar ist. Verbindet sich auch eine solche Betrachtung stets mit der Rücksicht auf die Leistungen, zu denen die lebenden Wesen befähigt sind, so ist man doch meistens geneigt, für jene Leistungen sofort in den vorausgesetzten dauernden Lebenseigenschaften die zureichende Er-

klärung zu finden. Dies geschieht, indem die Eigenschaften ohne weiteres in zweckthätige Kräfte umgewandelt werden. Demgemäss setzt der Vitalismus an die Stelle einer Erklärung der Lebenserscheinungen eine Classification der Eigenschaften lebender Wesen, wobei er zugleich jeder fundamentalen Eigenschaft das Prädicat einer Kraft beilegt. Am augenfälligsten giebt sich diese Verwechslung von descriptiver Classification und Erklärung darin zu erkennen, dass gewisse Generalbegriffe aufgestellt werden, die für alle oder für viele sehr differente Erscheinungen den gemeinsamen Erklärungsgrund enthalten, während man doch ausserdem für jede eigenthümlich geartete Leistung noch eine specifische Kraft voraussetzt. So tritt hier an die Stelle des Princips der Kräftecomposition, wie es in der physikalischen Mechanik Geltung beansprucht, eine Art von Kräftehierarchie. Der allgemeinen Lebenskraft sind alle einzelnen Lebenskräfte, der Bildungs- und Wachsthumstrieb, die Assimilations- und Organisationskraft, die Sensibilität und Irritabilität, unterthan, und unter diesen theilt sich z. B. wieder der Bildungstrieb in eine Generations- und Reproductionskraft *). Wir sehen heute in diesen Classenbegriffen keine Erklärungsprincipien mehr. Nichts desto weniger wird man eingestehen können, dass sie in ihrer berichtigten Bedeutung theils zur abkürzenden Bezeichnung für gewisse complexe Eigenschaften und Vorgänge, theils aber auch desshalb unentbehrlich sind, weil hinreichend sicherstehende Causalbegriffe noch nicht an ihre Stelle gesetzt werden können. Wenn wir beobachten, dass ein abgeschnittener Körpertheil in seiner ursprünglichen Beschaffenheit wiedererzeugt wird, oder dass das Wachsthum der Organe bei der Entwicklung nach einer gewissen Norm vor sich geht, so verbinden wir zwar mit solchen Erscheinungen den Gedanken, dass sie aus bestimmten physikalischen und chemischen Ursachen entspringen. So lange uns aber diese Ursachen noch völlig dunkel sind, befinden wir uns mit der Deutung jener Vorgänge nothgedrungen auf der rein teleologischen Stufe, deren Unvollkommenheit nur wenig dadurch verbessert wird, dass wir sie nicht für das Ende des Wissens halten. Nicht anders geht es mit dem Begriff des Lebens selbst. Nicht bloss für die Unterscheidung des Lebendigen und Todten pflegen wir uns noch heute dieses Begriffs zu bedienen, sondern wir können insbesondere die verschiedenen Grade der Resistenzfähigkeit, die ein Organismus gleichen äusseren Einwirkungen gegenüber darbietet, kaum anders als durch die Statuirung gradweiser Verschiedenheiten der Lebenskraft ausdrücken **). Und selbst wenn es gelingen wird, die physikalischen

---

*) Vgl. J. F. Blumenbach, Ueber den Bildungstrieb. Göttingen 1791, S. 92.

**) Auch der Ausdruck „constitutionelle Kraft“, den man in der Generationslehre gebraucht hat, um damit die Fähigkeit der Arterhaltung bei der Fortpflanzung zu bezeichnen, ist offenbar synonym mit Lebenskraft. Vgl. V. Hensen, Physiologie der Zeugung. Hermann's Handbuch, VI, S. 175.

und chemischen Bedingungen der Lebenserscheinungen tiefer zu durchschauen, so wird man jene Begriffe immer noch zur abkürzenden Bezeichnung der zu Grunde liegenden complexen Vorgänge nicht entbehren können. Denn es wird sich in der Biologie immer nur darum handeln, die teleologische mit der causalen Erklärung in dem Sinne zu verbinden, in welchem dies die allgemeine Beziehung des Zwecks zum Causalprincip fordert.

Eine solche Verbindung wird nun angebahnt durch die zweite Form biologischer Zweckerklärung, durch die Aufstellung teleologischer Gesetze der Lebensvorgänge. Nachdem für die Functionen des fertigen Organismus durchgängig das Princip der Causalerklärung sich praktische Geltung errungen, ist es nur noch das Gebiet der Entwicklungserscheinungen, in welchem der Hauptsache nach die ausschliesslich teleologische Form der Erklärung bis jetzt nicht überschritten ist. Dennoch hat die neuere Biologie darin einen unverkennbaren Fortschritt gemacht, dass sie das allgemeine Entwicklungsgesetz, welches man früher für jede organische Species annahm, ohne damit etwas anderes auszudrücken als den gesammten Erscheinungscomplex regelmässig auf einander folgender Entwicklungszustände, in eine Anzahl von Theilgesetzen zerlegt, welche einer causalen Deutung zugänglicher sind. Einer solchen Zerlegung musste zuerst eine Verallgemeinerung des Entwicklungsgesetzes selbst vorausgehen. Sie bestand darin, dass neben der individuellen Entwicklung, welche die frühere naturwissenschaftliche Tradition allein anerkannte, die Entwicklung der Arten sich Geltung errang, worauf dann nothwendig auch die mannigfachen Beziehungen zwischen individueller und genereller Entwicklung der Beobachtung sich aufdrängten. Dieser Standpunkt, schon vorbereitet in der speculativen Naturphilosophie dieses Jahrhunderts, in Bezug auf den Parallelismus der generellen und individuellen Entwicklung aber namentlich durch die paläontologischen Arbeiten von Louis Agassiz nahe gelegt, hat endlich in der Darwin'schen Theorie einen epochemachenden Ausdruck gefunden. Die Bedeutung dieser Theorie besteht, wie schon oben bemerkt, keineswegs darin, dass sie eine Causalerklärung der Entwicklungserscheinungen giebt oder auch nur zu geben versucht. Vielmehr zerlegt sie nur ein teleologisches Gesetz von höchst complexem Charakter, das Entwicklungsgesetz, in einige einfachere teleologische Gesetze.

Das Entwicklungsgesetz sagt aus, dass alle organischen Wesen aus der Differenzirung einfacher Formen von gleichartiger Beschaffenheit ursprünglich hervorgegangen sind und bei der individuellen Entwicklung noch fortwährend hervorgehen. Dieses Gesetz ist ein teleologisches, denn es fasst die Differenzirung der einfachen Formen als einen Process auf, welcher die Erzeugung der zusammengesetzten zu seinem Zweck hat. Auch wo dies nicht ausdrücklich gesagt ist, da tritt doch der Zweckgedanke

darin hervor, dass jener Differenzirungsprocess nicht in Bezug auf seine Causalbedingungen, sondern lediglich mit Rücksicht auf seinen Erfolg untersucht wird. Die Darwin'sche Theorie zerlegt nun das Entwicklungsgesetz zunächst in zwei speciellere Gesetze: in das Vererbungsgesetz und das Anpassungsgesetz. Zwischen beiden sind die Entwicklungsprobleme dergestalt vertheilt, dass auf das Vererbungsgesetz alle Vorgänge zurückgeführt werden, die einer constanten Wiederkehr unterworfen sind, auf das Anpassungsgesetz alle Erscheinungen, in denen die Regel der constanten Wiederkehr Ausnahmen erfährt. Das Vererbungsgesetz hat daher hauptsächlich die individuelle, das Anpassungsgesetz die generelle Entwicklung begreiflich zu machen. Denn jene wiederholt sich nicht nur von Generation zu Generation, sondern es wiederholen sich in ihr auch ausserdem die Hauptzüge der generellen Entwicklung. Die letztere dagegen hat sich wahrscheinlich nur einmal vollzogen, und sie kann daher nur aus Abänderungen erklärt werden, denen die Individuen bei ihrer Entwicklung unterworfen waren. Aber eine Befestigung und Häufung solcher Abänderungen wird doch nur verständlich, wenn man auch hier das Vererbungsgesetz zu Hülfe nimmt. Auf diese Weise wird es beiden Principien gerade durch ihr Ineinandergreifen erst möglich, die wechselvollen Vorgänge der Entwicklung zu deuten.

Hierbei ist es nun ein misslicher Umstand, dass die Hauptlast der Erklärung dem Vererbungsgesetz zufällt, das sich einer sichern causalen Interpretation noch völlig entzieht. Indem dasselbe nicht bloss die Wiederkehr bestimmter Erscheinungen, sondern auch die regelmässige Zeitfolge derselben verbürgen soll, ist es von dem Entwicklungsgesetz eben nur darin verschieden, dass es die auf Anpassung bezogenen Ausnahmserscheinungen abgestreift hat. Darum stehen sich auch in der Theorie der Vererbung heute noch die nämlichen zwei Anschauungen gegenüber, die schon im vorigen Jahrhundert unter den Namen der Epigenesis und der Evolution einander bekämpften, und deren wesentlicher Gegensatz darin liegt, dass die Wiederkehr der gleichen Erscheinungen bei der Epigenesis auf die Wiederkehr der nämlichen äusseren Bedingungen, bei der Evolution auf ein Freiwerden latenter Kräfte zurückgeführt wird, die von den Erzeugern auf ihre Nachkommen übergehen und daher in den Stammeltern einer jeden Species ihre ursprüngliche Quelle haben. Es versteht sich von selbst, dass uns diese Anschauungen heute nicht mehr in den Formen entgegentreten, in denen sie von den früheren Physiologen vertheidigt wurden. Niemand glaubt mehr mit den Evolutionisten des 17. und 18. Jahrhunderts, dass entweder die Spermatozoen oder die Eier die seit Anfang der Schöpfung in den Ureltern der Species eingeschachtelten, aber noch nicht hinreichend ausgewachsenen Thiere seien. Auch wird kaum Jemand noch die Epigenesis im Sinne eines Casp. Fr. Wolff verstehen, wonach durch eine der Krystallisation analoge Contactwirkung organisirter Elemente auf unorganische Stoffe sich die Entwicklung der Gewebe und

Organe vollziehen sollte *). Aber in neuen Formen wiederholen sich dennoch die alten Anschauungen. Den Standpunkt der Epigenesis vertritt seiner allgemeinen Tendenz nach Darwin's »provisorische Hypothese der Pangenesis« **). Nur erweitert sie denselben, indem sie nicht, wie es bei Wolff geschehen war, von einem Punkte successiv alle Theile des Körpers sich organisiren lässt, sondern indem aus jedem Theil, nöthigenfalls aus jeder einzelnen Zelle, organisirende Elemente entspringen, die zuerst in die Sexualzellen und dann aus diesen in den Embryonalkörper übergehen, in welchem sie, wachsend und sich vermehrend, das Wachsthum aller Organe veranlassen. Durch diese Verallgemeinerung nähert sich nun freilich die Pangenesis der Evolution. Insofern zu allen Organanlagen die Keime in dem elterlichen Organismus enthalten sind, ist der Vorgang der Vererbung in gewissem Sinne nichts anderes als eine Evolution. Aber diese setzt sich doch aus einer Summe epigenetischer Elementarvorgänge zusammen, indem den Keimchen die Fähigkeit zugeschrieben wird, unorganisirten Stoff zu organisiren. Dieser Punkt ist es aber zugleich, der die Achillesferse der ganzen Theorie bildet. Das Problem der Entwicklung wird von dem Ganzen hinweggenommen, um es auf die hypothetischen Elemente desselben zu übertragen. Weder erfahren wir, wie das Wachsthum und die Vermehrung der Keimchen geschehen soll, noch wird uns begreiflich gemacht, durch welche Wahlverwandtschaft die aus allen Körpertheilen in die Sexualzellen übergegangenen Elemente in der gehörigen Weise sich anordnen, oder durch welche Bedingungen die vererbten Eigenschaften in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge auftreten, unter Umständen aber auch während ganzer Generationen latent bleiben, um ohne sichtbare Ursachen plötzlich wieder zu erscheinen. Auf alle diese Fragen vermag die Hypothese der Pangenesis ebenso wenig Antwort zu geben wie die alte Demokritische Zeugungslehre, die den Gedanken, dass der Same aus allen Theilen des Körpers stamme, bereits vorausgenommen hatte.

Je mehr diese verschiedenen Gestaltungen der Epigenesis selbst den Evolutionsgedanken enthalten, um so begreiflicher ist es daher, dass man den letzteren immer wieder zur Grundlage der Entwicklungstheorie zu machen suchte. In diesem Sinne hat namentlich W. His auf die Periodicität der Entwicklungserscheinungen das Hauptgewicht gelegt und sie hiernach mit den ebenfalls einen periodischen Verlauf darbietenden physiologischen Reizungserscheinungen in Analogie gebracht***). Von dem Satze ausgehend, dass die Entwicklung als eine übertragene Bewegung zu

*) Ueber diese und ähnliche Theorien vgl. W. His, Arch. f. Anthropologie IV, S. 197 u. 317 f.; V, S. 69 f.

**) Darwin, Das Variiren der Thiere und Pflanzen. Deutsche Ausgabe, II, S. 470 f.

***) W. His, Unsere Körperform, Leipzig 1875, S. 145 f.

deuten sei, betrachtet er das Ei als die erregbare Substanz, in welcher durch die Befruchtung oder (bei ungeschlechtlicher Zeugung) durch andere derselben entsprechend wirkende Vorgänge die Wachsthumserregung ausgelöst werde, die nun als eine Function von Raum und Zeit in einer bestimmten, von den ursprünglich die Entwicklung bestimmenden Factoren abhängigen Regelmässigkeit verlaufe. Durchaus ähnliche Anschauungen hat auch Haeckel entwickelt, indem er dabei noch besonders die Analogie der periodischen Entwicklungserscheinungen mit den Wellenbewegungen betonte*).

Zweifellos sind diese epigenetischen und evolutionistischen Vorstellungen der neuesten Zeit weit von einer wirklichen Verbindung der causalen Erklärung mit der an sich völlig teleologischen Fassung des Vererbungsgesetzes entfernt. Immerhin ist das Streben nach einer solchen Verbindung besonders in der Verwerthung physikalischer Analogien deutlich zu bemerken. Wenn hierbei die epi- und pangenetische Ansicht auf die Krystallisation, die evolutionistische auf die periodischen Formen übertragener Bewegungen hinweist, so mag vielleicht jede für gewisse Theilerscheinungen der Wachsthumsvorgänge zutreffend sein. Das Ganze der Entwicklung wird aber jedenfalls durch die zweite Ansicht mehr veranschaulicht, wie dies auch schon der Umstand beweist, dass die epi- und pangenetische Ansicht nicht ganz der evolutionistischen Vorstellung hat entbehren können. Als die Quelle der einzelnen periodischen Lebensvorgänge ist nun, insoweit bei ihnen nicht äussere Bedingungen betheiligt sind, fast überall das Nervensystem oder eine äquivalente Protoplasmasubstanz erkannt worden, wie die Athem- und Herzbewegungen, der Wechsel von Wachen und Schlaf und andere Erscheinungen bezeugen. Der Gedanke liegt daher nahe, dass ähnliche functionelle Bedingungen der grossen Periodicität des Lebens selber zu Grunde liegen.

Mehr als das Vererbungsgesetz ist das Anpassungsgesetz wenigstens in einzelnen Fällen einer causalen Interpretation zugänglich gewesen. Sucht man alle Vorgänge, die sich dem Begriff der Anpassung unterordnen lassen, in gewisse Classen zu bringen, so kann eine mechanische, eine chemische und eine functionelle Anpassung unterschieden werden.

Unter ihnen ist die mechanische Anpassung verhältnissmässig am klarsten zu durchschauen. Sie bezieht sich fast ausschliesslich auf das wechselseitige Verhältniss der Theile des Einzelorganismus. Bei dem Wachsthum der Gewebe und Organe formen und ordnen sich nämlich die einzelnen Elemente theils unter dem Einfluss der durch ihr eigenes Wachsthum erzeugten Spannungen, theils unter der Wirkung äusserer Druck- und Zugkräfte. Bei der Pflanze hinterlassen in Folge des festen Gefüges der Zellwände und der Regelmässigkeit des Wachsthums die Wachsthums-

*) Haeckel, Die Perigenesis der Plastidule oder die Wellenzeugung der Lebenstheilchen. Berlin 1876.

spannungen die deutlichsten Spuren in der Structur der Zellen und Gewebe. Sie verrathen sich sowohl in den Schichtungen der Zellwandungen selbst wie in den Anordnungen der Zellreihen, indem regelmässige Curvensysteme sich ausbilden, die unmittelbar auf die nach den verschiedenen Richtungen stattfindenden relativen Wachsthumsgeschwindigkeiten zurückschliessen lassen. Charakteristisch ist in dieser Hinsicht besonders das Verhältniss der zu dem Umfang des wachsenden Pflanzentheils concentrischen, meist kreisförmigen oder elliptischen Curven zu den sie senkrecht durschneidenden hyperbolischen oder parabolischen Linien, ein Verhältniss, für welches die Jahresringe und die sie durchsetzenden Markstrahlen ein bekanntes Beispiel abgeben*). Am Thierkörper sind wegen der meist verwickelteren Wachsthumsbedingungen mechanische Wirkungen von ähnlicher Regelmässigkeit von vornherein nur bei relativ einfachen Verhältnissen der Organisation zu erwarten. Unter solchen, wie z. B. in der Anordnung der Furchungszellen**), in den Schichtungen epithelialer Gewebe, treten sie in völlig analoger Weise auf. Wo dagegen die durch das Wachsthum entstehenden Formen von so complexer Art sind, wie die entwickelteren Thierformen, da können wir natürlich auch nicht mehr voraussetzen, dass ihnen einfache geometrische Anordnungen der Elemente entsprechen. Immerhin werden auch dann gewisse Gestaltungen als mechanische Folgen voraufgegangener Wachsthumsbedingungen zu deuten sein. So hat man die Faltungen der Keimtheile aus einem ungleichen Flächenwachsthum derselben***), so den Verlauf der Gehirnfurchen der Säugethiere aus den verschiedenen Verhältnissen des Längen- und Breitenwachsthums der Hirnmasse abzuleiten gesucht†).

So werthvoll nun aber eine derartige Mechanik der Wachsthumsbewegungen für ein Verständniss der organischen Formen sein mag, so ist doch nicht zu übersehen, dass dabei das Princip der mechanischen Anpassung nur unter der Voraussetzung gegebener Wachsthumsbedingungen einer causalen Erklärung zugänglich gemacht wird. Ueber die Wachsthumsbedingungen selbst kann jedoch grossentheils erst das Vererbungsgesetz Rechenschaft geben. In dieser Beziehung befinden wir uns bei der zweiten Form mechanischer Anpassung, bei welcher äussere Druck- und Zugkräfte als die ursächlichen Factoren auftreten, in einer günstigeren Lage. Hierher gehören zunächst die für die bleibenden oder vorübergehenden Formgestaltungen der Pflanzen massgebenden Richtungsbewegungen derselben, für welche hauptsächlich Licht und Schwerkraft bestimmend sind. Obgleich auch hier das in andern Ursachen begründete Wachsthum vor-

*) Schwendener, Monatsber. der Berliner Akademie, 1880, S. 412.

**) A. Rauber, Thier und Pflanze. Akadem. Programm. Leipzig 1881, S. 34.

***) W. His, Unsere Körperform, S. 45 f.

†) Vgl. meine Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., II, S. 87 f.

ausgesetzt wird, so ist es doch die für die Bildung der Form hauptsächlich in Betracht kommende Wachsthumsrichtung, die auf physikalische Ursachen zurückführbar ist, deren Wirkungen einer mechanischen Deutung verhältnissmässig leicht zugänglich sind. Hauptsächlich aber ist hierher die für den pflanzlichen und thierischen Organismus äusserst bedeutsame Ausbildung *mechanischer Structurformen* zu rechnen, d. h. solcher Anordnungen von Gewebselementen, die einerseits sichtlich zu bestimmten mechanischen Zwecken dienen, anderseits aber aus mechanischen Ursachen entspringen, die mit diesen Zwecken in unmittelbarer Verbindung stehen. So bilden in der Pflanze die durch grössere Cohäsion und Elasticität sich auszeichnenden Bastzellen ein mechanisches System, welches im allgemeinen nach den Richtungen der stärksten Zug- und Druckkräfte angeordnet ist, während die anderen Functionen dienenden weicheren Parenchymzellen die Lücken dieses Systems ausfüllen *). In der augenfälligsten Weise bietet ferner die spongiöse Substanz gewisser Knochen, wie des menschlichen Oberschenkels, eine solche mechanische Structur dar. Indem der Gelenkkopf sammt Hals einen nahezu horizontalen, aber etwas schief nach oben gerichteten Träger bildet, auf dem eine sehr bedeutende Last ruht, ordnen sich die Knochenbälkchen der spongiösen Substanz nach einem Curvensystem, welches genau den statischen Druck- und Zugcurven entspricht **). Wir können nun offenbar annehmen, dass die Anordnung der Knochenbälkchen eine völlig gleichförmige sein würde, wenn die Druck- und Zugkräfte nach allen Richtungen gleichförmig vertheilt wären. Umgekehrt werden also die äusseren Kräfte die Anordnung der durch die Ernährung ausgeschiedenen Stoffe in den günstigsten Richtungen oder, bei dem mechanischen System der Pflanzen, die Vergrösserung der Cohäsion der Zellwandungen in diesen Richtungen bestimmt haben.

Schwieriger ist im allgemeinen der causale Zusammenhang der *chemischen Anpassungen* zu durchschauen. In den bis jetzt bekannteren Fällen handelt es sich dabei um die Einwirkungen äusserer Naturbedingungen und darum weniger um eine wechselseitige Anpassung einzelner Theile als um eine Anpassung des ganzen Organismus an seine Umgebung. So ist das Wachsthum der Pflanzen und Thiere wesentlich abhängig von den Bedingungen ihrer Ernährung. Eine allmähliche Anpassung an veränderte Bedingungen verräth sich in den meistens zugleich von sichtbaren Variationen begleiteten Erscheinungen der Acclimatisation. Schneller und zugleich in einer specifischen Richtung vollzieht sich eine ähnliche Anpassung bei denjenigen Vorgängen, die eine Immunität gegen gewisse Krankheitsgifte im Gefolge haben, wie z. B. bei der Durchseuchung mit

*) *Schwendener*, Das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen. Leipzig 1874.

**) G. H. *Meyer*, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes. Leipzig 1873. J. *Wolff*, Virchow's Archiv, Bd. 50, S. 398 f.

den nämlichen oder verwandten Infectionskeimen. In allen diesen Fällen sind uns die zu Grunde liegenden Processe noch unbekannt; wir können nur aus den Erfolgen auf die stattgefundenen Veränderungen zurückschliessen.

Nicht minder schwierig in Bezug auf ihre Causalerklärung ist endlich die dritte Classe von Anpassungen, die ich als die functionellen bezeichnet habe. Die hierher gehörigen Erscheinungen stimmen sämmtlich darin überein, dass die Ausübung irgend welcher physiologischer Functionen auf den Körperbau oder auf andere Functionen entweder des nämlichen Organismus oder auch anderer mit demselben in Wechselbeziehungen stehender Organismen einen Einfluss gewinnt. Verhältnissmässig am klarsten gestalten sich diese Anpassungen dann, wenn sie sich innerhalb eines einzigen Wesens vollziehen. Die einfachsten Fälle dieser Art, die zum Theil in das Gebiet der mechanischen und chemischen Anpassung herüberreichen, bestehen in der Ausbildung der Organe durch Uebung, ihrer Verkümmerung durch Nichtübung*). Andere individuelle Anpassungen werden durch das Nervensystem vermittelt, dessen Centraltheile wichtige Einrichtungen zur wechselseitigen Regulation der Functionen enthalten. Die Wechselwirkungen zwischen Herz- und Gefässinnervation, die Selbststeuerung der Athmung, die Wärmeregulirung durch Haut und Lungen sind augenfällige Beispiele solcher Art**). Gerade weil schon der normale Ablauf der Lebensprocesse überall auf einer wechselseitigen Regulirung der Functionen beruht, desshalb wird es begreiflich, dass bei der Einwirkung abnormer Verhältnisse durch die nämlichen Hülfsmittel eine Ausgleichung der Störungen geschehen kann, welche die Widerstandsfähigkeit des Organismus vergrössert. So werden Circulationsstörungen zunächst durch gesteigerte Herzaction und dann durch die in Folge derselben eintretende Vergrösserung des Herzens compensirt; die Abnahme der athmenden Oberfläche bei Lungenerkrankungen gleicht sich aus durch gesteigerte Respirationsfrequenz, u. s. w.

Liegen in allen diesen Fällen in bestimmten Reflexmechanismen des centralen Nervensystems oder andern verhältnissmässig leicht übersehbaren Wechselbeziehungen der Organe die Quellen der functionellen Anpassung, so wird dagegen das Verständniss der letzteren schwieriger, wenn sie nicht mehr auf einen einheitlichen Organismus sich beschränkt, sondern zwischen verschiedenen, oft weit von einander abstehenden Wesen sich vollzieht. Wie sollen wir es deuten, wenn Insekten und die Blüthen, die sie besuchen, sich aufs genaueste nach einander richten, indem die Form der Mundtheile der Insekten und die Gestaltung der Blüthenorgane sichtlich einander angepasst sind, oder wenn sehr häufig die Färbungen der Thiere mit ihrer Umgebung übereinstimmen, ja wenn manchmal Form

*) Vgl. Darwin, Das Variiren der Thiere und Pflanzen etc., I, S. 91, 153 f.

**) Vgl. mein Lehrbuch der Physiologie, 4. Aufl., S. 357, 414, 492.

und Färbung auf das treueste umgebende Gegenstände, wie ein Blatt oder einen Baumzweig, nachzuahmen scheinen?*) Darwin suchte diese und zahlreiche andere ihnen ähnliche Erscheinungen hauptsächlich durch zwei Voraussetzungen zu erklären: erstens durch die Annahme einer unbegrenzten Variabilität der Individuen, und zweitens durch einen »Kampf ums Dasein«, welcher den alleinigen Fortbestand derjenigen Varietäten sichere, deren Eigenschaften den Lebensbedingungen am meisten angepasst seien. Von diesen Voraussetzungen lässt sich aber nur die zweite einigermassen durch die Beobachtung bestätigen. Dagegen bewegt sich die Variabilität der Individuen erfahrungsgemäss nur zwischen engen Grenzen, wie dies ja auch die Gültigkeit des Vererbungsgesetzes mit sich bringt. Nun steht es allerdings frei, eine beinahe beliebig lange Zeit für die Ausbildung einer dauernden Veränderung zu Hülfe zu nehmen. Aber es bleibt die Schwierigkeit, dass bei jedem einzelnen Vorgang dieser Art ein Anfang gegeben sein muss, der die bestimmte Richtung zweckmässiger Anpassung bereits besitzt, und der doch seinerseits noch nicht durch den Kampf ums Dasein bedingt sein kann. Wenn z. B. Farbe und Geruch für viele Blüthen nützlich sind, weil sie dadurch aus der Ferne den sie besuchenden Insekten, die den Samenstaub von einer Blüthe zur andern tragen, kenntlich werden, so ist damit nicht im geringsten begreiflich gemacht, durch welche Bedingungen ursprünglich bestimmte Farb- und Geruchsstoffe in jenen Blüthen entstanden sind. Kennten wir aber die Ursachen dieses Vorgangs, so wäre uns damit ohne Zweifel auch für die weitere Steigerung desselben eine von dem Insektenbesuch ganz unabhängige Causalerklärung in die Hand gegeben, und der letztere würde vielleicht zu einem secundären Moment von bloss unterstützendem Charakter herabgedrückt. Ebenso ist es verständlich, dass der Schmuck gewisser männlicher Thiere durch die Bevorzugung, welche die Weibchen den damit ausgestatteten Bewerbern gewähren, befestigt und möglicher Weise sogar gesteigert werden kann. Aber es bleibt nicht nur vollkommen unerfindlich, wie das Liebesbedürfniss einer primitiven Henne im Stande gewesen sein soll, den Hahn mit den Anfängen von Kamm und Sporn auszustatten, sondern es spricht auch alle psychologische Wahrscheinlichkeit dagegen, dass jemals dem Ungewohnten freiwillig der Vorzug vor dem Gewohnten gegeben worden sei.

Darwin selbst hat sich der Triftigkeit dieser Bedenken sicherlich nicht verschlossen. Denn in den späteren Auflagen seines Werkes »über die Entstehung der Arten« hat er gegenüber der unbegrenzten Variabilität und Concurrenz die Bedeutung der direct verändernden Wirkung der Lebensbedingungen stärker betont. Freilich aber sind hier gerade die functionellen Anpassungen zwischen verschiedenen Wesen noch beinahe völlig dunkel

*) Herm. Müller, Befruchtung der Blumen durch Insekten. Leipzig 1872. Wallace, Beiträge zur Theorie der natürl. Zuchtwahl. Deutsch von A. B. Meyer. Erlangen 1870, S. 51 f.

in Bezug auf ihre ersten Entstehungsursachen. Vorläufig steht nur die eine Forderung fest, dass diese Ursachen zunächst individuelle sein müssen, und dass daher durch die Wechselbeziehungen der Individuen zwar gewisse Wirkungen verstärkt, niemals aber solche hervorgebracht werden können. In beiden Fällen dürfte ein Moment bisher allzu sehr der Beachtung entzogen geblieben sein. Dasselbe besteht in dem Einfluss, welchen die Willenshandlungen thierischer Wesen direct auf ihre eigene Organisation und indirect auf die Organisation anderer Wesen, mit denen sie in Wechselwirkungen stehen, ausüben. Bei dem »Kampf ums Dasein« hat man, insoweit es sich bei demselben um einen Wettstreit um Nahrung und Fortpflanzung handelt, diesem Einflusse bereits Rechnung getragen, ohne dass freilich an die psychologische Natur desselben gedacht wurde. Wenn man bedenkt, dass schon die niedersten Organismen einfachste Triebäusserungen erkennen lassen, die eine unbefangene Beobachtung als Willenshandlungen auffassen muss*), so dürfte dieser Einfluss bei den Vorgängen der functionellen Anpassung kaum hoch genug anzuschlagen sein, und vielleicht können dereinst noch die fundamentalsten Probleme der zusammengesetzten Organisation hierauf zurückgeführt werden. Dies ist aber logisch um so bedeutsamer, als damit der Zweck jene objective Bedeutung gewinnt, bei welcher Zweckvorstellungen als die Ursachen bestimmter Naturvorgänge auftreten. (Vgl. Bd. I, S. 580 und oben S. 439.)

### c. Causale Principien der Biologie.

Der Biologie ist die Forderung einer causalen Erklärung der Lebenserscheinungen zunächst von aussen, von den exacteren Gebieten der Naturlehre aus, entgegengebracht worden, und lange sind die Nachtheile dieses fremdartigen Ursprungs fühlbar gewesen. Die iatromechanischen Richtungen erschöpften sich in mechanischen Deutungen, ohne meistens nach einer Bestätigung ihrer Hypothesen zu fragen. Nur wenige Erscheinungen von verhältnissmässig einfachem Charakter, wie der Kreislauf des Blutes und die thierischen Ortsbewegungen, waren schon frühe einem mechanischen Verständnisse zugänglich geworden. Für die meisten andern Lebensvorgänge eröffnete sich erst dann die Möglichkeit einer causalen Analyse, als die Chemie in das Stadium ihrer wissenschaftlichen Entwicklung getreten war. Denn nicht lange konnte es verborgen bleiben, dass die Lebensprocesse entweder selbst in chemischen Verbindungen und Zersetzungen bestehen oder innig an solche gebunden sind. Nichts be-

*) Vgl. Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., I, S. 457. Auch Th. W. Engelmann schliesst seine Beobachtungen über die Lebenserscheinungen der Schizomyceten mit der Bemerkung, eine vollständige Erklärung derselben halte er für unmöglich „ohne die Annahme eines die Bewegungen regulirenden Empfindungsvermögens“. (Botan. Zeitg., 1882, Nr. 20 u. 21.)

zeichnet deutlicher den nahen Zusammenhang, in welchem die neuere Entwicklung der physiologischen zu derjenigen der chemischen Forschung steht, als die Thatsache, dass beide von einer und derselben Entdeckung ausgegangen sind: von der Erkenntniss des Wesens der Verbrennung. Lavoisier, der Entdecker des Sauerstoffs, ist zugleich der Erste, der die thierische Athmung als einen Verbrennungsvorgang auffassen lehrte und damit auf die Quellen der thierischen Wärmebildung hinwies. Lavoisier und Laplace unternahmen es, die Intensität dieses Verbrennungsprocesses an der erzeugten Wärmemenge zu messen. Sie eröffnen damit die Reihe jener calorimetrischen Versuche, welche in diesem Jahrhundert die Hauptgrundlagen für die Erkenntniss des thierischen Kräftewechsels gebildet haben. Bald schliesst sich an die chemische Erforschung der thierischen Athmung die durch die Untersuchungen von Ingenhouss, Senebier und Saussure vermittelte Erkenntniss des reducirenden Gaswechsels der grünen Pflanzentheile und ihrer Beeinflussung durch das Licht. Damit ist der erste Schritt zu jener Statik des organischen Stoffwechsels gethan, deren Begründung die glänzendste Leistung des chemischen Theils der neueren Physiologie, wenn nicht der Physiologie überhaupt ist. Die grossartige Beziehung zwischen Pflanzen- und Thierwelt, die sich durch die Erkenntniss des Kreislaufs der Stoffe eröffnet, ist aber nicht bloss an sich eine Thatsache vom höchsten Interesse, sondern sie ist insbesondere auch desshalb bedeutungsvoll, weil sie das erste klar erkannte Beispiel einer wechselseitigen Regulation von Lebensvorgängen abgiebt. Je mehr es in Folge des Fortschritts der physikalischen und chemischen Methodik der Physiologie gelungen ist, die Erscheinungen in ihre physikalischen und chemischen Elementarprocesse zu zerlegen, um so mehr haben sich analoge regulatorische Vorgänge auch innerhalb des einzelnen Organismus als eine wesentliche Eigenthümlichkeit des Lebens herausgestellt. So wird die Nahrungsaufnahme bestimmt durch den Wärme- und Kraftverbrauch, die Blutzufuhr zu den Verdauungsdrüsen und die secretorischen Processe in diesen werden angeregt durch die mechanischen und chemischen Bedingungen, welche die Nahrungsaufnahme begleiten, u. s. w. Ebenso gehören hierher die oben schon besprochenen functionellen Anpassungen, die namentlich durch das Nervensystem der Thiere in vielseitigster Weise vermittelt werden, für die es aber auch der Pflanze keineswegs an mannigfaltigen Vorrichtungen fehlt, obgleich dieselben natürlich in Folge des Mangels an einem dem Nervensystem gleichenden Functionscentrum mehr direct auf die einzelnen Organe selber vertheilt sind. So erweist sich jeder einzelne Organismus als ein aus einer grossen Zahl in einander greifender Selbstregulirungen zusammengesetzter Apparat, der, sobald er mit einer Anzahl anderer gleich- und verschiedenartiger Organismen in Wechselwirkung tritt, nun alsbald auf das so entstehende Ganze ebenfalls das Princip der Selbstregulirung übertragen muss.

Mit dem Umsichgreifen dieser Betrachtungsweise, durch welche erst

die von den alten Iatromechanikern gehegte Idee der »natürlichen Maschine« in die richtige Beleuchtung rückte, ist die Physiologie dem allgemeinen Princip nahe getreten, das sie ihren Causalerklärungen zu Grunde legen kann, auf so verschiedenen physikalischen und chemischen Bedingungen dieselben im einzelnen auch beruhen mögen. Dieses allgemeinste Princip ist kein anderes als dasjenige der gesammten Naturlehre: das Princip der Constanz der Energie.

Die Biologie gebraucht dasselbe bald als ein Gesetz, in welches die durch Induction gefundenen Thatsachen als specielle Fälle sich einfügen, bald als ein Postulat, welches sie einem Zusammenhang noch zu zergliedernder Erscheinungen entgegenbringt. Als ein Gesetz hat das Energieprincip im allgemeinen für alle jene Erscheinungen des Kräftewechsels in der organischen Natur sich bewährt, welche an die Vorgänge des Stoffwechsels gebunden sind. Die Verhältnisse wechselseitiger Regulation in der Statik des Stoffwechsels mussten von Anfang an auf ein Gesetz hinweisen, welches eine ähnliche Constanz, wie sie sich in Bezug auf den Austausch der Stoffe der Beobachtung darbietet, auch für die dynamische Seite des Vorgangs verbürge. In der That bildet schon der einzelne Organismus vermöge der Vorrichtungen der Selbstregulation, mit denen er ausgestattet ist, ein bis zu einem gewissen Grade in sich geschlossenes System des Stoff- und Kräftewechsels, wie es ähnlich nur entweder an künstlichen Maschinen oder im grossen und hier freilich zugleich viel vollkommener an unserm Sonnensystem verwirklicht ist. In höherem Grade noch nähert sich dem Stoff- und Kräftehaushalt des letzteren ein Complex verschiedenartiger, pflanzlicher und thierischer Organismen, der einen vollständigen Stoffwechselkreislauf zu bilden vermag und daher schon bei der Entdeckung der complementären Formen des respiratorischen Gasaustausches einem »Mikrokosmus« verglichen wurde. Aber in der Unerlässlichkeit des Sonnenlichts für die chemische Werkstätte der Pflanze tritt zugleich die Gebundenheit einer solchen Welt im Kleinen an den allgemeinen Zusammenhang kosmischer Kräftewirkungen zu Tage. So ist es denn sicherlich kein zufälliger Umstand, dass Physiologen die ersten Verkünder des Energieprincips gewesen sind, und dass der Kräftewechsel der Organismen zu den ersten Anwendungen desselben gehörte*).

Die physiologische Durchführung des Energieprincips trennt sich nun in zwei verschiedene Aufgaben. Die erste besteht in der Beurtheilung des gesammten Wechsels der Energie in einem einzelnen Organismus oder in einem gegebenen Zusammenhang organischer Wesen. Diese Untersuchung,

*) J. R. Mayer, Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Liebig's Annalen, 1842. H. Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. Vgl. ausserdem namentlich die Abhandlung von R. Mayer, Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel. Heilbronn 1846. (Abgedruckt in: Die Mechanik der Wärme, 2. Aufl., S. 13 f.)

die bis jetzt allein in einigermassen zureichender Weise durchgeführt ist, geht vollständig der allgemeinen Statik des Stoffwechsels parallel. Sie frägt nicht nach den speciellen Umwandlungen der Energie im Verlauf der Lebensvorgänge, sondern sie sucht nur, ähnlich wie es bei der Beurtheilung des Nutzeffects einer Arbeitsmaschine geschieht, die Zu- und Abfuhr der Energie und die Umwandlung der potentiellen in actuelle Energie oder dieser in jene quantitativ zu schätzen. Die Schwierigkeiten, die hier sich darbieten, gehören mehr der thermochemischen als der physiologischen Untersuchung an. Es führt zu falschen Resultaten, wenn man, wie es ursprünglich geschah, den Energiewerth der im Pflanzen- und Thierkörper enthaltenen organischen Verbindungen bloss nach der Kohlenstoff- und Wasserstoffmenge schätzt, ohne Rücksicht auf die Art, wie die Atome an einander gebunden sind. Denn eine Verbindung repräsentirt einen um so grösseren Vorrath an potentieller Energie, je loser, einen um so geringeren, je fester ihre Atome an einander gekettet sind. Eine vollständige Beurtheilung des Energiewechsels in einem Organismus setzt also nicht nur voraus, dass die Zu- und Abfuhr an actueller Energie in der Form von Licht, Wärme und mechanischer Arbeit bekannt sei, sondern dass ausserdem der Verbrennungs- oder Energiewerth aller Stoffbestandtheile, sowie die Veränderungen, welche derselbe in Folge der stattfindenden Verbindungen und Zersetzungen erfährt, gemessen werde. Dieses umfassende Problem ist, obgleich es keine erheblichen methodischen Schwierigkeiten darbietet, dennoch wegen der zahlreichen Einzeluntersuchungen, die es voraussetzt, erst theilweise gelöst.

Die zweite Aufgabe bei der physiologischen Anwendung des Energiegesetzes besteht in der unter seiner Führung vorgenommenen Untersuchung der einzelnen Lebensvorgänge. Hier handelt es sich darum, nicht bloss im allgemeinen die Bewegung der Energie quantitativ zu verfolgen, sondern ihre speciellen Umwandlungen mit Rücksicht auf die daraus hervorgehenden physiologischen Leistungen nachzuweisen. Es ist klar, dass dabei die eingehendste physikalische und chemische Zergliederung der Processe vorausgesetzt wird. In Folge der methodischen Schwierigkeiten, die sich einer solchen darbieten, ist darum diese Seite der Anwendungen des Energiegesetzes erst wenig fortgeschritten. So sind z. B. die Physiologen noch keineswegs darüber einig, auf welchen speciellen Vorgängen jene Oxydationsprocesse beruhen, durch welche das Blut die bekannten Veränderungen aus der arteriellen in die venöse Beschaffenheit erfährt, ja an welchen Orten, ob im Blute selbst oder in den Geweben, diese Oxydationen stattfinden. So hat uns ferner das Studium der elektrischen, thermischen und elastischen Eigenschaften des Muskels noch kaum der Lösung des Problems nach dem Wesen der Contractionskraft näher geführt. Immerhin hat sich in solchen Fällen eine Art provisorischer Anwendung des Energiegesetzes nicht selten fruchtbar erwiesen, indem man, von der näheren Beschaffenheit der Energieformen abstrahirend, die Vorgänge lediglich als Bewegungen

irgend welcher Art ansieht, auf die das Energiegesetz anwendbar ist, ähnlich wie dies schon auf physikalischem Gebiet in den allgemeinen Untersuchungen der mechanischen Wärmetheorie zu geschehen pflegt. Namentlich die Zergliederung der Innervationsvorgänge fordert zu einer derartigen Betrachtung heraus. Eine allgemeinere Anwendung derselben auf die Lebensvorgänge überhaupt werden wir unten besprechen *).

## 3. Die biologischen Grundbegriffe.

### a. Das organische Individuum und der Elementarorganismus.

Die unmittelbar gegebenen Objecte der biologischen Forschung sind die individuellen Organismen. Sie erweisen sich nach Bau und Function zumeist als höchst zusammengesetzte Gebilde, und es erhebt sich daher nothwendig die Frage nach den biologischen Elementen, aus denen sie aufgebaut sind. Diese Frage entspricht vollständig der innerhalb der physikalischen und chemischen Forschung entstehenden nach dem elementaren Substrat der physikalischen und chemischen Vorgänge. Aber wenn schon in diesen beiden Fällen die Elementarbegriffe gewisse Unterschiede zeigten, die aus ihrer verschiedenen Anwendung entspringen, so trennt eine noch grössere Kluft die biologischen Elemente von den analogen Einheiten der unorganischen Naturlehre. Diese, die physikalischen und chemischen Atome und Molecüle, müssen sich wiederfinden in den Organismen, und jede physikalische oder chemische Untersuchung der letzteren muss auf sie zurückgreifen. Aber ausserdem ist es eine naheliegende Forderung, dass die Erscheinungen, in denen die charakteristischen Unterschiede des Lebendigen und Leblosen bestehen, in ihrer elementarsten Form an gewissen Einheiten von specifischer Beschaffenheit verwirklicht seien. Solche Erscheinungen sind die Functionen des Wachsthums durch Assimilation, der spontanen Bewegung und der Fortpflanzung. Die Elemente, an denen sie auftreten, besitzen die physiologische Bedeutung von Elementarorganismen, und die Analyse ihrer einfachen Lebenserscheinungen muss gemäss dem Princip der Einfachheit der erste Schritt zur Erforschung der causalen Bedingungen des Lebens überhaupt sein.

Die Biologie geniesst nun den grossen Vortheil, dass ihre Elemente nicht bloss aus den Erscheinungen an zusammengesetzten Körpern erschlossen, sondern direct mit Hülfe des Mikroskops gesehen werden können. Dennoch hat man auch die Elementarorganismen aus allgemeinen Gründen vorausgesetzt, noch ehe sie beobachtet waren **). Ihre wirkliche Entdeckung

---

*) Vgl. meine Untersuchungen zur Mechanik der Nerven und Nervencentren, I, S. 261 f.; II, S. 108 f., und unten Nr. 3, c.

**) Vgl. in dieser Beziehung besonders Oken, Lehrbuch der Naturphilosophie, II, S. 25 f. Trotz der leeren Analogien zwischen dem Kosmologischen

beginnt aber mit dem hauptsächlich durch Schleiden geführten Nachweis, dass alle Pflanzen aus Zellen entstehen und aus solchen zusammengesetzt sind. Nach diesem Vorbilde bezeichnete Schwann auch die thierischen Elementartheile als Zellen und schrieb ihnen eine analoge, aus Kern, Membran und flüssigem Inhalt bestehende Zusammensetzung zu*). Seit dieser Zeit hat die Auffassung von dem Bau der Zelle so gewaltige Umwandlungen erfahren, dass der Name »Zelle« nur noch die Bedeutung einer gleichgültigen Gesammtbezeichnung beanspruchen kann, die ihre Bevorzugung vor dem an sich zutreffenderen und bereits von Schwann gebrauchten Wort »Elementarorganismus« nur ihrer Kürze verdankt. Diese Umgestaltungen sind aber bis jetzt ausschliesslich durch die Vervollkommnung der morphologischen Methode herbeigeführt, während die für die physiologischen Probleme vor allem aussichtsreiche Combination mit der experimentellen Untersuchung kaum erst begonnen hat.

Von ihren Anfängen an ist in der Morphologie der Zelle die Frage nach dem Verhältniss des organischen zu dem unorganischen Individuum, der Zelle zum Krystall erörtert worden. Schwann hielt die Zellenbildung für eine Krystallisation imbibitionsfähiger Stoffe, welche in Folge der Bildung einer den zuerst ausgeschiedenen Kern umgebenden Membran, die von aussen Flüssigkeit einsauge, in der Form von weichen kugelförmigen Massen erfolge. Diese Annahmen haben sich nirgends in der Beobachtung bestätigt, und sie sind, seitdem vornehmlich Max Schultze auf die secundäre Bedeutung und den häufigen Mangel der Membran hinwies, vollends unhaltbar geworden**). Dagegen sind theils in Folge der Untersuchung gewisser Zellstructuren mit dem polarisirten Lichte theils auf Grund einer eindringenderen Analyse des eigenthümlichen Aggregatzustandes der Gewebe und ihrer Elemente wesentlich andere Anschauungen an die Stelle getreten. Nach dem Vorgang von Naegeli betrachtet man die in Zellmembranen oder auch in festeren Niederschlägen innerhalb der Zellen abgelagerten Elemente wegen ihrer meist doppelbrechenden Eigenschaften als kleine, regelmässig orientirte Krystalle, die in Folge der Verwandtschaft ihrer Substanz zum Wasser in der Regel sich nicht zu grösseren Krystallen verbinden, sondern in kugelförmigen oder andern unkrystallinischen Massen sich abscheiden. Während also der Krystall aus vollkommen gleichartigen Molecülen oder Molecülgruppen besteht, so dass wir ihn, falls er regelmässig ausgebildet ist, als das vergrösserte Bild der unsichtbaren

---

und Organologischen, welche Oken's Darstellung durchzieht, lässt sich nicht verkennen, dass die Construction seiner „Urbläschen" nebenbei auf den oben angedeuteten biologischen Forderungen beruht.

*) Th. Schwann, Mikroskopische Untersuchungen über die Uebereinstimmung in der Structur und in dem Wachsthum der Thiere und Pflanzen. Berlin 1839.

**) Max Schultze, Archiv f. Anatomie und Physiologie, 1861, S. 17 f.

kleinsten Theile betrachten können, werden in der organisirten Substanz die Molecüle und Molecülgruppen durch veränderliche Wassermengen zu unkrystallinischen kleinen Körpern vereinigt. Aus grösseren Verbänden derselben bauen dann die sichtbaren Elemente sich auf*). Die Gestaltung der letzteren ist zunächst von jener zähflüssigen, contractilen Substanz abhängig, welche, als der urprünglich anscheinend gleichartige Leibesinhalt aller Elementarorganismen, den Namen Protoplasma davongetragen hat. Die tiefer eindringende mikroskopische Analyse hat aber gezeigt, dass das Protoplasma ebenso wenig wie der Kern der Zelle von der früher vermutheten relativ einfachen Beschaffenheit ist, sondern dass beide eine ebenso complicirte morphologische wie chemische Structur besitzen. Von besonderem Interesse ist die erstere hauptsächlich in solchen Fällen, wo sie eine bestimmte Regelmässigkeit erkennen lässt, oder wo sie unter dem Einfluss functioneller Vorgänge bestimmte Veränderungen erfährt, wie dies bei den vom Kern ausgehenden Zellentheilungen der Fall ist**). Obgleich diese Veränderungen bis jetzt bloss der morphologischen Analyse zugänglich sind und es uns daher an einer causalen Erklärung derselben noch fehlt, so erwecken doch die Erscheinungen in fast zwingender Weise die Vorstellung einer Reihe mit mechanischer Nothwendigkeit auf einander folgender molecularer Anziehungen und Abstossungen. Nur von einer tiefern Erkenntniss der dem äusseren Formwechsel zu Grunde liegenden chemischen Processe lässt sich das dereinstige Verständniss solcher Vorgänge

*) Vgl. C. v. Naegeli, Theorie der Gärung. München 1879, S. 121 f. Es ist zwar gegen Naegeli's Theorie eingewandt worden, dass auch durch die molecularen Spannungen der Zellmembranen eine Doppelbrechung hervorgerufen werden kann (Strasburger, Ueber den Bau und das Wachsthum der Zellhäute. Jena 1882). Eine Mitwirkung dieses Factors ist in der That für gewisse Fälle nicht als unmöglich abzuweisen. Dagegen treten uns häufig in thierischen Zellen, wie z. B. in den Muskelzellen, Elemente mit doppelbrechenden Eigenschaften unter Bedingungen entgegen, die eine solche Erklärung ausschliessen. Auch dürfte die Thatsache, dass die gewebebildenden Stoffe und ihre Verwandte, wie Eiweiss, Stärke, Gummi u. s. w., in Lösungen die Eigenschaft besitzen, die Polarisationsebene zu drehen, kaum anders als durch die Annahme zu deuten sein, dass auch in diesen Lösungen regelmässig orientirte Krystallmolecüle sich vorfinden. Mit seiner Anschauung über den krystallinischen Zustand der organisirten Elemente verbindet Naegeli die weitere, dass dieselben auschliesslich durch Intussusception wachsen, indem namentlich neue Membranschichten stets innerhalb der schon vorhandenen sich ablagern. Es scheint jedoch, dass dieser Vorgang mindestens nicht als allgemeine Regel festgehalten werden kann, da in vielen Fällen die Erscheinungen auf ein Wachsthum durch äussere Auflagerung (Apposition) hinweisen.

**) Hinsichtlich des Details sind besonders zu vergleichen Strasburger, Zellbildung und Zelltheilung, 3. Aufl., Jena 1880, und Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung, Leipzig 1882.

erwarten. Die Erforschung des Chemismus der Zelle leidet aber unter der Schwierigkeit, dass die chemische Analyse grösserer Massen bedarf, und dass erst, nachdem an ihnen die Untersuchung durchgeführt ist, mittelst mikrochemischer Reactionen die Betheiligung der einzelnen morphologischen Substrate an dem Chemismus des Ganzen bis zu einem gewissen Grade erschlossen werden kann. Von diesem Princip ausgehend, hat man bis jetzt erst die elementaren Assimilations- und Wachsthumsvorgänge einigermassen zu erforschen vermocht, indem theils die Stoffwechselprocesse der zusammengesetzten Pflanzen und Thiere mit den Resultaten morphologischer und mikrochemischer Analyse verglichen, theils aber die chemischen Wirkungen untersucht wurden, die an gewisse Complexe von Elementarorganismen gebunden sind. Solche Wirkungen sind die von niederen Organismen ausgehenden Gährungsvorgänge. Das Studium der letzteren ist hauptsächlich desshalb von allgemeinerem biologischem Interesse, weil die an den meisten Gährungen betheiligten organischen Wesen dem primitiven Zustand von Elementarorganismen entsprechen, so dass hier am ehesten aus den Massenerscheinungen direct auf die Elementarerscheinungen zurückgeschlossen werden kann. Voraussichtlich wird auf ähnlichen Wegen die Function der Bewegung der Zellen allmählich dem Verständnisse zugänglicher werden, um so mehr, als mit der tiefer eindringenden Untersuchung die Wahrscheinlichkeit zugenommen hat, dass alle Protoplasma-, Flimmer- und Muskelbewegungen Erscheinungen ähnlichen Ursprungs sind, die darum auch ohne scharfe Grenzen in einander übergehen*).

Viel grössere Schwierigkeiten bietet die dritte Elementarfunction, die Zellvermehrung, dar. Hier sind die wichtigsten Vorgänge an so kleine Substratmassen gebunden, dass wir voraussichtlich noch für lange Zeit auf die Resultate der rein morphologischen Analyse beschränkt bleiben werden. Dies ist um so mehr zu beklagen, als gerade das Zeugungsproblem zu der Frage nach Ursprung und Wesen der Lebensprocesse in nächster Beziehung steht. Immerhin ist es eine Thatsache, durch deren Feststellung auch hier die morphologische Untersuchung einen bedeutsamen Gesichtspunkt zur Geltung gebracht hat. Diese Thatsache besteht in der fundamentalen Uebereinstimmung der Zeugung zusammengesetzter Organismen mit der Vermehrung der einfachen Zellen, eine Uebereinstimmung, welche ihrerseits an das wichtige biologische Gesetz geknüpft ist, dass der Keim, und zwar sowohl das Ei wie die Spermazelle, eines jeden zusammengesetzten Organismus nach Form und Function die Bedeutung eines Elementarorganismus besitzt. Nimmt man hierzu die weitere Thatsache, dass, so weit unsere sichere Erfahrung reicht, keine Zelle anders als aus einer vorhandenen älteren Zelle entsteht, so gewinnen das »omne vivum ex ovo« des Harvey und

*) Vgl. Th. W. Engelmann, Physiologie der Protoplasma- und Flimmerbewegung. Hermann's Handb. d. Physiol., I, S. 344 f.

die neue Form »omnis cellula e cellula«, die Virchow jenem Satze gegeben, eine im wesentlichen übereinstimmende Bedeutung. Zugleich sind wir damit aber der wichtigen Frage nach dem Verhältniss des Elementarorganismus zum Gesammtorganismus näher getreten.

Diese Frage ist theils vom Gesichtspunkte der Entstehung, theils von dem des functionellen Zusammenhangs aus zu beantworten. Der individuelle Organismus ist aus einem einzigen Keim oder Ei hervorgegangen, und es muss ausserdem in demselben das Princip der Arbeitstheilung verwirklicht sein, insofern die Functionen der einzelnen Theile, sich wechselseitig bedingend und unterstützend, an einander gebunden sind. Durch das letztere Merkmal unterscheidet sich das organische Individuum von einer Generationsfolge mehrerer Individuen, wenn auch in solchen Fällen, wo die Generationsfolge zu einem Individuenstock vereinigt bleibt, die Unterscheidung Schwierigkeiten haben kann, da eben hier die Grenzen des individuellen Lebens einigermassen fliessende werden, so dass eine allgemeingültige objective Entscheidung überhaupt nicht mehr möglich ist. Unter allen Umständen muss nun aber die Einheit der Individualität an gewisse Bedingungen gebunden sein, und als den phänomenalen Ausdruck dieser Bedingungen werden wir einstweilen die Einheit der Keimzelle betrachten dürfen, aus deren fortgesetzter Theilung der Organismus hervorgegangen ist. Ueber das Verhältniss dieser Keimzelle zum Gesammtorganismus sind zwei Anschauungen möglich. Entweder denkt man sich, der letztere sei potentiell in der Keimzelle schon enthalten, seine Entwicklung beruhe auf den ursprünglich in ihr liegenden Kräften. Oder man nimmt an, jede einzelne Stufe der Entwicklung sei eine nothwendige Folge der theils unmittelbar in dem Keime selbst vermöge seines gerade vorhandenen Zustandes, theils in äusseren Verhältnissen gegebenen Bedingungen, und es sei demnach auch der Gesammtorganismus ein Product aller der einzelnen Wirkungen, welche im Laufe der Entwicklung der Keim selbst äussert und von aussen erfährt. Es ist klar, dass diese Gegensätze wieder den früher besprochenen der Evolution und der Epigenesis entsprechen. (S. 442.) Doch ist es bemerkenswerth, dass manche Biologen, die nach der allgemeinen Richtung ihrer Ideen einem gewissen Evolutionismus huldigen, bei der vorliegenden Frage epigenetischen Ansichten nicht abgeneigt sind. Darin zeigt sich abermals, dass diese Gegensätze mit dem zunehmenden Streben nach causalem Verständniss der Entwicklungsvorgänge im Verschwinden begriffen sind.

Durch den Nachweis, dass der Keim die morphologische Natur der Zelle besitzt, ist die Auffassung nahe gelegt, alle Unterschiede organischer Entwicklung seien auf latente Differenzen der Keimzellen zurückzuführen. In der Vererbungstheorie hat diese Auffassung eine Unterstützung gefunden, da man es in der Regel als einen selbstverständlichen Corollarsatz des Vererbungsgesetzes betrachtete, dass die vererbten Charaktere in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge entstehen, indem jeder der-

selben während einer gewissen Zeit latent bleibe. Dem gegenüber wurde jedoch besonders durch die mechanischen Anpassungen der Gewebe die Ansicht begünstigt, ein wesentlicher Factor bei der Gestaltung des Gesammtorganismus sei in den unmittelbaren Wechselwirkungen der Theile gegeben. Es ist augenfällig, dass die erste dieser Anschauungen zu einer einseitig teleologischen Auffassung des Vererbungsgesetzes führen muss, die sich den Weg zu dessen causaler Interpretation selber versperrt. Denn die Causalerklärung kann einen gegebenen Zustand immer nur aus dem unmittelbar vorangegangenen ableiten, und die causale Beziehung von einander entfernter Entwicklungszustände kann daher nur durch die successive Verfolgung aller vorhandenen Zwischenstufen ermittelt werden. Da nun aber, wie vor allem die Erscheinungen der mechanischen Anpassung lehren, bei dem Uebergang jeder Stufe in die nächstfolgende äussere Einflüsse und Wechselwirkungen coexistirender Elemente zur Geltung kommen, so ist die Annahme, dass in der Keimzelle selbst alle aus ihr hervorgehenden Entwicklungen als latente Energien enthalten seien, von vornherein ein unvollziehbarer Gedanke. Viel eher wird vom Standpunkte der causalen Betrachtung aus die ganze Entwicklung der Keimzelle zum fertigen Organismus als eine Reihenfolge von Auslösungen anzusehen sein, deren Erfolge ausserdem unter dem Einfluss der verwickelten physikalischen Bedingungen stehen, die theils durch die unmittelbaren Wechselwirkungen der Theile, theils durch die Einflüsse der Aussenwelt gesetzt werden. Wenn trotzdem gewisse Entwicklungskreise einander so ähnlich sind, dass die Beobachtung kaum merkliche Unterschiede zwischen ihnen aufzufinden vermag, so beweist dies eben nur, dass selbst so verwickelte Vorgänge in Bezug auf die bei ihnen wirksamen Factoren und die Art ihres Ineinandergreifens eine grosse Constanz darbieten können. Desshalb ist aber doch die Befruchtung des Eies in nicht anderem Sinne Ursache des entwickelten Organismus, als etwa das Sonnenlicht die Ursache für die Existenz der lebenden Wesen auf unserer Erde ist. Nicht einmal in der Periodicität der Entwicklungserscheinungen kann, angesichts der zahlreichen Beispiele periodischen Wechsels der Energie in der unorganischen Natur, eine specifische Eigenthümlichkeit derselben gesehen werden. Wohl aber weist diese Eigenschaft darauf hin, dass mit jenen Auslösungsprocessen, die wir bei der Entwicklung des Keimes zum Gesammtorganismus voraussetzen mögen, Bedingungen verbunden sein müssen, die schliesslich einen Stillstand des Processes herbeiführen. Da Vermehrung und Wachsthum der Zellen die elementaren Vorgänge sind, die das Wachsthum des gesammten Organismus zusammensetzen, so lassen sich jene Bedingungen dahin formuliren: Jeder Elementarorganismus ist nur einer begrenzten Vermehrung und einer begrenzten Massezunahme fähig. Dass die hier gemeinten Grenzen nicht völlig feste, sondern in Folge meist noch unbekannter Ursachen variable sind, lehren die individuellen Unterschiede der Wachsthumsgrösse und die Fälle von Bildungs-

mangel und -excess. Die Existenz jener Grenzen aber ist eine Theilerscheinung der allgemeinen Thatsache, die in der Begrenzung des Lebens selbst uns entgegentritt.

### b. Die systematischen Begriffe der Biologie.

Da unserer unmittelbaren Beobachtung überall nur das Individuum gegeben ist, so sind die Begriffe von Art, Gattung, Familie u. s. w. Erzeugnisse einer generalisirenden Abstraction. Die Bedingungen und Zwecke der letzteren sind in der allgemeinen Methodenlehre erörtert worden. (Abschn. I, Cap. II, S. 40 f.) Hier bleibt uns nur übrig, die Bedeutung zu untersuchen, welche die systematischen Begriffe für die Probleme der erklärenden Biologie besitzen.

In den wissenschaftlichen Anschauungen selbst hat sich in dieser Beziehung eine eigenthümliche Wandlung vollzogen. Die ältere Naturgeschichte legte den oberen Classenbegriffen einen um so geringeren theoretischen Werth bei, je mehr sie sich in der Feststellung derselben logischer Willkür bewusst war. Nur die Species galt als ein natürlich gegebener Zusammenhang, mochte man dieselbe nun rein morphologisch definiren als die Individuen, die in allen wesentlichen Merkmalen übereinstimmen, oder physiologisch als diejenigen, die bei sexueller Verbindung einer unbeschränkten Fortpflanzung fähig seien. Die vergleichende Richtung der Naturgeschichte fügte zu der Species noch den Typus als einen ebenfalls durch die Natur selbst gebildeten allgemeineren Gattungsbegriff, der zwar nicht auf gemeinsame Abstammung, aber doch auf irgend eine tiefere Beziehung der unter ihm enthaltenen Formen zurückschliessen lasse. Darwin beseitigte die bisherige Form des Speciesbegriffs, indem er auf die fliessenden Uebergänge der Art in die Varietät und dieser in die individuelle Abänderung, sowie auf die Unhaltbarkeit der physiologischen Kriterien der Fortpflanzungsfähigkeit aufmerksam machte. Die Species rückte dadurch unter die willkürlichen Kategorien der Systematik. Dagegen blieb in der älteren, der polyphyletischen Abstammung der Formen zugeneigten Richtung der Entwicklungstheorie der Begriff des Typus zunächst noch in seinem ihm durch die vergleichende Morphologie zugewiesenen natürlichen Rechte. Die Species hatte daher ihren Charakter der Ursprünglichkeit allmählich dem Typus abgetreten. Mit dem Uebergang der polyphyletischen in die monophyletische Anschauung wurden aber die ursprünglichen Typen auf einen einzigen, den der Keimzelle gleichenden Urorganismus, oder allenfalls sogar auf die formlose Protoplasmamasse eingeschränkt. Die entwickelteren Typen behielten nur die Bedeutung abgeleiteter Stammformen für die einander näheren Gattungen, womit sie übrigens immer noch der auf der Stufenleiter der Ueberordnungen tiefer stehenden Species weit überlegen blieben.

Mit dieser Umkehrung, welche sich durch die Entwicklungstheorie in der biologischen Werthschätzung der systematischen Begriffe vollzog, verband sich

mit innerer Nothwendigkeit eine bestimmtere Auffassung von der Bedeutung der Merkmale, die für die Zwecke der systematischen Eintheilung verwendet werden. Auf dem Standpunkt der älteren Naturgeschichte erschienen zwei Formunterschiede als gleichwerthig, sobald sie für die Beobachtung ungefähr mit gleicher Deutlichkeit bemerkbar waren. Gerade bei verwandten Formen waren dies aber nicht selten solche Eigenschaften, die mit den Lebensbedingungen der Species und mit der Function bestimmter Organe in nahem Zusammenhang standen. Mit dem Vorwalten des genetischen Gesichtspunktes musste gegenüber derartigen physiologischen oder Anpassungsmerkmalen bei der Beurtheilung der systematischen Stellung den rein morphologischen oder Vererbungsmerkmalen der Vorzug eingeräumt werden. Der Charakter eines solchen kommt nun einer bestimmten Formeigenschaft um so gewisser zu, je weniger eine unmittelbare physiologische Bedeutung derselben ersichtlich ist. In der That stellt Darwin geradezu die Regel auf, je weniger ein Theil der Organisation für bestimmte physiologische Zwecke geeignet sei, um so wichtiger sei er für die Beurtheilung der systematischen Stellung; insbesondere wird daher den rudimentären Organen von ihm ein hoher genetischer und systematischer Werth beigemessen *). Auch in dieser Beziehung zeigt es sich, dass sich die genetische Auffassung Darwin's in der vergleichenden Richtung der Naturgeschichte vorbereitet hat. Denn Cuvier und Decandolle bevorzugen bereits in ähnlicher Weise die morphologischen oder »homologen« vor den physiologischen oder »analogen« Charakteren. In beiden Fällen ist dies eine Folge des Vorrangs, welchen sich hier der Begriff des Typus vor dem der Species errungen. Gerade die Darwin'sche Auffassung lässt aber jenen Unterschied der Charaktere wieder als einen fliessenden erscheinen, da es nach ihr kein Merkmal geben kann, das nicht irgend einmal ein physiologisches Bedürfniss erfüllt hätte. Die rein morphologischen sind also lediglich solche physiologische Merkmale, die sich überlebt haben. Dabei ist nun nicht einzusehen, warum ein Merkmal sich durchaus überlebt haben muss, um einen systematischen Werth zu gewinnen, und so erfährt denn auch jene Regel zahlreiche Ausnahmen, in denen gewisse Eigenschaften der Organisation gleichzeitig genetische und functionelle Bedeutung beanspruchen.

Wie auf diese Weise die Entwicklungstheorie die unteren Begriffe der Systematik, vor allen den Speciesbegriff, ihrer Unveränderlichkeit beraubt hat, so sind schliesslich unter ihrer Einwirkung auch die obersten Begriffe derselben, die schon in der gemeinen Wahrnehmung verhältnissmässig sicher fixirten Unterschiede von Pflanze und Thier, schwankend geworden. Nachdem durch das theoretische Einheitsbedürfniss die ursprünglichen Stammtypen auf einen einzigen einfachsten reducirt waren, erhob sich von selbst die Frage, welches Verhältniss zwischen diesem Urorganis-

---

*) Darwin, Entstehung der Arten, 6. Aufl., S. 495 f.

mus und den beiden Hauptformen organischer Wesen anzunehmen sei. Die nächstliegende Antwort lautete: der Urorganismus ist weder Pflanze noch Thier, aber er enthält in sich die Anlage zu beiden, ähnlich wie auch die Zelle bei ihrer ersten Entstehung die specifischen Unterschiede von Pflanzen- und Thierzelle noch nicht ausgebildet hat. Aus dieser Reflexion ist Haeckel's Reich der Protisten hervorgegangen, welches alle diejenigen niedersten Lebensformen vereinigt, die nicht mit Sicherheit zum Pflanzen- oder Thierreich gerechnet werden können. Sucht man aber nach einer scharfen Begriffsgrenze, so lässt sich eine solche zwar für die Unterscheidung von Pflanze und Thier, nicht aber für die Abtrennung jenes indifferenten Zwischenorganismus feststellen. Derartige fundamentale Unterscheidungsmerkmale können nämlich wieder morphologischer oder physiologischer Art sein. Nun ist es im gegenwärtigen Falle eine selbstverständliche Folge der genetischen Uebereinstimmung zwischen pflanzlicher und thierischer Organisation, dass zwar die ausgebildeten Formen sofort rein morphologisch nach den Structur- und Wachsthumsverhältnissen der Zellen unterschieden werden können, dass dies aber bei den Anfängen der Entwicklung, gerade da also, wo es sich um die Abgrenzung der Protisten von den niedersten Pflanzen und Thieren handelt, nicht mehr möglich ist. In der That hat darum auch Haeckel eine physiologische Charakteristik der drei Reiche zu geben versucht, und er hat, weil die früher angewandten Kriterien der Empfindung und Bewegung theils unsicher, theils hinfällig sind, hierzu die Erscheinungen des Stoff- und Kräftewechsels benutzt*). Da die Pflanzen organische Verbindungen produciren und die lebendige Kraft des Sonnenlichts in potentielle chemische Energie überführen, während die Thiere jene Verbindungen zersetzen und aus chemischer Energie Wärme und Bewegung erzeugen, so scheint dieser Gegensatz vollkommen geeignet, ein entscheidendes Kriterium abzugeben. Doch bei den Protisten gerathen wir sofort in Verlegenheit. Wenn Haeckel sagt, dass in ihnen Reduction und Oxydation sich das Gleichgewicht halten, dass sie bald Wärme binden, bald mechanische Arbeit erzeugen u. s. w., so ist diese Definition sichtlich zum Behuf der Construction eines »indifferenten Organismus« erfunden. Nach allem, was wir von dem Stoffwechsel dieser Organismen wissen, ist er mit demjenigen der Thiere identisch, denen sie auch durch ihre Bewegungs- und anscheinende Empfindungsfähigkeit gleichen. Damit erhält nun aber gleichzeitig die Unterscheidung zwischen Pflanze und Thier einen Stoss. Sie ist dem Stoff- und Kräftewechsel bei der Chlorophyllathmung entnommen. Doch diese ist immer nur ein transitorisches Phänomen und überdies bei der zusammengesetzten Pflanze lediglich an einzelne Organe gebunden, während die übrigen Theile fortwährend und die ganze Pflanze in der Zeit, wo sie dem Lichte entzogen ist, in ihrem Stoffwechsel dem Thiere gleichen. Gerade von diesem Gesichtspunkt aus müsste

*) Haeckel, Generelle Morphologie, I, S. 232.

also, wie Pflüger mit Recht bemerkt hat, das Thier als der Urorganismus und die Pflanze als ein einseitig entwickeltes Thier betrachtet werden*). In Wahrheit aber wird man in dieser Unmöglichkeit, überall zutreffende Unterschiedsmerkmale aufzufinden, nur eine Bestätigung der Thatsache sehen können, dass auch die allgemeinsten Begriffe der organischen Systematik künstliche Grenzen bezeichnen, um welche sich die Natur selbst nicht kümmert. Zwar entsprechen selbstverständlich jenen Grenzen natürliche Unterschiede, doch diese werden nicht sprungweise, sondern, wie jede Entwicklung, in stetigen Uebergängen überschritten. In der Ausbildung solcher Unterschiede kommt dann jedem der physiologischen Momente, die man meist einseitig bevorzugte, seine relative Bedeutung zu. Empfindung und Bewegung besitzt, wie wir nach den Zeugnissen der generellen und individuellen Entwicklungsgeschichte annehmen dürfen, jedes ursprüngliche organische Wesen. In der Pflanze gehen jene Eigenschaften, vielleicht in Folge der eigenthümlichen Assimilations- und Wachsthumsverhältnisse, die sich in ihr ausbilden, frühzeitig verloren. Dies Schicksal muss aber wieder auf die ganze Richtung der Organisation verändernd zurückwirken. Es ist längst bemerkt worden, dass der innere Bau der Pflanzen ein weit gleichförmigerer ist, und dass auch unter den äusseren Organen diejenigen, die den unmittelbaren Wirkungen der Aussenwelt am meisten ausgesetzt sind, wie Blüthe, Blätter, Wurzeln, die grössten Variationen darbieten. In diesen Unterschieden dürfte eine Thatsache ihren Ausdruck finden, auf welche überdies der ganze Bauunterschied beider Lebensformen hinweist: die Pflanze verhält sich fast durchaus passiv gegenüber den Wirkungen der Aussenwelt; das Thier aber steht ihr mit seinem Willen activ gegenüber. Die Zweckmässigkeit seines Körperbaus beruht daher zu einem grossen Theil auf der Zweckmässigkeit seiner eigenen Handlungen, und die Vielgestaltigkeit der thierischen Triebe bedingt von selbst eine grössere Mannigfaltigkeit der Organisation.

### c. Die Ursachen des Lebens.

Leben und Tod unterscheiden sich vor allem durch die Fähigkeit des lebenden Körpers, während einer längeren Zeit das vollständige Gleichgewicht seiner Stoffzusammensetzung bewahren zu können. Er gleicht darin dem leblosen Körper der unorganischen Natur. Während aber hier das Gleichgewicht die Folge der Unveränderlichkeit ist, resultirt dasselbe dort aus einer Summe unablässiger Veränderungen. Leider ist uns die Constitution des Protoplasmas und der andern gewebebildenden Stoffe zu wenig bekannt, als dass über die specielle Natur der elementaren Stoffwechselvorgänge, deren Resultat jenes physiologische Gleichgewicht ist,

---

*) Pflüger's Arch. f. Physiologie, Bd. 10, S. 305.

andere als höchst unsichere Vermuthungen möglich wären*). Nur über die allgemeinen Bedingungen dieser Vorgänge lassen sich bis jetzt an der Hand der thermochemischen Vorstellungen und des Princips der Erhaltung der Energie einige Voraussetzungen gewinnen.

Durch Pflüger ist der Nachweis geführt worden, dass ein Thier ohne Sauerstoffzufuhr während einer gewissen Zeit fortzuleben vermag. Hierdurch hat die frühere durch Lavoisier zur Geltung gebrachte Annahme, dass das Leben auf einem Verbrennungsprocess beruhe, insofern eine Veränderung erfahren, als nun nicht mehr der Lebensprocess selbst als eine directe Oxydation aufgefasst werden kann. Damit stimmen aber zugleich die der Stabilität zersetzbarer Verbindungen entnommenen allgemeinen Gesichtspunkte überein. Beruht das Gleichgewicht der Zusammensetzung des lebenden Protoplasmas darauf, dass dasselbe einzelne Theile seines complexen Moleküls verliert und wieder aus seiner Umgebung ergänzt, so ist damit eine fortwährende Selbstzersetzung als die chemische Bedingung des Lebens vorausgesetzt. Sie bewirkt, dass neue Eiweissmolecüle der Nahrung dem Protoplasma aggregirt, und dass die abgestossenen Molecüle durch den zugeführten Sauerstoff verbrannt werden. Das wirkliche Gleichgewicht der Lebensprocesse wird dann freilich nur in Folge dieser äusseren Einwirkungen möglich. Denn wenn Gleichgewicht bestehen soll, so müssen offenbar die Molecularbewegungen des Protoplasmas und die äussere Zu- und Abfuhr der Stoffe so regulirt sein, dass in einer gegebenen Zeit ebenso viele Molecüle aggregirt als abgestossen und unter Kraftausgabe oxydirt werden.

Dieser Zustand des Gleichgewichts kann nun entweder durch ein Uebergewicht der Erneuerung über die Zersetzung oder umgekehrt durch ein solches der Zersetzung über die Erneuerung gestört werden. Auf der ersten dieser Gleichgewichtsänderungen beruhen alle Wachsthums- und Zeugungserscheinungen, die beide innig mit einander zusammenhängen, da das Wachsthum der zusammengesetzten Individuen zum Theil aus der Zellenfortpflanzung entspringt, und da die einfachen Formen der Zellenvermehrung als unmittelbare Folgen des Zellenwachsthums auftreten. Für die Auffassung dieser Vorgänge ist es von grösster Bedeutung, dass sie in hohem Grade unabhängig von den Bedingungen der äusseren Stoffzufuhr zu sein scheinen. Natürlich hört der lebende Körper zu wachsen auf, wenn ihm der Stoff mangelt; aber dieser bleibt wirkungslos, wenn die günstigen inneren Bedingungen in dem lebenden Protoplasma nicht vorhanden sind. Schon das Wachsthum erscheint darum keineswegs als ein so einfacher Process wie etwa die Vergrösserung eines Krystalls. Denn bei dem organischen Wachsthum setzt jede Aggregation neuer Masse eine

*) Vgl. Pflüger, in seinem Archiv f. Physiologie, Bd. 10, S. 251 und Bd. 11, S. 222, und Loew und Bokorny, Die chemische Ursache des Lebens. München 1881.

chemische Umwandlung voraus, durch welche das leblose Nahrungseiweiss in lebendes Protoplasma übergeht. Eine solche Umwandlung wird, gerade so wie im stationären Ernährungszustand, selbstverständlich nicht das ganze Eiweissmolecül auf einmal ergreifen, sondern sie wird sich wieder nur an einzelnen Molecültheilen, die dem lebenden Protoplasma aggregirt werden, vollziehen können. Aber während im Fall des Gleichgewichts auf diese Weise nur der abgehende Ausfall gedeckt wird, müssen hier mehr Theilmolecüle aufgenommen werden, als verloren gegangen sind. Dies kann man sich nach sonstigen chemischen Analogien auf doppelte Weise geschehend denken. Zunächst liesse sich mit Pflüger eine Entstehung polymerer Verbindungen annehmen, bei der die Grösse des Gesammtmolecüls durch die Aggregirung neuer Theilmolecüle von gleicher Zusammensetzung zunimmt*). Da polymere Verbindungen meist analoge chemische und physikalische Eigenschaften besitzen, so ist es denkbar, dass auf diese Weise das Protoplasma wächst, ohne dass sich die Zahl seiner Gesammtmolecüle vermehrt. Man könnte aber auch an Spaltungsprocesse denken, aus deren Theilungsproducten unter Mitwirkung der Molecüle des Nahrungseiweisses mehrere Gesammtmolecüle wieder entstehen könnten. Sucht man diese chemischen Vorgänge mit den morphologischen Veränderungen in Beziehung zu bringen, so kann man annehmen, dass die Zunahme durch Polymerisirung dem einfachen Wachsthum, die Zunahme durch Spaltung aber allen denjenigen Formen des Wachsthums und der Zeugung entspreche, die auf Zellentheilung beruhen. Wollte man alles Wachsthum auf die Aggregation polymerer Molecüle zurückführen, so würde man, um eine Beziehung zu den morphologischen Thatsachen herzustellen, genöthigt sein, schliesslich den ganzen Organismus als ein einziges chemisches Riesenmolecül anzusehen, eine Anschauung, der sich Pflüger in der That zuneigt. Betrachtet man dagegen die Zellentheilung als das morphologische Bild einer chemischen Spaltung, so wird damit von selbst die Grösse des Protoplasmamolecüls auf den Inhalt der einzelnen Zelle beschränkt. Die häufig mit der Zellentheilung verbundene Erscheinung einer Ausscheidung von Bestandtheilen, welche theils in die Excretionsstoffe übergehen, theils zur Bildung secundärer Erzeugnisse, wie der Membran und vielleicht auch des Kerns, verwendet werden, lässt sich leicht mit dieser Anschauung in Verbindung bringen. Denn die chemische Spaltung ist in der Regel mit der Bildung von Nebenproducten verbunden. Manche andere Begleiterscheinungen aber, wie die oft vorausgehenden Bewegungen des Protoplasmas und die Anordnung der Körnchenreihen desselben in Strahlenform, würden nun unmittelbar als ein Ausdruck

*) Man erinnere sich z. B. an folgende einfache Reihe:
$CH_3 . CO . HO$ Essigsäure,
$CH_3 . CH_2 . CO . HO$ Propionsäure,
$CH_3 . CH_2 . CH_2 . CO . HO$ normale Buttersäure, u. s. w.

der Molecularbewegungen anzusehen sein, welche den chemischen Vorgang begleiten*).

Immerhin geben diese chemischen Gesichtspunkte über den Grund der eigenthümlichen Periodicität der Wachsthums- und Entwicklungsvorgänge noch keinen Aufschluss. Völlig irreführend ist hier die physikalische Analogie mit den Wellenbewegungen. Jede Wellenbewegung ist ein continuirlicher Bewegungsvorgang mit periodisch wiederkehrenden Phasen; die Fortpflanzung dagegen ist bloss ein periodisch wiederkehrender Vorgang. Darin gleicht sie andern physiologischen Functionen, wie der Herzbewegung, der Athmung, dem Wechsel von Wachen und Schlaf. Von diesen physiologischen Analogien ist His ausgegangen bei seiner Annahme, dass die Anregung zur Entwicklung in einem Reizungsvorgang bestehe. (S. oben S. 443.) Nach den soeben zur Geltung gebrachten Anschauungen würde diese Voraussetzung auf den Vorgang der Zellentheilung beschränkt werden können, wodurch, abgesehen von der grösseren Länge der Perioden, die Analogie mit den die Theorie der Herz- und Athembewegungen leitenden Vorstellungen um so vollständiger wird. Hiernach liesse sich annehmen, dass in jeder entwicklungsfähigen Zelle während des Stoffwechsels Reizungsstoffe sich anhäufen, die, sobald sie in zureichender Menge entstanden sind, den Vorgang der Reizung, den wir in diesem Fall Zellentheilung nennen, auslösen. Vom chemischen Standpunkte aus würde aber die Reizung als eine Spaltung, der Reizungsstoff als ein Spaltungsferment zu deuten sein.

Diese Hypothese dürfte vor allem in den Erscheinungen der sexuellen Fortpflanzung eine gewisse Stütze empfangen. Rein morphologisch betrachtet besteht dieselbe darin, dass eine Zelle, die für sich selbst die Fähigkeit der Spaltung verloren hat, diese wiedererlangt durch die Einwirkung eines aus einer fremden Zelle hervorgegangenen Elementes. Das Fermentartige des Vorgangs ist augenfällig; zugleich ist der stellvertretende Charakter desselben nicht zu verkennen. Nachdem das Wachsthum des Gesammtkörpers zum Stillstand gekommen ist und in den meisten Geweben auch die Regeneration durch Zellentheilung ganz aufgehört hat oder nur noch unter ungewöhnlichen Bedingungen erfolgt, beginnt in den Sexualorganen erst jene Zellenproduction, welche meist in periodischen Zwischenräumen zur Reifung und Abstossung der Sexualzellen führt. Die Ei- und die Spermazelle sind beide Träger des Zeugungsfermentes. Aber jedes dieser Elemente enthält das Zeugungsferment in einer wirkungsunfähigen Form. Die Rolle, welche nach den neueren Beobachtungen von Hertwig u. A. der Spermakern und der Eikern bei der Befruchtung spielen, ihre attractive Bewegung, Verschmelzung und Theilung in die

*) Vgl. die Uebersicht der hierher gehörigen Erscheinungen bei Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung, S. 191 f.

Kerne der Furchungszellen, machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass der Kern zunächst der Sexualzellen und dann der Zellkern überhaupt der Träger der Zeugungsfermente ist*). Die Eigenschaft eines Spaltungsfermentes gewinnen aber diese erst durch ihre Vereinigung, und die Fermente der Zellkerne entwickeln diese Eigenschaft im allgemeinen um so energischer, je näher ihre Entstehung noch dem Stadium der unmittelbaren Verbindung der ursprünglichen Fermente liegt. Alle diese Thatsachen rechtfertigen die Vermuthung, dass der Zellkern überhaupt ein Product der sexuellen Entwicklung sei, in welchem sich das in dem ersten Furchungskern enthaltene Spaltungsferment immer wieder erneuert.

Wie kommt es nun aber, dass diese Erneuerung allmählich abnimmt und endlich ganz erlischt? Mit dieser Frage nähern wir uns dem zweiten Problem der dem Gleichgewicht gegenüberstehenden Lebensvorgänge, dem Problem der abnehmenden Veränderungen. Denn die Abnahme der Wachsthums- und Entwicklungfähigkeit ist nur die Theilerscheinung eines allgemeinen, der aufsteigenden Entwicklung diametral entgegengesetzten Processes. Zwischen beiden steht das Gleichgewicht eigentlich nur als ein idealer, auf die Dauer wenigstens niemals vollkommen verwirklichter Zustand. Man würde jedoch die richtige Auffassung jener Abnahme der Lebenskräfte von vornherein trüben, wenn man hier auf- und absteigende Bewegung als zwei Vorgänge ansehen wollte, die sich ablösen, wie das wohl die alte Evolutionstheorie gelegentlich mit ihrer Annahme einer successiven Aus- und Einschachtelung gethan hat. Vielmehr sind die Hemmungen der Lebensprocesse von Anfang an wirksam; wie wäre es sonst denkbar, dass die Fähigkeit der Zellenvermehrung schon bald nach der ersten Furchung der Eizelle allmählich wieder erlischt? Und anderseits steht die Productionskraft des lebenden Organismus niemals ganz stille; wie wollte man es sonst deuten, dass bis ins höchste Alter einzelne Gewebe sich regeneriren, und dass vollends die krankhaften Geschwülste der Greise manchmal die üppigste Zellenwucherung zeigen?

Das Aufhören des einfachen, nach unserer Voraussetzung auf Polymerisirung beruhenden Wachsthums ergiebt sich als eine unmittelbare Folge dieses hypothetischen Vorgangs. Je complicirter polymere Molecüle werden, um so mehr sind sie im allgemeinen geneigt wieder in ihre Bestandtheile zu zerfallen, und bei einer gewissen Grenze hört darum das polymere Wachsthum überhaupt auf. Befremdender erscheint auf den ersten Blick der Stillstand der Spaltungsvorgänge. Hier wird man offenbar dazu gedrängt, die Ursache nicht in das Protoplasma selbst zu verlegen, das sich ja unverändert regenerirt, sondern in jene fermentartigen Stoffe, die wir als die äusseren Ursachen der Regeneration ansehen. Am nächsten liegt es, nach der Analogie mit andern Gährungsvorgängen, an eine Ent-

*) Vgl. mein Lehrb. der Physiol., 4. Aufl., S. 172, und Hensen, Physiol. der Zeugung, S. 125 f.

stehung und Anhäufung von Zersetzungsproducten zu denken, die den Spaltungsprocess zuerst verlangsamen und dann völlig aufheben. Haben wir die Spaltungsfermente reizende Stoffe genannt, so können diese Gegenfermente als hemmende bezeichnet werden. Nun haben wir gesehen, dass das Spaltungsferment jedenfalls in dem Augenblick am wirksamsten ist, wo es direct aus der Verbindung der beiden sexuellen Zeugungselemente hervorging, wo also voraussichtlich beide dem Verhältniss des Gleichgewichts am nächsten kommen. Demgemäss würde die einfachste Annahme sein, dass das Spaltungsferment in dem Masse an Wirksamkeit einbüsst, als der eine oder andere seiner Bestandtheile im Ueberschusse vorhanden ist. Hiermit steht die Thatsache in Uebereinstimmung, dass gerade die wahrhaft zwittergeschlechtlichen Pflanzen und Thiere, d. h. diejenigen, bei denen gleichzeitig männliche und weibliche Sexualzellen zur Reife gelangen, nicht selten ein unbegrenztes, nur durch die Ernährungsbedingungen oder äussere Schädlichkeiten gehemmtes Wachsthum darbieten. Ein Baum würde wahrscheinlich nicht aufhören zu wachsen, wenn der Stamm den neuen Trieben immerfort den Ernährungssaft zuführen könnte.

Diese für die sexuelle Fortpflanzung entwickelten Annahmen bedürfen nur unerheblicher Specialisirungen, um manche andere Thatsachen der Zeugungslehre in eine logische Verbindung zu bringen. Es ist noch aus andern Gründen wahrscheinlich, dass die stoffliche Zusammensetzung der Organismen Unterschiede darbietet, welche den Unterschieden der Abstammung parallel gehen. Demnach werden auch in dieser Beziehung die Gattungen verschiedener von einander sein als die Arten, diese verschiedener als die engeren Stammesgemeinschaften; und als die letzten Unterschiede werden diejenigen der Individuen bleiben, bei denen die genetischen ausserdem noch von den sexuellen Eigenschaften begleitet sind. Wenden wir diese Voraussetzung auf die Fortpflanzungsvorgänge an, so lässt sich unschwer verstehen, dass einerseits eine nahe Verwandtschaft der Organismen erfordert wird, wenn ihre Zeugungsfermente zu einem wirksamen Spaltungsferment sich vereinigen sollen, dass aber anderseits doch auch dauernde Gleichartigkeit der Fortpflanzungselemente die Entwicklung beeinträchtigt. Schon die allgemeine Bedingung der geschlechtlichen Fortpflanzung, die Begegnung verschiedener Zeugungsstoffe, zeigt ja, dass eine gewisse Verschiedenheit der Componenten zur Einleitung der Entwicklung nothwendig ist. Wir haben also nur anzunehmen, dass die nämliche Regel, welche die sexuelle Fortpflanzung beherrscht, auch für die begleitenden Nebenbedingungen individueller Befähigung gültig sei. Aehnlich wie wir den Einfluss der individuellen Eigenthümlichkeiten auf die Fortpflanzung zunächst aus den sexuellen zu begreifen suchen, so lässt sich nun aber umgekehrt von den dort gewonnenen Anschauungen aus der Geschlechtsdifferenz selbst ein gewisses Verständniss abgewinnen. Fassen wir, wie oben geschehen, den Zellenkern als den Träger der Geschlechtsstoffe auf, in welchem die ursprüngliche Wirkung der Befruchtung gleich-

sam für die ganze Lebenszeit nachwirkt, so werden wir, worauf auch andere Thatsachen hinweisen, die Entstehung der Geschlechtsdifferenz in eine sehr frühe Zeit der organischen Entwicklung, wenn nicht mit Hensen *) ganz in den Anfang derselben zurückverlegen müssen. Von mehr als von der Ausbildung verschieden gearteter Zeugungsstoffe wird aber auf der frühesten Stufe nicht die Rede sein können. Hier liegt nun die Annahme nahe, dass die ersten Spaltungsfermente überhaupt in der Verbindung individuell verschiedener Protoplasmamassen ihre Quelle hatten. In der Copulation gewisser Algen und Protozoen scheinen uns heute noch Zeugungsvorgänge jener elementarsten Form bewahrt zu sein, wo die sexuelle einfach mit der individuellen Differenz zusammenfällt. Auf einer weiteren Stufe, welche durch die Fortpflanzungsverhältnisse der meisten Infusorien repräsentirt ist, bilden sich die getrennten Zeugungsfermente in dem Protoplasma eines und desselben Elementarorganismus als Ausscheidungsproducte, die in kernähnlichen Gebilden (Nucleus und Nucleolus der Infusorien) abgelagert werden, bis sie durch Selbstzersetzung oder durch Einwirkung von Zersetzungsproducten des Protoplasmas in den Zustand der so genannten Reife gelangen, der zugleich die physikalischen Bedingungen zu ihrer Verbindung mit sich führt. Wie nun von diesen Anfängen aus sich die unendlich vielgestaltigen Formen der Fortpflanzungsvorgänge bei Pflanzen und Thieren entwickelt haben, lässt sich selbstverständlich nicht weiter verfolgen. Bei der Frage nach den Ursachen des Lebens kann es sich aber überhaupt nur darum handeln, dass man sich über die Entstehung der einfachsten Lebenserscheinungen Rechenschaft gebe. Der weiteren Differenzirung wird man nur auf Grund einer allmählichen Ermittelung der Entwicklungsbedingungen näher treten können. Dagegen dürfen wir dem entgegengesetzten Problem, obgleich es unserer positiven Erkenntniss mindestens ebenso unzugänglich ist, dem der Urzeugung oder der ersten Entstehung lebender Substanz, hier nicht aus dem Wege gehen. Denn der Gesichtspunkt, unter welchem dieselbe betrachtet wird, ist für die Frage nach dem Wesen des Lebens von ebenso entscheidender Bedeutung wie die Interpretation der einfachsten Lebensvorgänge.

Die Schwierigkeiten dieses Problems hat man entweder dadurch zu beseitigen gesucht, dass man annahm, das Leben sei niemals entstanden, es sei ebenso ursprünglich wie die Materie selber, oder dass man sich die Urzeugung als einen Vorgang dachte, der den Formen einfachster Fortpflanzung analog sei. Die erste dieser Anschauungen hat in etwas verhüllter Form noch in neuerer Zeit in der Hypothese sich erhalten, organische Keime seien durch Meteore von einem auf den andern Weltkörper übertragen worden, und es habe sich also das organische Leben gewissermassen auf dem Wege der Ansteckung übertragen **). Dass diese Hypo-

*) Physiologie der Zeugung, S. 147.

**) Da der Erste, der diese Hypothese aufstellte, ein Arzt war, der sich

these das Problem zurückschiebt, statt es zu lösen, liegt auf der Hand. Die lebensfähigen Substanzen sind chemische Verbindungen von bestimmten Affinitätseigenschaften. Mit dem nämlichen Rechte, mit dem man die Erforschung ihrer Entstehung durch eine solche Hypothese abwehrt, könnte ein Chemiker der Frage nach der Bildung der Kohlensäure mit der Antwort begegnen wollen, Kohlensäure sei immer in der Welt vorhanden gewesen. In einer hiervon wesentlich verschiedenen Form hat zu allen Zeiten der philosophische Hylozoismus die Ewigkeit des Lebens gelehrt. War es ihm zunächst auch mehr darum zu thun, das Leben für die ganze Natur zu retten, als es zu erklären, so galt doch das letztere oder vielmehr die Möglichkeit, eine solche Erklärung entbehren zu können, meist als ein erwünschter Nebenerfolg. Aber je mehr diese Anschauung es versuchte, mit sonstigen Erfahrungen im Einklang zu bleiben, um so mehr zeigte es sich, dass in ihr der Begriff des Lebens denjenigen Inhalt verloren hatte, den ihm die Physiologie giebt. So soll nach Fechner und Preyer das Organische das frühere, das Unorganische das spätere, ein Ausscheidungsproduct der lebenden Materie sein, wobei dann diese in Folge solcher Ausscheidungen und Reinigungen immer mehr sich vervollkommne*). Hierdurch wird dann alles, was die Physiologie lebende Materie nennt, das Protoplasma mit seinen Entwicklungsformen, zu einem secundären Erzeugniss. Das ursprüngliche Leben ist die einst in der glühenden Masse unseres Planeten enthaltene, der Trennung des organischen und unorganischen Stoffs vorausgehende Bewegung. Der so gebildete Begriff des Lebens ist aber offenbar ein vollkommen willkürlicher, für den die wesentlichsten Merkmale, die der empirische Begriff des Lebens darbietet, nicht zutreffen. Somit hätte auch diese Anschauung immer noch zu erklären, wie das Leben im physiologischen Sinne entstanden ist.

Von der zweiten der oben unterschiedenen Hypothesen sind bis dahin alle Versuche, eine Urzeugung auf experimentellem Wege zu Stande zu bringen, ausgegangen. Wie jedes organische Wachsthum mit der Zersetzung schon vorhandener organischer Substanzen verbunden ist, so hoffte man in sich zersetzenden, der Fäulniss unterworfenen Gemischen organischer Stoffe die günstigsten Bedingungen für eine Generatio aequivoca vorzufinden. Nähere Auskunft über die hierbei vermutheten morphologi-

---

mannigfach mit der Verbreitung der Infectionskrankheiten durch Pilzsporen beschäftigt hat, nämlich H. E. Richter (Schmidt's Jahrbücher der Medicin, Bd. 126, S. 248), so wird man in der That nicht fehlgehen, wenn man die Idee der Ansteckung als die eigentliche Grundlage derselben betrachtet. Uebrigens sind auch W. Thomson und Helmholtz unabhängig von einander und von Richter auf die nämliche Idee verfallen.

*) G. Th. Fechner, Einige Ideen zur Schöpfungs- und Entwicklungsgeschichte der Organismen. Leipzig 1874. Preyer, in der Zeitschrift Kosmos I, 1877, S. 204.

schen oder chemischen Vorgänge ist zwar von keinem der Anhänger einer Urzeugung aus Infusionen gegeben worden. Doch scheint es, dass man dabei die heftige moleculare Bewegung in einem faulenden Gährungsgemisch für besonders geeignet hielt, um die Synthese eines lebenden Protoplasmamolecüls zu bewirken. Ueberdies ist es ersichtlich, dass die einfachsten Fäulnissorganismen in faulenden Massen leicht sich ernähren und fortpflanzen können; und man glaubte wohl annehmen zu dürfen, die für das Wachsthum eines organischen Wesens günstigsten Bedingungen seien auch für die Entstehung eines solchen die besten. Die experimentelle Widerlegung einer Urzeugung aus Infusionen hat den letzteren Gedanken als die schwache Seite des Beweisverfahrens herausgegriffen. Denn es lässt sich demselben offenbar mit grösserem Rechte die Vermuthung entgegenhalten, dass die Infusionsorganismen um so leichter in eine Flüssigkeit von aussen eindringen werden, je bessere Ernährungsbedingungen sie ihnen darbietet. Von dieser Erwägung ausgehend und unter gebührender Rücksichtnahme auf die ausserordentliche Lebenszähigkeit niederer Keime ist in der That der Beweis, dass auf dem angenommenen Wege eine Urzeugung nicht stattfindet, als geliefert zu betrachten, insoweit negative Resultate überhaupt beweisend sein können. Auch findet dies negative Resultat darin eine Stütze, dass die hier vorausgesetzten Bedingungen nach unsern sonstigen Erfahrungen durchaus nicht diejenigen sind, unter denen sich eine ursprüngliche Synthese organischer Verbindungen vollzieht. Wäre aber selbst die Infusionshypothese im Rechte, so würde damit dennoch für die Frage nach dem Ursprung des Lebens nicht viel gewonnen sein. Denn die Substanzen, die man zu den Infusionsgemischen verwendet, sind selbst schon Producte des Lebensprocesses. Wie bei der Theorie der Meteorinfection, so wird darum auch hier das Problem selbst nicht gelöst, sondern zurückgeschoben.

In Wahrheit sind es nun zwei Momente, die in einer unter sich übereinstimmenden, aber von den drei hier besprochenen Anschauungen abweichenden Weise die Richtung unserer Vermuthungen bestimmen müssen. Die Entstehung lebenden Protoplasmas aus unorganischen Materialien vermögen wir in der jetzigen Natur nirgends nachzuweisen, und wir müssen doch die Thatsache einer solchen Entstehung voraussetzen, da in früheren Zuständen unseres Planeten eiweissartige Körper nicht existiren konnten. Es bleibt also allein die Annahme übrig, dass die Bedingungen zum Eintritt jenes Ereignisses nur während einer gewissen Uebergangsperiode existirten, nach welcher sie wieder verschwunden sind, ähnlich wie ja auch die Bedingungen für die Bildung gewisser Gesteinsarten, wie Flussspat, Feldspat, Quarz u. s. w., offenbar vorübergehender Art waren. Zweitens haben wir nach allem, was uns die künstliche Synthese organischer Verbindungen lehrt, allen Grund zu vermuthen, dass eine so verwickelt constituirte Verbindung wie das Protoplasma allmählich entstanden ist, wobei die noch jetzt in der Glühhitze bei Gegenwart reducirender Metalle leicht aus unorganischen Verbindungen entstehenden einfachsten Kohlenstoff-

verbindungen, wie Acetylen, Ameisensäure, Cyan, vermuthlich die ersten Stufen gebildet haben werden*).

Gesetzt aber auch, die hier postulirten Causalbeziehungen seien zutreffend, und es gelänge sogar, lebendes Protoplasma im chemischen Laboratorium hervorzubringen, so würde damit das Problem des Lebens immer erst nach seiner physischen Seite gelöst sein. Aus den Eigenschaften, die wir den chemischen Atomen beigelegt, würden wir die Gruppirungen der Stoffe und ihre Zersetzungen, vielleicht auch die damit verbundenen physikalischen Erscheinungen erklären können. Sobald aber diese Erscheinungen zugleich das Vorhandensein von Empfindungen verrathen, sind diese als Thatsachen anzuerkennen, die in den zum Behuf der physikalisch-chemischen Erklärung gemachten Voraussetzungen nicht mit enthalten und darum auch unmöglich aus den letzteren abzuleiten sind. Darin liegt schon für den Standpunkt physiologischer Erklärung die Nöthigung, die einfachsten Formen des psychischen Geschehens nicht erst mit der Erzeugung der lebenden Substanz entstehen zu lassen, sondern mindestens die Anlage zu diesem Geschehen den ursprünglichsten Substanzelementen schon beizulegen. Dass Leben und Beseelung innig zusammenhängen, und dass beide nicht entstehen könnten, wenn nicht die Bedingungen zu ihnen in dem Substrat der Naturerscheinungen gegeben wären, dies ist der wahre Gedanke, der die hylozoistischen Ansichten leitet, den sie aber verfälschen, indem sie das potentielle in ein actuelles Leben umwandeln, und indem sie das Bild des Organismus, das den entwickelten Lebensformen entnommen ist, willkürlich auf zusammenhanglose Substanzcomplexe der leblosen Natur übertragen, in deren letzten Theilen vielleicht nur der Lebensfunke glimmt. Denn wenn der biologischen Beobachtung irgend ein Werth beizumessen ist, so kann dies eine Resultat als feststehend gelten, dass, so nothwendig es auch scheinen mag, schon in den Eigenschaften der anscheinend leblosen Körper die Bedingungen des Lebens anzunehmen, doch die zusammengesetzten Formen desselben erst die Erzeugnisse einer langen unter den verwickeltsten Causalbedingungen stattgefundenen Entwicklung sind. In diese Entwicklung greifen aber psychische Kräfte in so bestimmender Weise ein, sie sind insbesondere so sehr die für die Zweckmässigkeit der organischen Bildungen massgebenden Ursachen, dass die der Physiologie geläufige Anschauung über die Wechselbeziehung des körperlichen und geistigen Lebens ihre vollständige Umkehrung erfahren muss: nicht das geistige Leben ist ein Erzeugniss der physischen Organisation, sondern diese ist in allem, was sie

*) Auf die Unvermeidlichkeit dieser Annahmen habe ich schon in den früheren Auflagen meines Lehrbuchs der Physiologie hingewiesen. (Vgl. 3. Aufl., 1873, S. 169.) Auf die nämliche Anschauung ist dann später auch Pflüger durch seine Betrachtungen über das Wesen der Lebensvorgänge geführt worden. (A. a. O. Bd. 10, S. 339 f.)

an zweckvollen Einrichtungen der Selbstregulirung und der Energieverwerthung vor den Substanzcomplexen der unorganischen Natur voraus hat, eine geistige Schöpfung. So führt die Biologie bei ihren letzten Aufgaben unmittelbar zu den Grundproblemen der Psychologie über.

### d. Der Begriff der Krankheit.

Für die Erklärung der Krankheit ist der Begriff der Störung und ihrer Ausgleichung ein so naheliegender, dass von den ersten Anfängen der medicinischen Wissenschaft an aller Kampf der Anschauungen nur noch um die Frage sich dreht, worin das Wesen jener Störung bestehe. Die Antwort auf diese Frage wird durch den jeweils herrschenden allgemeinen Standpunkt biologischer Naturerklärung und mit diesem durch die wechselnden Einflüsse anderer Forschungsgebiete, namentlich der Physik und Chemie, bestimmt. Darum ist die Medicin von animistischen, vitalistischen, mechanischen und chemischen Systemen mit wechselndem Glück beherrscht worden. Diese Anschauungen aber sind nicht bloss von der Physiologie aus auf die Pathologie übergegangen, sondern es machte sich vielfach auch in umgekehrter Richtung ein Einfluss geltend. So haben die Begründer animistischer Lehren, ein Paracelsus und Helmont, sichtlich ihre Vorstellungen von dem Walten der Lebensgeister und Fermente zunächst aus der Beobachtung der Krankheiten geschöpft. Für den Vitalismus konnte es keine augenfälligere Bestätigung geben als der anscheinend so deutlich auf einen Kampf der Lebenskraft mit äusseren oder inneren Schädlichkeiten hinweisende Verlauf der Krankheitserscheinungen. Aber auch die mechanische Auffassung des Lebens gewann aus der pathologischen Beobachtung fruchtbare Anregungen. Ergab sich doch der für diese Auffassung so wichtige Begriff der Selbstregulirung am leichtesten aus denjenigen im Gefolge der Krankheit auftretenden Reactionen, welche sichtlich entweder auf eine Beseitigung der Störung oder auf die Herstellung eines neuen Gleichgewichtszustandes gerichtet sind, der die Störung zu compensiren sucht.

In diesem Kampf der Anschauungen ist ein Gegensatz, der zum Theil mit dem Widerstreit des Animismus und Mechanismus zusammengeht, ohne nothwendig mit demselben verbunden zu sein, von grösstem Einflusse. Er bezieht sich auf die Krankheitsursache, damit aber freilich indirect zugleich auf das ganze Wesen der Krankheit.

Dass in den meisten Fällen die Krankheit durch äussere Einwirkungen verursacht werde, konnte von frühe an der Beobachtung nicht verborgen bleiben. Als die eigentliche Bedingung der Störung betrachtete man dabei aber doch die Veränderung, welche in den Säften oder Geweben des Organismus entstehe, und welche nun ihrerseits weitere Störungen und Ausgleichserscheinungen nach sich ziehe. Diese Ansicht passte ebenso gut in die mechanistische wie in die vitalistische Lehre. Ihr gegenüber führte Para-

celsus eine in der populären Meinung sicherlich längst verbreitete Vorstellung in die wissenschaftliche Medicin ein: die Vorstellung, dass die Krankheit selber ein Wesen sei, in dessen Bekämpfung theils das natürliche Heilungsbestreben des Organismus bestehe, theils das künstliche Heilverfahren des Arztes bestehen müsse. So treten von nun an eine ontologische und eine functionelle Auffassung einander gegenüber. Schon Paracelsus hat seine Lehre von den krankmachenden Wesen, von der Keimung und Entwicklung derselben besonders auf die Beobachtung der contagiösen Krankheiten gestützt, deren Entstehung und typischer Verlauf auch in neuerer Zeit immer wieder solche Ideen nahe legte*). Trotzdem ist lange die functionelle Auffassung fast die allein herrschende geblieben, und wenn man auch nicht umhin konnte, bei den Contagien und Miasmen den Einfluss äusserer krankmachender Stoffe zuzugeben, so war man doch meist mehr geneigt, in ihnen die Wirkungen unbekannter chemischer Stoffe, als diejenigen organisirter Elemente zu sehen. Das Hauptaugenmerk blieb dabei immer auf die functionellen Veränderungen des erkrankten Organismus selbst gerichtet, und je nachdem man hier den Ernährungsflüssigkeiten, dem Nervensystem oder endlich den letzten morphologischen Elementartheilen den entscheidenden Werth beilegte, entstanden die in der öffentlichen Gunst einander ablösenden Schulen der so genannten Humoral-, Solidar- und Cellularpathologie, Richtungen, die in ihrer Einseitigkeit an die wechselnde Herrschaft des Vulkanismus und Neptunismus in der Geologie oder der Gravitations- und der elektrischen Spannungstheorie in der Chemie erinnern. Heute hat sich die Sachlage völlig geändert. Man erkennt nicht nur die substantielle Natur zahlreicher Krankheiten an, sondern man betrachtet auch speciell als die Ursachen derselben organische Wesen, die sich, ähnlich dem erkrankten Organismus selbst, aus Keimen entwickeln, und von deren Lebenseigenschaften der Verlauf der Krankheit abhängt. Es ist von logischem Interesse, sich die Motive zu vergegenwärtigen, welche diesen partiellen Sieg der für überwunden gehaltenen ontologischen Anschauung herbeiführten.

Der nach der Zeitfolge erste, an sich völlig unzureichende Grund bestand in der Beobachtung der Lebenscyklen niederer Organismen. Wie in der Thatsache eines der organischen Entwicklung analogen Verlaufes überhaupt die ersten Wurzeln der ontologischen Ansicht lagen, so empfing dieselbe durch die nähere Kenntniss der verhältnissmässig rasch auf einander folgenden Lebenszustände namentlich der Gährungsorganismen neue Stützen. Hatte schon der alte van Helmont die Krankheit als eine »Fermentation« bezeichnet, so wurde in der neueren Zeit das genauere Studium der Fermentwirkungen und namentlich die Erkenntniss der leichten Verbreitung der kleinen Gährungsorganismen die Hauptquelle ähnlicher Hypothesen. Zu dieser inneren kam bald noch eine äussere Analogie,

*) Vgl. Kurt Sprengel, Geschichte der Arzneikunde, 3. Aufl., III, S. 449 f.

die Aehnlichkeit mit den durch grössere parasitische Wesen hervorgerufenen Erkrankungen. Bereits Schoenlein, der Entdecker des Favus-Pilzes, hatte mit den Borken desselben die Darmabschorfungen im Typhus verglichen. Noch mehr erinnerte später die Trichinosis durch ihren typischen Verlauf an die Entwicklung contagiöser Erkrankungen. Ohne durch solche Analogien vorbereitet zu sein, würde man schwerlich denjenigen Schritt gemacht haben, der zur Begründung der ontologischen Theorie der Infectionskrankheiten erforderlich war, und der in der directen mikroskopischen Nachweisung der Infectionsorganismen, ihrer künstlichen Züchtung und Uebertragung bestand. War auf diese Weise nachgewiesen, dass die an gewissen Orten haftende oder von erkrankten Individuen ausgehende Infection sowie der typische Verlauf bestimmter Krankheiten auf der Uebertragung und Entwicklung niederer Organismen oder ihrer Keime beruhen, so knüpfte sich hieran sofort eine abermalige, jetzt berechtigtere Analogie: es konnte angenommen werden, dass auch in andern Fällen, wo der directe Nachweis nicht gelungen war, Infectionsfähigkeit und typischer Verlauf für das Vorhandensein krankmachender Organismen hinreichend beweisend seien. Von diesen beiden Merkmalen musste die Infectionsfähigkeit wieder als das werthvollere erscheinen, weil hier die Uebertragung eines Krankheitsstoffes ausser Frage stand, andere Krankheitsstoffe als organisirte aber, abgesehen von den im allgemeinen leicht zu unterscheidenden eigentlichen Giftwirkungen, bis jetzt nicht bekannt sind. Der typische Verlauf für sich dagegen kann ebenso gut bloss in den Lebenseigenschaften des erkrankten Organismus seinen Grund haben. So zeigt jede durch traumatische Einwirkungen oder sonstige Reize erzeugte Entzündung sammt der sie begleitenden Fieberbewegung eine Art von typischem Verlauf. Anderseits wird man aber aus dem Mangel eines solchen noch nicht schliessen dürfen, dass keine Infection vorhanden sei. Ueberall wo sich die Infectionsorganismen hinreichend langsam und gleichförmig entwickeln können, muss die Bedingung zu einem bestimmt abgegrenzten Verlaufe fehlen. In der That ist daher selbst ein so unregelmässiges Siechthum wie die chronische Tuberculose dadurch nicht vor dem Verdacht der Infection geschützt gewesen, und die Untersuchung hat bekanntlich diesen Verdacht bestätigt.

Wie die letzte, so hat sich noch eine andere Analogie nicht als überall zutreffend erwiesen. Bei vielen Infectionskrankheiten von ausgeprägt typischem Verlauf, z. B. bei den acuten Exanthemen, verleiht die einmalige Erkrankung, auch wenn sie, wie bei der Schutzpockenimpfung, in einer milderen Form verläuft, eine gewisse Immunität gegen künftige Infectionen. Diesen stehen aber andere Fälle gegenüber, wo im Gegentheil die einmalige Erkrankung zu künftigen Infectionen geneigter macht: so die Tuberculose, die Lungenentzündung und der Rheumatismus. Für diese beiden einander entgegengesetzten Fälle bieten sich jedoch gewisse Analogien in den verschiedenartigen Vegetationsbedingungen der Pflanzen, unter denen es bekanntlich

manche giebt, die rasch den Boden erschöpfen, so dass eine zweite Cultur erst nach längerer Zeit gelingt, während andere solchen Beschränkungen durchaus nicht unterworfen sind. Hier ist es namentlich die Analogie zwischen Immunitätserwerbung und Bodenerschöpfung, die neben den früher genannten Gründen zur Stütze der Infectionstheorie verwerthet wurde.

Wie auf diese Weise die Infectionskrankheiten aus dem Rahmen der von den älteren vitalistischen und iatromechanischen Schulen gezogenen Grenzen des Krankheitsbegriffs heraustreten, so ist dies aber nicht minder bei einer andern Gruppe von Erkrankungen der Fall, welche die ärztliche Beobachtung seit langer Zeit schon mit der Vererbung in Beziehung brachte. Hier blieb der älteren Auffassung nur der völlig unbestimmte Begriff einer vererbten Anlage, dem sich fast noch weniger als dem physiologischen Vererbungsgesetz ein fassbarer Inhalt geben liess. Pathologische Anatomie und Entwicklungsgeschichte mussten zusammenwirken, um diesen Inhalt herzustellen. Beide kamen zu dem Ergebniss, dass jene krankhaften Geschwülste, deren Bildung die pathologische Beobachtung vorzugsweise aus vererbter Anlage ableitet, ihr auszeichnendes Merkmal in der Entwicklung embryonaler Gewebsformen besitzen. Nimmt man hinzu, dass das enorme Wachsthum vieler dieser Bildungen augenscheinlich auf einer embryonalen Spaltungsfähigkeit ihrer Zellen beruht, so liegt es nahe, die Anlage zu diesen pathologischen Bildungen in wirklich persistirenden Embryonalzellen zu sehen, die in irgend einer späteren Periode des Lebens, namentlich vielleicht unter dem Einfluss verminderter Resistenz der umgebenden Gewebe, zur Entwicklung gelangen. Eine Bestätigung dieser Hypothese hat man in dem Umstande gefunden, dass einerseits die Geschwülste in dem allgemeinen Typus ihrer Gewebsform dem umgebenden Gewebe homolog sind, und dass sie anderseits vorzugsweise an solchen Orten des Körpers auftreten, an denen wegen bestimmter Complicationen der Entwicklung am ehesten eine überschüssige Ablagerung der Embryonalzellen begreiflich erscheint*). Wie man sieht, so geht auch diese Theorie von Analogien, aber nicht wie die Infectionstheorie von functionellen, sondern von morphologischen Analogien aus, theils von der allgemeinen mit dem embryonalen Gewebe, theils von der besonderen mit der Structur der Nachbarorgane. Ein Nachtheil aber ist es, dass hier der Natur der Sache nach eine directe Bestätigung voraussichtlich unmöglich ist. Davon abgesehen besteht die grosse Bedeutung der Theorie darin, dass sie die pathologische Entwicklung durchaus der normalen Entwicklung der Gewebe und Organe unterordnet und daher das speciellere auf das allgemeinere Problem zurückführt. Sogar für die Aufhellung des letzteren lässt sich ihr ein gewisser Nutzen nicht absprechen, insofern an die Stelle unbestimmter

---

*) J. Cohnheim, Vorlesungen über allgemeine Pathologie, 2. Aufl., I, S. 744.

Vererbungskeime embryonale Anlagen von bestimmter morphologischer und physiologischer Bedeutung getreten sind.

Auf diese Weise hat die Entwicklung der pathologischen Anschauungen allmählich zur Unterscheidung drei ätiologisch wohl charakterisirter, aber im einzelnen zuweilen noch schwer von einander abzugrenzender Formen der Störung geführt. Die erste beruht auf der unmittelbaren mechanischen oder chemischen Schädigung der Organe; die zweite auf dem Eindringen fremder Organismen, deren Lebensprocess die Functionen des Körpers, in welchem sie sich ansiedeln, beeinträchtigt; die dritte auf der Entwicklung abnormer embryonaler Anlagen. Es ist klar, dass sich die zweite oder dritte dieser Störungen immer mit der ersten verbinden muss. Jede Wucherung fremder oder überschüssiger embryonaler Keime bedingt zugleich mechanische und chemische Schädigungen der Organe, und die letzteren sind es allein, die dem Organismus direct Gefahr bringen. Aber wahrscheinlich fehlt auch die umgekehrte Wechselwirkung nicht. Organe, die durch irgend welche Functionsstörungen ihre Resistenzfähigkeit eingebüsst haben, scheinen zur Entwicklung der fast niemals fehlenden fremden oder hereditären Krankheitskeime einen vorzugsweise günstigen Boden abzugeben, wenn auch vieles, was die frühere Beobachtung der blossen Krankheitsdisposition zurechnete, auf die Anfänge der Krankheit selbst bezogen werden mag.

Vergegenwärtigen wir uns hiernach nochmals die hauptsächlichsten logischen Hülfsmittel, welche bei der Ausbildung der pathologischen Anschauungen wirksam waren, so fällt, der Physiologie gegenüber, vor allem die grosse Rolle der Analogie in die Augen. Dieser überwiegende Gebrauch des im naturwissenschaftlichen Erfahrungsgebiet unvollkommensten logischen Verfahrens beruht theils auf der Schwierigkeit der Probleme, theils auf der verspäteten Einführung der experimentellen Beobachtung am Thiere. Immerhin macht sich schon in dem Analogieverfahren selbst ein deutlicher Fortschritt von der Aufstellung vieldeutiger Aehnlichkeiten zur allmählichen Erkenntniss bestimmterer Beziehungen geltend, und die letzteren nehmen zugleich eine Form an, in der sie sich zu concreten Fragen gestalten, welche Beobachtung und Experiment herausfordern. Auf diese Weise schliesst das Verfahren ab mit der Verification und Vervollständigung der ursprünglich nur durch Analogien gestützten Hypothesen. Obgleich in keinem Gebiet der Pathologie dieser Weg ganz vollendet ist, so bietet doch die Infectionslehre schon jetzt einzelne Beispiele, in denen die Methode ihren Abschluss gefunden, während es die Theorie der vererbten Krankheitskeime zu einer directen Bestätigung überhaupt noch nicht gebracht hat.

Jene Ursachen, aus denen die Störungen des Lebensprocesses entspringen, sind nun so verbreitet in der Natur, dass ihnen kaum ein lebendes Wesen entgehen wird. Die Vervollkommnung der Organisation steigert die Gefahr, während sie gleichzeitig Hülfsmittel schafft, ihr zu begegnen. Gleichwohl dürfte die Annahme, der Tod sei nur eine Folge dieser äusseren

Störungen*), mit einer causalen Auffassung der Entwicklungserscheinungen kaum vereinbar sein. Jede Entwicklung trägt den Keim des Todes in sich. Die eigenthümliche Stufenfolge der Entwicklungszustände wird nur unter Voraussetzungen verständlich, in denen das Ende des Processes schon eingeschlossen ist. Den Fortschritten der Gesundheitspflege und Heilkunde mag es gelingen, eine grössere Zahl von Menschen vor einem vorzeitigen Tode zu sichern, aber schwerlich wird es ihnen glücken, die natürliche Grenze des Lebens selbst zu verändern.

*) A. Weismann, Ueber die Dauer des Lebens. Jena 1882.

# Vierter Abschnitt.

## Von der Logik der Geisteswissenschaften.

---

### Erstes Capitel.

### Die allgemeinen Grundlagen der Geisteswissenschaften.

#### 1. Die Entwicklung und Gliederung der Geisteswissenschaften.

Aehnlich der Mathematik und Naturforschung sind auch die Geisteswissenschaften aus der Philosophie hervorgegangen. In ihren Anfängen ist aber die philosophische Speculation beherrscht von dem Interesse an den kosmologischen Problemen. Dies hat lange vor allem darin noch nachgewirkt, dass die Psychologie, die wir heute als die Grundlage der Geisteswissenschaften betrachten müssen, zuerst als ein Zweig der Naturphilosophie und dann als ein Anhang zur Metaphysik behandelt wurde. Nicht von ihr ist daher die Entwicklung der Geisteswissenschaften ausgegangen, sondern von einzelnen Arbeitsgebieten, die zum Theil unabhängig von der Philosophie entstanden, und deren Zusammengehörigkeit zu einem der Gesammtheit der Naturwissenschaften analogen Ganzen man spät erst erkannt hat. Schon der Ausdruck »Geisteswissenschaften« ist neuesten Ursprungs. Wahrscheinlich hat er in Hegel's »Philosophie des Geistes« seine nächste Quelle*).

Das erste, was aus dem Gebiet des geistigen Lebens die Aufmerksamkeit fesselte, war der Reflex dieses Lebens in den Handlungen der Völker. Doch selbst die Geschichtschreibung lag anfänglich in den Banden

---

*) Als „Geisteslehre“ bezeichnet Hegel selbst das ganze Gebiet (Encyklopädie, II, §. 386). Eine „Logik der Geisteswissenschaften“ hat wohl zuerst John Stuart Mill der Logik der Naturwissenschaften gegenübergestellt.

jener kosmologischen Auffassung, welche das geistige Geschehen aus einer äusseren Naturordnung ableitete, die sich in diesem Falle in den Gestalten rächender und lohnender Schicksalsgötter verkörperte. Noch die Geschichtserzählung eines Herodot trägt diesen mythologischen Charakter an sich. Aber schon in Thukydides hat die geschichtliche Darstellung eine Höhe erreicht, von der aus sie sich zwar mannigfach erweitern und vertiefen konnte, die aber, was die psychologische Auffassung des historischen Geschehens betrifft, seitdem kaum überholt worden ist.

In näherer Verbindung mit der Philosophie blieb ein anderer Zweig der Geisteswissenschaften, der neben der historischen Forschung allmählich heranreifte: die Staatslehre. In den ethischen Sentenzen, die eine sagenhafte Ueberlieferung den ältesten Weisen Griechenlands zuschreibt, vereinigt sich praktische Lebensklugheit mit dem ernsten politischen Sinn, welcher auch die Gesetzgebung der Zeit beherrschte. Von einer wissenschaftlichen Reflexion über die ethischen und politischen Aufgaben kann aber weder hier noch in der pythagoreischen Schule, trotz der tieferen philosophischen Anschauungen der letzteren, die Rede sein. Erst als jene ursprüngliche Ethik aus dem Leben verschwunden war, begann die Philosophie eine ideale Staatsgemeinschaft zu schildern, welche dem Leben als Vorbild dienen sollte. So entstand die Platonische Staatslehre, die, diesem Ursprung getreu, noch auf das innigste mit der kosmologischen Speculation verwebt und mit ihr genöthigt ist, die Dichtung zu Hülfe zu nehmen. Denn die Politik hat wie die Physik hier nicht die Aufgabe, die wirkliche Welt zu begreifen, sondern eine vorbildliche Welt dichterisch nachzuerzeugen. Erst Aristoteles verscheuchte die Phantasie aus beiden Gebieten. Seine Staatslehre war eine verstandesmässige, wenngleich idealisirende Abstraction aus den Verhältnissen seiner Zeit und Umgebung. Noch aber fehlte auch ihm eine zureichende Untersuchung der Rechtsbegriffe. Erst der eigenthümlichen Beanlagung des römischen Geistes verdankt man die Ausbildung dieses Gebietes, das wiederum völlig unabhängig von der Philosophie aus den Bedürfnissen der praktischen Gesetzgebung heraus entstanden ist. Hierdurch ist die spätere Rechtswissenschaft in nahe Beziehungen zur Geschichtsforschung getreten. Die Erkenntniss drängte sich auf, dass Recht und Staat als historisch entwickelte Bildungen nur an der Hand der Geschichte zu verstehen seien, und dass die letztere in der Untersuchung der Veränderungen der Organisation der Gesellschaft und der Rechtsanschauungen eine ihrer wichtigsten Aufgaben sehen müsse.

Das Interesse an Rechts- und Staatsalterthümern tritt nun aber in den Gesichtskreis anderer auf die Zeugnisse früherer Cultur gerichteter Bestrebungen. Sprache, Literatur und Kunst waren zuerst in der Alexandrinischen Periode zu Objecten wissenschaftlicher Erörterungen geworden, und es war so in der Philologie ein neuer Zweig der Geisteswissenschaften entstanden, der sich wiederum mit der Geschichte in Verbindung setzte. Denn je mehr diese von der Schilderung des unmittelbar Erlebten

aus ihren Blick auf die entferntere Vergangenheit wandte, um so mehr wurde ihr die philologische Forschung ein unentbehrliches Hülfsmittel, während die letztere selbst der historischen Kenntniss zu ihrer Vertiefung in die Denkmäler vergangener Zeit nicht entrathen konnte. Die eigenthümliche Richtung der philologischen Untersuchung aber brachte es mit sich, dass sie sich mehr noch als andere Zweige der Geschichtswissenschaft in dem Masse erweiterte und vervollkommnete, als ihre Gegenstände in grössere Ferne rückten. Denn während der politische Historiker in den unmittelbaren Erlebnissen Probleme vorfindet, deren Lösung oft schwieriger sein kann als das Verständniss der Ereignisse einer früheren Zeit, empfängt die philologische Forschung ihren Hauptantrieb aus dem Bestreben, die Cultur einer fremd gewordenen Vergangenheit neu zu beleben in dem Bewusstsein der Gegenwart. Darum hat nach jener ersten Begründung eine zweite Blüthe der Philologie in der Zeit der Wiedererneuerung der Wissenschaften begonnen, als die Scholastik, die in einseitiger Weise und mit unhistorischem Sinne die Schätze der Vergangenheit gepflegt, in Verfall gerathen war und der Geist der Zeit an der Ideenwelt der Griechen und Römer sich zu verjüngen strebte. Jetzt stand die Philologie auf der Höhe ihres Einflusses: sie erweckte selbst Philosophie und Naturwissenschaft zu neuem Leben.

Viel später löste sich allmählich von der Staatslehre ein Forschungsgebiet ab, das zu ihr in ein ähnliches Verhältniss zu treten bestimmt war wie die Philologie zur Geschichte: die *Staats- und Volkswirthschaftslehre*. Dieses Gebiet umfasste zunächst die Untersuchung der von der politischen Theorie ausser Betracht gelassenen Verhältnisse der Güterproduction, des Waaren- und Geldverkehrs. Aber in der messenden Richtung, zu welcher eine solche Untersuchung allmählich durch ihre Gegenstände genöthigt wurde, lag ein Antrieb zu ihrer Erweiterung auf andere Seiten des menschlichen Daseins. So begann die *Statistik* die Verhältnisse der Lebensalter, Eheschliessungen, Geburten und Sterbefälle, des Berufsstandes und der Verbrechen einer numerischen Auswerthung zu unterwerfen und auf diese Weise das Material für den Aufbau einer *Bevölkerungskunde* zu sammeln, die gegenwärtig im Begriff ist im Verein mit der *Völkerkunde* die Bedeutung einer allgemeinen Gesellschaftslehre für sich in Anspruch zu nehmen. Diese steht aber ihrerseits wieder in naher Beziehung zur Geschichte, da die geistigen Eigenschaften der Völker und die Zustände der Gesellschaft nicht nur selbst auf geschichtlicher Entwicklung beruhen, sondern auch als die mächtigsten Factoren in diese Entwicklung eingreifen. So treten sich schliesslich *Geschichte* und *Gesellschaftslehre* als zwei nahe verbundene allgemeine Wissenschaften gegenüber, von welchen jede wieder eine Anzahl von Einzelwissenschaften unter sich enthält, deren Trennung grossentheils von praktischen Bedürfnissen bestimmt wird. Unter ihnen scheiden sich verhältnissmässig am selbständigsten von der eigentlichen Historie die Philologie, von der allgemeinen Gesellschaftslehre die Volkswirthschaftslehre und die Rechtswissenschaft.

Alle diese Zweige der Geisteswissenschaften bedürfen der Psychologie zur Ausführung ihrer Untersuchungen. Geschichte und Statistik können ohne sie Thatsachen sammeln; doch jeder Versuch einer Interpretation derselben muss zu psychologischen Motiven seine Zuflucht nehmen. Nicht minder werden die philologische Kritik sowie die Untersuchung und Anwendung der Wirthschafts- und Rechtsbegriffe von psychologischen Erwägungen geleitet. Die Psychologie steht aber mit den speciellen Geisteswissenschaften in einer doppelseitigen Beziehung. Wie sie diesen die Methoden und Principien an die Hand giebt, so erweitert sie ihrerseits durch die Rücksicht auf Geschichte und Gesellschaftslehre ihr eigenes Erfahrungsgebiet. Aus dieser Wechselwirkung schöpft schliesslich die Philosophie die Macht, die sämmtlichen Geisteswissenschaften einer philosophischen Betrachtung zugänglich zu machen. Aehnlich wie innerhalb der Naturforschung die Physik der Naturphilosophie die allgemeinen Principien der Naturerklärung zur kritischen Untersuchung überliefert, so ist es die psychologische Beleuchtung des geistigen Lebens der Menschheit, welche eine Philosophie der Geschichte und der Gesellschaft vorzubereiten hat. So enden auch die Geisteswissenschaften in der Philosophie, aus der sie dereinst ihren Ursprung nahmen. Die Philosophie selbst aber wird man trotz ihrer allgemeinen Stellung zu den Geisteswissenschaften rechnen müssen. Denn auch sie stützt sich wesentlich auf psychologische Erfahrungen, indem sie zunächst die Ausführung einer allgemeinen Erkenntnisslehre und dann auf der Grundlage dieser eine die Widersprüche und Einseitigkeiten der Einzelforschungen ausgleichende Untersuchung der Principien aller Natur- und Geisteswissenschaften zur Aufgabe hat. Hiernach werden wir in diesem vorbereitenden Capitel die Methoden und Principien der Psychologie erörtern, um sodann in den folgenden der Logik der Geschichts- und Gesellschaftswissenschaften sowie einer Kritik der philosophischen Methoden uns zuzuwenden. Nach der Beschaffenheit ihrer Aufgaben und ihrer Methoden bildet die Psychologie zugleich den Uebergang von den Natur- zu den Geisteswissenschaften. Die Naturbestimmtheit der elementareren psychischen Thatsachen weist diese von selbst einer Bearbeitung zu, die der physikalischen Methodik verwandt ist. Auf ihnen aber erheben sich die höheren geistigen Vorgänge, welche in Geschichte und Gesellschaft die herrschenden Kräfte sind und daher ihrerseits eine wissenschaftliche Analyse verlangen, die derjenigen der speciellen Geisteswissenschaften sich nähert und die Hülfsmittel derselben für sich in Anspruch nimmt.

## 2. Die Hülfsmittel und Methoden der Psychologie.

### a. Die innere Wahrnehmung.

Auf der inneren Wahrnehmung beruht die ganze Psychologie. Sie ist das unerlässliche Hülfsmittel, das zu jeder objectiven Beobachtung, die wir im psychologischen Interesse verwerthen wollen, hinzugezogen werden muss. Aber dieses Hülfsmittel gestattet vermöge seiner specifischen Eigenthümlichkeiten leider nicht die Ausbildung von Methoden, mit denen sich eine Analyse des psychologischen Thatbestandes ins Werk setzen liesse. Denn die innere Wahrnehmung vermag für sich allein niemals zur Beobachtung zu werden, insofern wir unter der letzteren die planmässige Richtung der Aufmerksamkeit auf die Erscheinungen verstehen. Die Psychologie befindet sich in dieser Beziehung im äussersten Gegensatze zu den Naturwissenschaften. Während es in ihnen überall darauf ankommt, sich von der zufälligen Wahrnehmung zur Beobachtung zu erheben, muss die Psychologie darauf bedacht sein, den Zustand der Selbstbeobachtung möglichst zu unterdrücken, um die Erscheinungen nur nach ihrem Auftreten in der zufälligen inneren Wahrnehmung aufzufassen. Eine planmässige Selbstbeobachtung, wie sie von den meisten Psychologen empfohlen wird, ist nur eine Quelle von Selbsttäuschungen. Denn da in diesem Fall das beobachtende Subject mit dem beobachteten Objecte zusammenfällt, so ist es selbstverständlich, dass die Richtung der Aufmerksamkeit auf die Erscheinungen diese selber verändert. Da ferner unser Bewusstsein für viele neben einander bestehende Thätigkeiten um so weniger Raum hat, je intensiver diese sind, so besteht fast regelmässig eine solche Veränderung darin, dass die Erscheinungen, die man beobachten will, überhaupt unterdrückt werden.

Die Hauptregel für die Verwerthung der inneren Wahrnehmung, insoweit diese für sich allein in Frage kommt, besteht somit darin, dass man so viel wie möglich nur zufällige, nicht erwartete und nicht absichtlich herbeigeführte Erfahrungen benütze. Diese Regel schliesst selbstverständlich die Ausbildung eigentlicher Untersuchungsmethoden aus. Es ergeben sich aber aus ihr einige beachtenswerthe Unterregeln. Erstens nämlich wird es zweckmässig sein, sich so viel als möglich auf die Erinnerung und nicht auf die unmittelbare Wahrnehmung zu verlassen. Denn nur wenn wir uns Vorgänge, bei deren Ablauf jede Absicht der Selbstbeobachtung ausgeschlossen war, vergegenwärtigen, wird der störende Einfluss der letzteren annähernd zum Verschwinden kommen. Der grosse Gegensatz zur physikalischen Beobachtungskunst tritt in dieser Regel deutlich zu Tage. Um sich die nothwendige Unbefangenheit zu sichern, muss die Psychologie die Unsicherheit des Gedächtnisses mit in den Kauf nehmen. Zweitens wird die innere Wahrnehmung vorzugsweise zur Auffassung der klar bewussten und namentlich

der willkürlichen Geistesacte sich eignen; die dunkler bewussten und unwillkürlichen inneren Vorgänge dagegen werden ihr fast völlig entgehen müssen, weil sie bei der unmittelbaren Wahrnehmung durch den Versuch der Selbstbeobachtung am meisten beinträchtigt werden, und weil sie bei der Reproduction am meisten dem Gedächtniss entschwinden.

Alle diese Beschränkungen gelten nicht mehr, wenn die innere Wahrnehmung nicht für sich allein zu bestehen sucht, sondern sich mit andern Hülfsmitteln von objectiver Beschaffenheit zur Ausbildung bestimmter Methoden verbindet. Solche Hülfsmittel sind das psycho-physische Experiment, die vergleichend- und die historisch-psychologische Untersuchung.

### b. Das psycho-physische Experiment.

Von August Comte, der die Unmöglichkeit einer wissenschaftlichen Selbstbeobachtung bereits vollkommen einsah, ist die physiologische Untersuchung der die psychischen Processe begleitenden physischen Vorgänge als das angeblich allein übrig bleibende psychologische Hülfsmittel empfohlen worden. Diese Ansicht enthält einen doppelten Irrthum. Erstens überträgt sie die Unsicherheit der für sich allein geübten inneren Wahrnehmung auf die Fälle, wo dieselbe neben andern objectiven Hülfsmitteln zur Verwendung kommt. Dass hier andere Gesichtspunkte gelten, davon hätten Comte schon die geläufigen Beispiele psychologischer Interpretation historischer und socialer Thatsachen überzeugen können. Zweitens übersieht sie die fundamentale Verschiedenheit der psychischen und physischen Lebensvorgänge. So wahr es ist, dass eine tiefere Kenntniss der Nerven- und Gehirnfunctionen auch dem Verständniss der psychischen Processe förderlich sein kann, so ist doch eine solche Förderung immer nur insofern möglich, als sie zu einer eindringenderen psychologischen Analyse anregt. Im entgegengesetzten Fall kann die Gehirnphysiologie höchstens die Psychologie in Verwirrung bringen, wie dies die Phrenologie älterer und neuerer Zeit sattsam beweist.

Das psycho-physische Experiment stellt sich die Aufgabe, durch physische Einwirkungen Veränderungen in dem Zustand des Bewusstseins herbeizuführen, aus welchen sich über die Entstehung, Zusammensetzung und den zeitlichen Verlauf der psychischen Processe Aufschlüsse gewinnen lassen. Seine Zwecke sind demnach völlig verschieden von denjenigen des physiologischen Experimentes, mit dem es nur die Benützung von äusseren, zunächst den Körper treffenden Einwirkungen gemein hat. Das physiologische Experiment erforscht als solches immer nur die physischen Lebensvorgänge; bei dem psycho-physischen Experiment dagegen dienen die physiologischen Einwirkungen lediglich zur Untersuchung der psychischen Erscheinungen und ihrer Gesetze. Das letztere benützt daher stets und nothwendig die innere Wahrnehmung, die es aber durch den streng geregelten

Zwang physiologischer Einwirkungen von der Unsicherheit zu befreien sucht, welcher sie für sich allein unterworfen ist.

In Folge dieser Beziehung zur inneren Wahrnehmung unterscheidet sich die specielle Methodik des psycho-physischen Experimentes zugleich wesentlich von der physikalischen Methodik, die ihr im übrigen ebenso wie allen andern Zweigen experimenteller Forschung zum Vorbild gedient hat. Da nämlich die Thatsachen der inneren Wahrnehmung, wenn auch in einer rohen und unvollständig erkannten Form, unmittelbar Jedermann zugänglich sind, so kommen hier jene zufälligen Impulse der Untersuchung, wie sie den Naturwissenschaften nicht selten in völlig neuen Erscheinungen und Objecten entgegentreten, so gut wie völlig in Wegfall. Neue Thatsachen können von der Psychologie immer erst auf dem Wege experimenteller Analyse gefunden werden. Auch die neuen Forschungen, zu welchen solche Thatsachen herausfordern, bauen daher stets auf den Resultaten vorausgegangener Arbeiten weiter. Hierdurch wird hier das Verfahren von vornherein ein planmässigeres. In der Regel muss der Entwurf einer Untersuchung, schon ehe diese beginnt, vollständig festgestellt sein, und gewisse nach einem gemeinsamen logischen Schema angelegte Methoden werden in gleichförmiger Weise auf eine Reihe verwandter Probleme angewandt. Jener glückliche Instinkt, dem so oft der physikalische Forscher die grössten Erfolge verdankt, kommt hier wenig, um so mehr dagegen die der Untersuchung vorausgehende logische Ausarbeitung der Methode in Frage. Damit hängt noch eine andere Eigenthümlichkeit nahe zusammen. Ein einzelnes Resultat hat wegen der nicht zu beseitigenden störenden Nebeneinflüsse der inneren Wahrnehmung meistens nur einen geringen Werth. In der Regel muss daher die experimentelle Untersuchung darauf bedacht sein, eine sehr grosse Zahl gleichartiger Beobachtungen zu sammeln, bei deren Anordnung auf die Elimination der niemals fehlenden entgegengesetzten Einflüsse der Ermüdung und Uebung Bedacht zu nehmen ist, und bei deren Verwerthung ausserdem nicht selten die mathematischen Methoden der Fehlerausgleichung herbeigezogen werden können.

Näher sind es nun drei logische Aufgaben, welche das psychophysische Experimentalverfahren verfolgen kann. Sie bestehen 1) in der Ermittelung der Beziehungen, in denen die psychischen Elementarphänomene zu den sie begleitenden physikalischen und physiologischen Vorgängen stehen (psycho-physische Methoden im engeren Sinne), 2) in der Untersuchung der psychologischen Bestandtheile und der Bildungsgesetze der zusammengesetzten Vorstellungen (Methoden zur Untersuchung der Vorstellungsbildung), und 3) in der Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der Vorstellungen nach seinen qualitativen und quantitativen Verhältnissen (Methoden zur Untersuchung des Vorstellungsverlaufes). Die erste Classe dieser Methoden ist der eigentlichen Psychophysik, die beiden andern sind der experimentellen Psychologie zuzurechnen. Denn die Ergebnisse der ersteren Methode

besitzen einen gemischten Charakter, und sie können, insofern sie auf eine Beziehung zwischen dem Physischen und Psychischen gehen, im allgemeinen sowohl einer physiologischen wie einer psychologischen Interpretation unterworfen werden. Die letztgenannten Methoden dagegen verfolgen vorwiegend psychologische Zwecke: hier dient die physische Einwirkung hauptsächlich nur als unerlässliches Hülfsmittel zur Auslösung bestimmter psychischer Reactionen.

Die Psychophysik ist von ihrem Begründer G. Th. Fechner als eine exacte Lehre von den Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Leib und Seele bezeichnet worden*). Für die psychologische Methodik aber erscheint es zweckmässig, dem psycho-physischen Experiment im engeren Sinne zunächst nur die Untersuchung derjenigen Beziehungen zuzuweisen, welche zwischen den psychischen Elementarphänomenen, den Empfindungen, und ihren äusseren Bedingungen, den Sinnesreizen, bestehen. Denn sobald es sich um zusammengesetzte Vorstellungen handelt, lässt sich die Untersuchung der psycho-physischen Wechselbeziehungen von der rein psychologischen Untersuchung der Vorstellungsbildung nicht mehr trennen. Freilich setzt nun jene elementare Frage der Psychophysik selbst schon eine psychologische Analyse der Vorstellungen voraus, da uns die einfachen Empfindungen nicht unmittelbar in der inneren Erfahrung gegeben sind. Diese Analyse ist aber so einfacher Art, dass hierin kein Hinderniss liegt, die psycho-physischen Methoden an den Anfang zu stellen, um so mehr, als sie noch auf der Grenzscheide zwischen dem physiologischen und dem psychologischen Gebiet sich befinden. Diesem sowohl wie jenem gegenüber besitzen sie die Eigenthümlichkeit, dass es sich hier um eine Beziehung begleitender Erscheinungen handelt, die von einer eigentlichen Causalbeziehung durchaus verschieden ist. Denn die physiologischen Vorgänge, die der Sinnesreiz auslöst, bilden einen in sich geschlossenen Zusammenhang, von dem nirgends eine Brücke in das ihm ungleichartige psychologische Gebiet hinüberführt. Hierdurch entsteht die Forderung, dass die Empfindung ihrerseits in eine rein psychologische Causalverbindung eingereiht werde, welche Forderung nur durch die auch in andern psychischen Thatsachen begründete Voraussetzung befriedigt werden kann, dass uns in den Bewusstseinserscheinungen nur Bruchstücke eines psychischen Causalnexus gegeben sind, von dem uns zahlreiche Glieder theils durch die in unbewussten geistigen Dispositionen begründete Entstehung von Vorstellungen, theils durch die Rückverwandlung bewusster Vorstellungen in solche Dispositionen verloren gehen. So gelangt die Psychophysik schon an der Schwelle ihrer Untersuchungen zu der Voraussetzung, dass das individuelle geistige Leben ein tieferes Verständniss nur durch die Annahme seines Zusammenhangs mit einem allgemeineren geistigen Leben finden kann, eine Voraussetzung, welche sie der Psychologie über-

*) Fechner, Elemente der Psychophysik, I, S. 8.

liefert, und welcher diese, soweit es auf empirischem Boden möglich, mittelst der vergleichend- und historisch-psychologischen Untersuchung zu folgen bestrebt ist.

Die psycho-physischen Methoden zerfallen in zwei Classen, in die Abstufungs- und in die Fehlermethoden. Unter ihnen reihen die ersteren unmittelbar der allgemeinen Methode der Gradation sich an. (Vgl. Abschn. III, S. 301.) Ihre charakteristischen Eigenthümlichkeiten gegenüber den physikalischen Anwendungen dieser Methode beruhen auf der Natur der inneren Wahrnehmung. Der letzteren sind die Zustände des Bewusstseins in irgend welchen qualitativen oder intensiven Gradunterschieden gegeben. In eine bestimmte Massbeziehung können aber verschiedene Empfindungen im allgemeinen nur in dem Fall gebracht werden, wo sie uns gleich erscheinen. Andernfalls ist nur das unbestimmte Urtheil möglich, dass die eine intensiver sei als die andere oder in ihrer Qualität von ihr abweiche. Dieser Schwierigkeit suchen nun die Abstufungsmethoden zu entgehen, indem sie mittelst angemessener Abstufung der äusseren Reize specielle Fälle herausgreifen, in denen die Unterschiede der Empfindung quantitativ vergleichbar werden. Solcher specieller Fälle giebt es nur zwei: den einen wählt die Methode der Minimaländerungen, bei welcher die Unterschiede der Reize so abgestuft werden, dass die Unterschiede der Empfindungen für unsere Auffassung eben merklich werden oder eben verschwinden; den anderen wählt die Methode der mittleren Abstufungen, welche zu zwei Reizen von übermerklichem Unterschied einen dritten aufsucht, für den die correspondirende Empfindung ihrer Intensität oder Qualität nach in der Mitte zwischen den zwei ersten zu liegen scheint. Die Fehlermethoden dagegen benützen die Vergleichung von Reizen, deren Unterschiede für die Empfindung untermerklich sind. Dabei kann wieder entweder durch das vergleichende Subject selbst ein Reiz B so lange abgestuft werden, bis er dem Normalreize A gleich erscheint, d. h. also der Unterschied beider untermerklich wird: dies geschieht bei der Methode der mittleren Fehler. Oder es kann dem Reize B ein constanter, aber wieder untermerklicher Unterschied von A gegeben und dann in einer grossen Zahl von Beobachtungen bestimmt werden, in wieviel Fällen die wahre Richtung des Unterschieds erkannt, und in wievielen sie verkannt wird: so bei der Methode der richtigen und falschen Fälle. Sowohl bei den Abstufungs- wie bei den Fehlermethoden sind auf verschiedenen Stufen der intensiven oder qualitativen Reizscala, um deren Untersuchung es sich handelt, die Beobachtungen auszuführen, wenn die Feststellung einer allgemeineren gesetzmässigen Beziehung zwischen der objectiven Abstufung der Reize und der subjectiven Abstufung der Empfindungen möglich sein soll. Die Abstufungsmethoden haben dann den Vortheil, dass aus ihren Resultaten unmittelbar das Beziehungsgesetz zwischen Empfindung und Reiz sich ergiebt, während dies bei den Fehlermethoden erst durch Hülfsbetrachtungen möglich wird.

Diese Hülfsbetrachtungen bestehen in einer Anwendung der mathematischen Fehlertheorie, welche der bei der Ermittelung physikalischer Beobachtungsfehler gebrauchten entgegengesetzt ist. Während nämlich hier die in der unbekannt bleibenden subjectiven Empfindlichkeit begründeten Abweichungen der Beobachtungen benützt werden, um die Grösse des wahrscheinlichen Fehlers und so die Präcision der Beobachtungen zu bestimmen, wird dort die wirkliche Grösse des Fehlers oder die relative Häufigkeit desselben gemessen, um hieraus auf die subjective Empfindlichkeit für gegebene kleine Reizunterschiede zu schliessen. Hiernach sind die Fehlermethoden den Eliminationsmethoden verwandt, von denen die von der Physik benützten experimentellen Verfahrungsweisen der Fehlerbestimmung eine specielle Form bilden. (S. 345.) Nur betrifft bei den psycho-physischen Methoden das Eliminationsverfahren nicht die Fehler selbst, sondern deren zufällige Schwankungen, welche man durch die Sammlung einer grossen Zahl von Beobachtungen zu beseitigen sucht, um gewisse Durchschnittswerthe der Fehlergrösse oder der Fehlerzahl zu gewinnen, die sich dann zur Bestimmung der Unterschiedsempfindlichkeiten benützen lassen *).

Die Methoden zur Untersuchung der Vorstellungsbildung sind theils analytischer, theils synthetischer Art. Sie schliessen den entsprechenden Formen des physikalischen Experimentalverfahrens sich an und verbinden sich wie diese zu Inductionen, welche, von bestimmten Hypothesen geleitet, die Gesetze der Vorstellungsbildung zu ermitteln suchen. Der Hauptunterschied, welcher aus den schon erwähnten Eigenthümlichkeiten der inneren Wahrnehmung entspringt, liegt hier darin, dass die Untersuchung einen überwiegend qualitativen Charakter besitzt; wo sie aber quantitativ wird, da muss sie stets die oben erörterten psycho-physischen Methoden zu Hülfe nehmen. Trotzdem überschreiten dabei die letzteren nicht die Grenzen ihres ursprünglichen Anwendungsgebietes, insofern derartige Massbestimmungen innerhalb der Wahrnehmungsvorgänge in letzter Instanz doch sich beziehen auf das Verhältniss gewisser elementarer Empfindungen, die in die Wahrnehmungen eingehen, zu den äusseren Reizen. Je weniger übrigens die Resultate der qualitativen Analyse eine Bestätigung auf synthetischem Wege gestatten, um so wichtiger für die Prüfung leitender Hypothesen pflegt eine quantitative Ergänzung zu sein. Es mag genügen, dies an zwei Beispielen zu veranschaulichen, deren eines qualitativer Art ist, aber in einer sehr wirksamen Combination der analytischen mit der synthetischen Methode besteht, während das andere nur die Analyse anwendet, dafür aber die psycho-physischen Massmethoden gleichzeitig verwerthet.

In seiner Untersuchung über die Bedingungen der binocularen Körpervorstellung ging Wheatstone von der Analyse der zwei Netz-

*) Vgl. zu obigem die Abhandlungen über Methodik in meinen Philosophischen Studien, I, S. 1 f. u. S. 556 f.

hautbilder aus, die einem in der Nähe betrachteten körperlichen Gegenstande entsprechen. Er zeigte, dass die Unterschiede dieser Bilder bei gegebener Entfernung von der Tiefenausdehnung des Körpers abhängig seien. Den hieraus gezogenen Schluss bestätigte er aber auf synthetischem Wege, indem er durch zwei verschiedene Zeichnungen von entsprechenden Unterschieden, die er beiden Augen darbot, den nämlichen körperlichen Effect hervorbrachte. Die Ausführung dieses Versuchs führte zur Erfindung des Stereoskops*).

Die Untersuchung der Entstehung des Sehfeldes stützte sich auf die allgemeine Voraussetzung, dass eine aus zahlreichen Elementen bestehende Vorstellung nicht ursprünglich gegeben, sondern nur auf dem Wege irgend eines psychischen Processes entstanden sein könne. Der aus geläufigen Beobachtungen bekannte Einfluss der Augenbewegungen auf räumliche Schätzungen führte dann zu der Vermuthung, dass die extensive Vorstellung selbst aus dem Zusammenwirken von Bewegungs- und Netzhautempfindungen hervorgehe. Der Bestätigung dieser Hypothese diente eine Reihe von Analysen, die sich namentlich bezogen 1) auf die Localisationsstörungen bei theilweiser Lähmung eines Augenmuskels, 2) auf die normalen geometrisch-optischen Täuschungen (z. B. Ueberschätzung einer Verticallinie gegenüber einer gleich grossen Horizontallinie, der Aussenhälfte einer Geraden gegenüber einer gleich grossen Innenhälfte, u. dergl.), die auf Asymmetrien der Muskelanordnung und ihnen entsprechende Unterschiede der Innervationsempfindung zurückgeführt werden konnten, 3) auf die Unterschiedsempfindlichkeit für extensive Strecken und diejenige für Bewegungen, welche beide von übereinstimmender Grösse gefunden wurden, endlich 4) auf die kleinste absolute Raumgrösse und die kleinste Bewegung des Auges, die wir unter günstigen Bedingungen eben noch wahrnehmen können, und die ebenfalls übereinstimmen**). In den beiden ersteren Fällen handelt es sich im allgemeinen um qualitative, in den zwei letzten dagegen um quantitative Analysen, bei denen die psycho-physischen Massmethoden zu Rathe gezogen werden müssen. Dieses sowohl wie das vorige Beispiel stimmen aber auch darin mit der physikalischen Induction überein, dass eine zuvor gebildete Hypothese die ganze Untersuchung leitet.

Die Methoden zur Untersuchung des Vorstellungsverlaufs können gleichfalls entweder eine qualitative oder eine quantitative Aufgabe verfolgen. Jene besteht in der Ermittelung der Beziehungen, welche die einzelnen Glieder einer Vorstellungsreihe nach ihrem qualitativen Inhalte zeigen. Diese Untersuchung fällt nicht unmittelbar in den Bereich experimenteller Methoden, sondern sie bedarf der statistischen Verwerthung möglichst zahlreicher zufällig sich darbietender Beispiele. Um eine bestimmte Nöthigung zur Sammlung solcher Beispiele herbeizuführen, und um zugleich einen

---

*) Wheatstone, Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband I, 1842, S. 1 f.

**) Wundt, Beiträge zur Theorie der Sinneswahrnehmung, S. 145 f.

einigermassen gleichförmigen Zustand des Bewusstseins festzustellen, ist es zweckmässig, die statistischen Erhebungen der Associationsformen mit der quantitativen Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der Vorstellungen zu combiniren. Dagegen fällt die qualitative Analyse der apperceptiven Formen ganz und gar der unten zu besprechenden historischen Methode anheim. Die quantitative Ermittelung des Verlaufs der Vorstellungen bedient sich zu verschiedenen Zwecken zweier Methoden, die wir als die Differenzmethode und als die Vergleichungsmethode bezeichnen wollen.

Die Differenzmethode ist eine Unterform der Eliminationsmethode. Sie besteht darin, dass man die Zeitdauer eines psychischen Vorgangs ermittelt, indem man ihn aus einem zusammengesetzteren Vorgang, in welchen er als Bestandtheil eingeht, durch Subtraction der andern Bestandtheile, mit welchen er verbunden ist, gewinnt. Die Anwendung dieser Methode ist schon bei den relativ einfachsten psychischen Processen erforderlich, weil es überhaupt keinen psychischen Vorgang giebt, dessen Zeitdauer sich isolirt, losgelöst von bestimmten physischen Processen der Nervenleitung und Muskelbewegung, ermitteln liesse. Mit Rücksicht auf die äusseren Hülfsmittel kann daher die Differenzmethode auch als Reactionsmethode bezeichnet werden. In alle Anwendungen derselben geht nämlich als letzter chronometrisch nicht weiter zu zerlegender Bestandtheil die einfache Reactionszeit ein, d. h. diejenige Zeit, welche mit der Einwirkung eines einfachen Sinnesreizes von zuvor bekannter Beschaffenheit beginnt und mit einer zuvor bestimmten, unmittelbar nach der Auffassung des Reizes möglichst schnell ausgeführten willkürlichen Bewegung endigt. Die Zeit irgend eines einfachen psychischen Actes kann dann als Differenz der Reactionsdauer, die ihn einschliesst, und der unter sonst gleichen Bedingungen bestimmten einfachen Reactionszeit erhalten werden. Bezeichnen wir die letztere als Reactionszeit I. Ordnung und dagegen die Zeit irgend eines Vorgangs, der ausser ihr noch einen einfachen psychischen Vorgang enthält, als Reactionszeit II. Ordnung, so wird durch die Einführung eines weiteren psychischen Actes in die letztere eine Reactionszeit III. Ordnung entstehen und möglicher Weise noch zu Reactionszeiten IV. und höherer Ordnung fortgeschritten werden können. Immer wird man dann zunächst durch Subtraction der einfachen Reaction die Zeitdauer eines zusammengesetzten psychischen Processes erhalten, der sich weiterhin durch successive Subtraction der complexen Reactionszeiten in seine einfachsten Bestandtheile zerlegen lässt. Bis jetzt ist man nur bis zu Reactionszeiten III. Ordnung gelangt, und die einfachen psychischen Vorgänge, deren Dauer auf diesem Wege bestimmt wurde, sind: Unterscheidung zwischen zwei oder mehreren Eindrücken, Wahl zwischen verschiedenen Bewegungen, Association einer Vorstellung, einfache Urtheilsacte*).

---

*) Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., S. 219 f. Philos. Studien, I, S. 25 f.

Wie die Differenzmethode als eine den psychologischen Zwecken angepasste Form der physikalischen Eliminationsmethode betrachtet werden kann, so schliesst die Vergleichungsmethode zunächst an die Gradationsmethode sich an. Das Princip derselben besteht allgemein darin, dass durch äussere Einwirkungen ein Vorstellungsverlauf erzeugt wird, dessen subjective Beziehungen nun mit den entsprechenden objectiven Beziehungen der Eindrücke verglichen werden. Die Methode lässt wieder verschiedene Gestaltungen zu, unter denen hier die Reproductionsmethode als Beispiel genügen mag. Sie dient der Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften der Reproduction der Vorstellungen, beschränkt sich aber gleichfalls auf die quantitative Seite dieses Vorgangs, indem man entweder zu ermitteln strebt, wie eine von zwei einfachen Eindrücken eingefasste Zeitstrecke in der Reproduction sich verändert, oder indem man Grenzbestimmungen über die Zahl successiver einfacher Eindrücke auszuführen sucht, die das Bewusstsein zu vereinigen vermag. Das erstere geschieht in den Untersuchungen über den Zeitsinn, das letztere in denjenigen über den Umfang des Bewusstseins. In beiden Fällen werden wieder die psycho-physischen Massmethoden zu Rathe gezogen. So untersucht man den Zeitsinn, indem durch zwei durch ein bestimmtes Intervall getrennte Schalleindrücke eine Normalzeit t und dann nach einer vorher festgestellten Zwischenzeit eine Vergleichszeit $t'$ angegeben wird, welche letztere unter Anwendung der Methode der Minimaländerungen successiv um minimale Grössen verlängert oder verkürzt werden kann, bis in einem Fall die Grenze $t' > t$, im andern $t' < t$ eben erreicht ist. Bezeichnet man beide Werthe als $t'_o$ und $t'_u$, so ist dann $T = \frac{t'_o + t'_u}{2}$ diejenige Zeit, welche in der Reproduction der Normalzeit t gleich erscheint, oder $\Delta = t - T$ ist der Schätzungsfehler der Zeit t. Diese Methode, für verschiedene Werthe der Zeit t und für möglichst verschiedene Zwischenintervalle zwischen t und $t'$ durchgeführt, liefert ein umfassendes Material für die Beurtheilung der Verhältnisse des Zeitsinns*).

Es versteht sich schliesslich von selbst, dass bei allen Methoden, die sich auf die Untersuchung des Vorstellungsverlaufs beziehen, ein Hauptaugenmerk darauf gerichtet sein muss, dass für alle in Vergleich gezogenen Beobachtungen der Bewusstseinszustand als ein hinreichend constanter angesehen werden könne. Dies geschieht durch die Elimination der Ermüdung und Uebung, die theils eine passende Anordnung der Versuche, theils eine den definitiven Versuchen vorausgehende Vorübung, theils endlich die Sammlung zahlreicher Beobachtungen voraussetzt, auf welche nöthigenfalls die allgemeinen Principien der Fehlerelimination angewandt werden können.

Die drei Hauptmethoden der experimentellen Psychologie, die Methoden

---

*) Philosophische Studien, I, S. 78, 562. Ueber eine andere Form der vergleichenden Methode, die Complicationsmethode, siehe ebend. S. 34.

der psycho-physischen Wechselbeziehungen, der Untersuchung der Vorstellungsbildung und des Verlaufs der Vorstellungen erschöpfen an sich alle elementaren Probleme der Psychologie. Hätten diese Methoden ihre Aufgaben erledigt, so würde eine vollständige Analyse der Thatsachen des individuellen Bewusstseins in Bezug auf die Verhältnisse ihrer Coëxistenz und Aufeinanderfolge gelungen sein. Zur exacten Lösung dieser einfachen Aufgabe eignet sich nur die experimentelle Methode; anderseits reicht sie auch niemals über dieselbe hinaus. Insbesondere also bleiben alle Probleme, die sich auf die psychische Entwicklung und die Entstehung der zusammengesetzteren Geisteserzeugnisse beziehen, den weiteren objectiven Methoden der vergleichend- und der historisch-psychologischen Untersuchung vorbehalten.

### c. Die vergleichend-psychologische Methode.

Die vergleichende Methode ist für die Psychologie in verschiedenen Formen anwendbar. Das entwickelte und normale menschliche Bewusstsein kann nämlich verglichen werden 1) mit den Bewusstseinserscheinungen anderer beseelter Wesen, der Thiere, 2) mit den psychischen Eigenschaften des Kindes in verschiedenen Lebenszeiten, 3) mit den Aeusserungen des gestörten Bewusstseins, und endlich kann 4) die menschliche Species in Bezug auf ihre durch Rasse und Nationalität bedingten geistigen Unterschiede Gegenstand der Vergleichung werden. Die vier Disciplinen der vergleichenden Psychologie, die auf diese Weise entstehen, die Psychologie der Thiere und des Kindes, die psychische Pathologie und Anthropologie, befolgen zwei fundamentale Methoden, die in ihnen allen übereinstimmend wiederkehren, und die wir nach dem Vorbild der verwandten Methoden der Naturforschung als die individuelle und als die generische Methode bezeichnen. (Abschnitt III, S. 283.)

Die individuelle Methode untersucht die psychischen Functionen eines Individuums oder einer zusammengehörigen Gruppe von Individuen; sie bestrebt sich, die wechselseitigen Beziehungen der Functionen zu erkennen und auf diese Weise ein möglichst vollständiges Bild von dem geistigen Leben des Gegenstandes der Beobachtung zu gewinnen. So besitzen wir Studien über das psychische Verhalten gewisser Insekten, Wandervögel und Hausthiere, Aufzeichnungen über die Entwicklung des Kindes, Schilderungen über den geistigen Zustand der einzelnen Naturvölker u. dergl. Es ist klar, dass diese Methode den Anfang aller vergleichend-psychologischen Untersuchungen bilden muss. Sie selbst ist aber nichts anderes als eine specielle Anwendungsform der analytischen Methode. Sie bereitet die Gegenstände für die weitere Untersuchung vor, indem sie jeden einzelnen einer sorgfältigen psychologischen Zergliederung unterwirft. Dabei stützt sich die letztere der Hauptsache nach auf die blosse Beobachtung. Doch ist die Anwendung experimenteller Einwirkungen nicht ganz aus-

geschlossen, und diese können auch hier werthvolle Antworten auf die durch vorangegangene Beobachtung angeregten Fragen ergeben. Man setzt dann absichtlich das der Untersuchung unterworfene Individuum bestimmten äusseren Einwirkungen aus, von denen man annehmen darf, dass sie Bewusstseinsreactionen hervorrufen, aus welchen auf die geistigen Zustände und Vorgänge selbst geschlossen werden kann. In solcher Absicht werden z. B. den Bienen und Ameisen bei der Ausführung ihrer Bauten Hindernisse in den Weg gelegt, die Bewohner verschiedener Stöcke vermengt oder die eines einzigen getrennt, u. s. w.*). Bei der Beobachtung von Kindern, Geisteskranken oder Naturmenschen ist man natürlich auf mässigere Einwirkungen, auf unschädliche Störungen des gewohnten Vorstellungsverlaufes, die Herbeiführung neuer Wahrnehmungen oder eine mit Vorsicht zu verwerthende directe Befragung, angewiesen. Alle diese Verfahren besitzen den Charakter psycho-physischer Experimente, die aber wegen der verwickelten Natur der Probleme von qualitativer Beschaffenheit bleiben.

Die generische Methode greift eine einzelne psychische Function oder eine zusammengehörige Gruppe von solchen heraus, um sie an einer grösseren Reihe individueller Gegenstände der Beobachtung zu prüfen. In diesem Sinne werden die einzelnen Gemüthsbewegungen, geleitet von ihren objectiven Ausdrucksformen, oder die primitiven Erscheinungen des socialen Lebens bei Thieren und Menschen verglichen; ebenso sind die Sprache des Kindes, die Religionsvorstellungen, die sittlichen Anschauungen der Naturvölker oder selbst vereinzelte Vorstellungen und Sitten, wie z. B. die Ansichten über den Zustand nach dem Tode, die Formen der Eheschliessung u. dergl., Objecte einer vergleichenden psychologischen Prüfung. Jede solche generische Untersuchung setzt eine vorangegangene individuelle voraus, und wie diese in einer Analyse der einzelnen Gegenstände, so besteht jene in einer Synthese der in einer Reihe von Einzelanalysen gewonnenen Resultate. Aber zu diesem allgemeinen Verhältniss der Methoden, das hier wiederkehrt, treten noch einige für die psychologische Untersuchung charakteristische Momente. Zunächst braucht sich die individuelle Analyse keineswegs auf alle psychischen Functionen eines Individuums oder einer Individuengruppe gleichmässig zu erstrecken, sondern meistens bemächtigt sich sofort die isolirende Abstraction des Gegenstandes im Interesse der nachfolgenden generischen Untersuchung, welche im Hinblick auf die allgemeinen psychologischen Fragen den höheren Werth besitzt. Hierdurch geschieht es, dass die generische Untersuchung bei ihrem Beginn häufig den grössten Theil der analytischen Aufgabe noch unerledigt vorfindet und daher selbst aus einer mehr oder minder grossen Zahl von Einzelanalysen besteht, die der synthetischen Verknüpfung unterworfen werden. Nicht

*) John Lubbock, Ameisen, Bienen und Wespen. Deutsche Ausg. Leipzig 1883. Vgl. bes. S. 198 f.

selten bietet dann die letztere neuen Stoff zu analytischen Untersuchungen, und ebenso lässt sich von der generischen zur individuellen Untersuchung zurückgehen, indem man mittelst der umfassenderen Vergleichung, welche die erstere gestattet, nun erst ein tieferes Verständniss des Zusammenhangs der individuellen Functionen zu gewinnen sucht. Es ist besonders die individuelle menschliche Psychologie, in deren Dienste so die sämmtlichen Anwendungen der vergleichenden Methode Verwerthung finden.

Die individuelle sowohl wie die generische Methode stützt sich im Gebiet der vergleichenden Psychologie auf die nämlichen logischen Operationen, deren sich überall die Beobachtungswissenschaften bedienen, nämlich theils auf die Schlüsse der Uebereinstimmung und der Unterscheidung, theils auf diejenigen der Verbindung und Trennung. (Vgl. Bd. I, S. 324, 329, und oben Abschn. III, S. 282.) Die individuelle Untersuchung wendet dieselben an, um die constanteren von den variableren Erscheinungen der geistigen Entwicklung zu sondern. Die generische benützt übereinstimmende Thatsachen zur Gewinnung psychologischer Allgemeinbegriffe und zur Fixirung bestimmter Regelmässigkeiten des geistigen Lebens. Widerstreitende Erscheinungen dagegen dienen theils zur Verhütung vorzeitiger Verallgemeinerungen, theils helfen sie charakteristische Unterschiede feststellen, welche für bestimmte Fragen der geistigen Entwicklung von positivem Werthe sind. Nicht selten geschieht es, dass eine negative Instanz zunächst in der ersten und dann in der zweiten Form Anwendung findet. So wird man z. B. die Thatsache, dass es Völker im wilden Zustande giebt, bei denen eine Ehe existirt, als ein beachtenswerthes Zeugniss gegenüber der auf die Wahrnehmungen an andern wilden Stämmen gegründeten Annahme eines Zustandes ursprünglicher Ehelosigkeit des Menschen betrachten dürfen. Zugleich könnte hier die widerstreitende Thatsache eine positive Bedeutung besitzen, insofern sie auf die Möglichkeit verschiedener Urzustände hinweist. Wenn jedoch, wie in diesem Beispiel, positive und negative Instanzen ohne sichere Entscheidung einander gegenüberstehen, so wird man sich, ehe man zu einer solchen Theilung der Fälle schreitet, zunächst nach weiteren Thatsachen umsehen, durch die vielleicht eine Entscheidung zu gewinnen ist. Auf diese Weise hat man z. B. die Erscheinung, dass sehr häufig auf primitiven Stufen nur die Mutter für die Verwandtschaft bestimmend ist, als ein positives Zeugniss für die Annahme einer ursprünglichen Ehelosigkeit angesehen*). Aber abgesehen von der noch nicht sicher entschiedenen Frage nach der Allgemeinheit dieser Einrichtung wird die in Rede stehende Instanz schon desshalb nicht als eine zwingende anzusehen sein, weil ein derartiges Mutterrecht in sittlichen Vorstellungen begründet sein kann, die mit monogamischen und namentlich mit polygamischen Institutionen wohl verträglich sind. Wie alle compa-

---

*) A. H. Post, Die Geschlechtsgenossenschaft der Urzeit, S. 95. Die Anfänge des Staats- und Rechtslebens. Oldenburg 1878, S. 10 f.

rativen Wissenschaften in ihren Anfängen, so leidet auch die vergleichende Psychologie unter dem Fehler ungemessener Verallgemeinerungen aus einer kleinen Zahl übereinstimmender Fälle, denen gegenüber die widersprechenden übersehen oder unterschätzt werden. Dieser Fehler entspringt auch hier aus vorgefassten Ansichten, die man nicht als fruchtbare, aber jederzeit der Prüfung bedürftige Hypothesen behandelt, sondern als Maximen, von denen man bei der Aufsuchung der Thatsachen sich leiten lässt.

Zur Vermeidung dieses Uebels ist bei allen Methoden der vergleichenden Psychologie die Regel festzuhalten, dass dieselben in planmässiger Weise angewandt werden. Hierdurch treten dieselben in einen sehr bestimmten Gegensatz zur subjectiven inneren Wahrnehmung, bei der im Gegentheil der zufällige Eintritt der Erscheinungen für die richtige Auffassung derselben der günstigste ist. Zugleich hat dies den Uebelstand, dass namentlich im Gebiet der psychischen Anthropologie, wo die Untersuchungsobjecte nicht unmittelbar dem Psychologen selbst zugänglich sind, die Gewinnung allgemeiner Resultate sehr verzögert wird, wenn sie erst aus einer grossen Zahl individueller, auf planmässiger Beobachtung beruhender Analysen abgeleitet werden sollen. In einzelnen Fällen ist darum schon versucht worden, hier unmittelbar mit der generischen Methode zu beginnen, indem man z. B. durch Versendung von Fragebogen ein Zusammenarbeiten der Forschungsreisenden für die Beantwortung allgemeiner Fragen zu erzielen suchte*). Gewiss kann auf diesem Wege Erspriessliches geleistet werden, wenn auch die Schwierigkeiten, die aus dem verschiedenen Interesse und der verschiedenen Begabung für den Gegenstand erwachsen, nicht zu verkennen sind. Hier trägt die individuelle Methode ihre Correctur in sich selbst: in der Schilderung, welche ein ethnologischer Forscher von dem geistigen Zustand einer bestimmten Bevölkerung entwirft, pflegt es nicht an Merkmalen zu fehlen, aus denen auf den Werth seiner Mittheilungen geschlossen werden kann. Das System der Fragebogen dagegen legt, wie es leider meistens bei statistischen Erhebungen der Fall ist, nothgedrungen der sorgfältigsten und der unzuverlässigsten Aussage gleiches Gewicht bei. Jedenfalls würde es daher gerade bei so schwer zu beurtheilenden Fragen wie den psychologischen bedenklich sein, jenes Verfahren in anderer als in subsidiärer Weise zu verwerthen. Das hauptsächlichste Hülfsmittel der generischen Vergleichung wird also auch hier immer die synthetische Verarbeitung einer Reihe vorangegangener individueller Analysen bleiben. Dieses letztere Verhältniss bringt es aber mit sich, dass die Verwerthung der Beobachtungen in der Regel nicht von denjenigen geschieht, welche dieselben gesammelt haben. Dem Forschungsreisenden, der die individuelle Analyse liefert, fehlt meistens der weite

*) Zuerst angewandt von Darwin, Der Ausdruck der Gemüthsbewegungen. Deutsche Ausg., 1872, S. 15. Dann von Grant Allen, Der Farbensinn. Deutsche Ausg., 1883, S. 196.

Gesichtskreis völkerpsychologischer Erfahrung, und er ist daher geneigt, das Individuelle für ein Allgemeingültiges zu halten. Der vergleichende Anthropologe, wenn ihm auch die lebendige Anschauung mangelt, wird dafür um so leichter die zur Anwendung der comparativen Methode erforderliche Vielseitigkeit und Unbefangenheit sich erwerben können. Um so wünschenswerther aber ist es, dass, ebenso wie es von Seiten verschiedener Naturwissenschaften geschieht, so auch die Psychologie dem Forschungsreisenden gewisse Fragen und Gesichtspunkte an die Hand gebe, auf die er bei der Sammlung seiner Beobachtungen Rücksicht zu nehmen hat.

Mehr als andere Zweige psychologischer Forschung sind schliesslich die aus der verschiedenartigen Anwendung der vergleichenden Methode entspringenden Gebiete gewissen Gefahren ausgesetzt, vor denen nicht eindringlich genug gewarnt werden kann. Diese Gefahren bestehen in Gebietsüberschreitungen, zu denen gerade das Verfahren der Vergleichung herausfordert. Am häufigsten äussern sich dieselben in falschen Analogien, welche in der Uebertragung des Standpunktes der eigenen inneren Wahrnehmung auf die psychischen Zustände und Leistungen anderer Wesen ihre Quelle haben. Die grössten Verheerungen haben solche Analogien in der Thierpsychologie angerichtet. Wer allen Handlungen der Thiere, insbesondere allen Instinktäusserungen, die Reflexionen des eigenen Bewusstseins unterschiebt, der wird leicht die regelmässigen Wanderungen der Zugvögel, die Nestbauten zahlreicher Thiere, die Gewohnheiten der gesellig lebenden Insekten und ähnliche Dinge als Erscheinungen bewundern, welche den Leistungen menschlicher Intelligenz nicht nur gleichkommen, sondern dieselben sogar gelegentlich übertreffen. Schon das Wort »Thierstaat«, welches nichts als eine falsche Analogie ist, hat durchaus unangemessene Vorstellungen über die geistige Stufe niederer Thiere erweckt*). Die Psychologie des Kindes leidet zwar etwas weniger an diesem Uebel, entsprechend der grösseren wirklichen Aehnlichkeit; dafür ist man hier um so mehr bereit, vorgefasste Meinungen der Beobachtung unterzulegen. Wer an die angeborenen Ideen glaubt, welch treffliche Gelegenheit bietet das Verhalten des Kindes in der frühesten Lebenszeit, um sie zu demonstriren. Wer an die angeborenen Ideen nicht glaubt, wie schlagend beweist wiederum das Kind, dass alle Vorstellungen erworben werden! Die Spracherfindung des Kindes wird von einigen Psychologen ausführlich geschildert, andere behaupten wohl mit grösserem Rechte, dass die so genannte Kindersprache von den Müttern und Ammen erfunden sei**). Der einzige Weg, um sich aus diesen Dilemmen zu retten, bleibt die möglichste Vermeidung zufälliger vereinzelter Beobachtungen, die sorgfältige Analyse

*) Vgl. den Aufsatz über den gegenwärtigen Zustand der Thierpsychologie. Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil. II, S. 137 f.

**) Vgl. meine Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., II, S. 439 f.

jeder einzelnen Thatsache mit Rücksicht auf die sie begleitenden und die ihr vorangehenden Umstände. Von entscheidender Bedeutung für bestimmte Fragen ist ausserdem das psychische Verhalten bei gewissen angeborenen Sinnesmängeln. Namentlich die Untersuchung der Blindgeborenen und Taubstummen bildet hier einen wichtigen, zunächst an die Psychologie des Kindes sich anschliessenden Zweig vergleichender Psychologie. Ohne Zweifel ist aber der Umstand, dass kein Blindgeborener Licht- und Farbenempfindungen kennt, in der Frage der angeborenen Vorstellungen von grösserer beweisender Kraft als hundert mehrdeutige Beobachtungen am normal entwickelten Kinde.

In anderer Weise ist die psychische Anthropologie der Gefahr der Gebietsübertretung ausgesetzt. Wir besitzen aus historischen Denkmälern nur eine äusserst spärliche Kunde von den ursprünglichsten geistigen Entwicklungsstufen der Menschheit. Wie nahe liegt also der Gedanke, dass man die noch heute lebenden primitiven Rassen benütze, um aus ihrem Zustande ein Bild zu gewinnen von unserer eigenen Vergangenheit. In der That ist dies der Weg, welchen zuerst die englische Anthropologie in neuerer Zeit eingeschlagen hat, und welchem man auch in Deutschland gefolgt ist, um zu den kühnsten, aber gleichwohl mit grosser Sicherheit vorgetragenen Behauptungen über die ursprünglichen Sitten- und Rechtszustände der menschlichen Gesellschaft zu gelangen. Während man früher, nach ebenso lockeren Analogien, annahm, der Staat sei aus der Familie hervorgewachsen, erfahren wir heute, dass der Mensch ursprünglich in ungeselligem Zustande gelebt hat; denn bei einigen der rohesten Wilden ist dies noch jetzt der Fall. Während man früher in der Monogamie den Anfang der menschlichen Geschlechtsgemeinschaft vermuthete, schliesst man gegenwärtig aus den nämlichen Quellen, dass der Urmensch ein agamisches Individuum gewesen sei*). Vielleicht wäre es nützlich, wenn die Anthropologen, welche auf diese Analogien so weittragende Schlüsse gründen, auch einer anderen Erfahrung ihre Aufmerksamkeit schenkten. Vor einem Jahrhundert bewunderten die Völkerkundigen in den Idiomen der polynesischen Inselbewohner die menschliche Ursprache. Heute wissen wir, dass der Vocalreichthum dieser Sprachen, in welchem jene Zeit ein untrügliches Zeugniss höchsten Alters erblickte, eine Erscheinung tiefen Verfalls ist, die auf eine lange Geschichte äusserer Vermengungen und innerer Veränderungen hinweist. Der Fehler dieses Verfahrens liegt darin, dass hier ohne weiteres die comparative der historischen Methode substituirt wird. Nur die letztere ist im Stande, die Probleme, die sich auf die geistige Entwicklung der Menschheit beziehen, direct zu lösen. Die vergleichende Methode vermag zwar Anhaltspunkte für die Reconstruction der geschichtlichen Ent-

*) Das Hauptwerk dieser Richtung ist John Lubbock's „Origin of civilisation". In Deutschland sind die sociologischen Arbeiten von Bachofen und Post durch ähnliche Methoden zu ähnlichen Resultaten gelangt.

wicklung zu bieten. Aber sobald sie weit genug gediehen ist, um einigermassen sichere Schlüsse zuzulassen, wie z. B. im Gebiet der Sprachvergleichung, so tritt sie aus dem Rahmen der sonstigen Anwendungen der comparativen Methode heraus und wird selbst zur historischen Methode. So lange dagegen dies nicht der Fall ist, so fallen ihrem Forschungsgebiet ganz andere, von den Aufgaben der historischen Methode abweichende Probleme anheim. Sie muss sich nämlich darauf beschränken, mittelst der Vergleichung Thatsachen zu gewinnen, aus denen sich die Abhängigkeit des gegenwärtigen geistigen Zustandes von den ebenfalls gegenwärtig gegebenen Naturbedingungen erschliessen lässt.

Dieses allgemeinste Problem der ethnologisch-psychologischen Forschung setzt nun vor allem die Anwendung der generischen Vergleichung voraus. In dieser Hinsicht hat hier weit mehr als in den übrigen Gebieten der vergleichenden Psychologie die individuelle Methode eine bloss vorbereitende Stellung. Die Analyse der geistigen Entwicklung eines einzigen Kindes, einer einzigen Thierspecies kann schon werthvolle Resultate für die Kenntniss der geistigen Entwicklung überhaupt ergeben. Dagegen wird auch die genaueste psychologische Untersuchung eines Volksstammes niemals dazu gelangen, festzustellen, was den unmittelbar einwirkenden Naturbedingungen, und was der historischen Vergangenheit zuzuschreiben sei. Nur die umfassendste Vergleichung verschiedener Völker wird im Stande sein, die Einflüsse der letzteren, deren directe Erforschung der historischen Methode zufällt, einigermassen zu eliminiren und so die ersteren zu isoliren. Zugleich wird aber hierdurch von selbst die ethnologische Untersuchung auf die vorzugsweise Benutzung derjenigen Menschenstämme beschränkt, bei denen die historischen Einflüsse verhältnissmässig zurücktreten, der Naturvölker. Gerade hierin scheidet sich schon äusserlich die comparative Methode von der historischen, welche ihrerseits noch bestimmter auf die Culturvölker angewiesen ist.

### d. Die historisch-psychologische Methode.

Indem die Psychologie die Geschichte und deren einzelne Zweige als Hülfsquellen ihrer Forschung zu verwerthen sucht, gewinnt es fast den Anschein, als wenn sie in einen fehlerhaften Cirkel geriethe. Die Geschichte erstrebt überall eine psychologische Interpretation ihrer Thatsachen und hat daher die Psychologie als ihre Mutterwissenschaft anzuerkennen; wie ist es damit vereinbar, dass sie selbst wieder in Bezug auf gewisse Probleme zum Hülfsmittel der Psychologie werde? Dennoch ist dieser Cirkel ein vollkommen naturgemässer, und er wiederholt sich fast auf allen Gebieten der Geisteswissenschaften. So ist die Philologie eine Hülfswissenschaft der Geschichte, aber die philologische Interpretation und Kritik müssen ihrerseits von historischen Anschauungen getragen sein. Das Staatsrecht bedarf der Kenntniss der Rechtsgeschichte, doch die Geschichte des öffentlichen Rechts

bleibt unverständlich ohne die leitenden Ideen des systematischen Staatsrechts. Mehr noch als die Naturforschung zeigen die Geisteswissenschaften solche Verhältnisse mannigfaltigster Wechselwirkung, und es beruht dies wohl theils auf ihrer im allgemeinen jüngeren Entwicklung, theils aber auch auf einem abweichenden Verhältniss der specielleren zu den allgemeineren Wissenschaften. Die grundlegenden Zweige der Naturforschung, vor allen die Mechanik, sind zu einer so hohen Ausbildung gelangt, dass sie zwar auf alle andern Gebiete einwirken, selbst aber nur geringe Einflüsse von ihnen empfangen. Die Geisteswissenschaften dagegen sind noch mitten im vollen Zug der Entwicklung, und besonders ihre allgemeine Grundlage, die Psychologie, ist den übrigen nicht vorausgeeilt, sondern hinter den meisten derselben zurückgeblieben. Auch bringt es die Natur der psychologischen Forschung mit sich, dass sie nicht, ähnlich der Mathematik und Mechanik, mittelst einer geringen Zahl von Abstractionen und Inductionen zu allgemeinsten Principien gelangen kann, die zur Deduction des Einzelnen dienlich sind; denn sie steht mitten inne in dem Strom der empirischen Forschung und wird daher wahrscheinlich immer an den allgemeinen Wechselwirkungen der Geisteswissenschaften Theil nehmen.

Zugleich ist nun das Verhältniss der Psychologie zur Geschichte einigermassen vorbildlich für alle andern Fälle ähnlicher Art. Die nächste Interpretation historischer Thatsachen begnügt sich mit der Anwendung der aus der praktischen Lebenserfahrung geläufigen Gesichtspunkte. Das auf diese Weise vermittelte Verständniss der Geschichte vertieft aber seinerseits wieder die psychologischen Anschauungen und überliefert so schliesslich selbst der wissenschaftlichen Psychologie mannigfachen Stoff für ihre Inductionen. Es ist begreiflich, dass sich gerade hier dieser Uebergang langsam vollzieht. Denn die Geschichte bereichert zunächst nur jene praktische Lebenserfahrung, deren sie selbst zu ihren Interpretationen bedurfte. Die theoretische Psychologie wird erst in dem Augenblick an dieser Wechselwirkung betheiligt, wo in den Gesichtskreis derselben gewisse allgemeine Probleme eintreten, die das Gebiet der individuellen Erfahrung überschreiten. Die Sprache, die religiösen und sittlichen Vorstellungen sind Erzeugnisse des Menschengeistes. Aber das individuelle Bewusstsein und seine Entwicklung giebt uns nur dürftige Anhaltspunkte für deren Verständniss; vielmehr bedarf ein solches zunächst der historischen Interpretation ihrer Entstehung, und erst diese vermag dann unsere Anschauungen über die psychologische Entwicklung der Vorstellungen und Gefühle überhaupt zu vertiefen. Sind doch Sprache, Mythus und Sitte gleichsam objectiv gewordene Erzeugnisse des menschlichen Bewusstseins, welche nicht nur der Zergliederung sicherer Stand halten als die schwankende innere Wahrnehmung, sondern welche überdies zum Theil Vorgänge des geistigen Lebens der Beobachtung enthüllen, die dem Umkreis des heutigen Denkens völlig entrückt sind, obgleich sie doch die Keime zu dem jetzt erreichten Zustande in sich schliessen. Auf allen diesen Gebieten muss die Geschichte Hand

in Hand gehen mit der vergleichenden Ethnologie, wenn es gelingen soll, die Resultate der letzteren ebenfalls im historischen und psychologischen Sinne zu verwerthen und die Fehler zu vermeiden, zu welchen hier eine einseitige Anwendung der comparativen Methode so leicht verführt. Denn es ist ja klar, dass, sobald erst zuverlässige Data der historischen Entwicklung gegeben sind, unter Umständen auf Grund der Vergleichung allein schon eine einigermassen sichere Einreihung in dieselben möglich wird, während ohne diese Voraussetzung die vergleichende Methode nothgedrungen nach willkürlichen, aus irgend einem subjectiven Vorurtheil entstandenen Principien ihre historische Umdeutung vornimmt.

Hiernach ist es zunächst nicht die allgemeine Geschichte, sondern die Geschichte der einzelnen Geisteserzeugnisse und Geistesrichtungen, welche als Hülfsmittel psychologischer Forschung in Betracht kommt. Eine so reiche Quelle praktischer Lebenserfahrung die politische Historie immerhin sein mag, so wenig ist sie doch bis jetzt für die theoretische Psychologie zu verwerthen. Vielmehr scheint diese vorzugsweise auf solche historische Entwicklungen angewiesen zu sein, deren Erzeugnisse nicht in sichtbarer Weise von individuellen Willenshandlungen bestimmt werden und daher in ihrer Erscheinungsweise eine Gesetzmässigkeit darbieten, die derjenigen von Naturerscheinungen einigermassen verwandt ist. Die logischen Grundformen, nach denen sich hierbei die historisch-psychologische Methode bethätigt, sind an sich von denjenigen der vergleichenden nicht wesentlich verschieden. Auch hier lässt sich wieder ein individuelles und ein generisches Verfahren anwenden, und beide bewegen sich in den Formen der Uebereinstimmung und Unterscheidung, der Verbindung und Trennung. So kann man z. B. den Bedeutungswechsel eines einzelnen Wortes durch seine historischen Wandelungen hindurch verfolgen und über die psychologische Natur dieser Veränderungen Rechenschaft geben; man kann aber auch auf Grund einer Anzahl solcher individueller Analysen eine generische Untersuchung der psychologischen Gesetze des Bedeutungswechsels überhaupt vornehmen, um dann aus dieser wieder Rückschlüsse zu machen auf die allgemeinen Gesetze der Veränderungen unserer Vorstellungen. Im weiteren Sinne fällt demnach die historisch-psychologische Untersuchung unter die vergleichende Methode. Aber wie bei allen Problemen, bei denen das Moment der Entwicklung in Frage kommt, so trennt sich auch hier das Verfahren durch die stete Mitbenutzung des Causalprincips. Die einzelnen Thatsachen werden mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit ihrer Entstehung verglichen, nicht auf ihre Aehnlichkeit überhaupt. Was nach der rein comparativen Methode zusammengehört, kann also nach der genetisch-comparativen auseinanderfallen und umgekehrt. Das äussere Merkmal, welches der letzteren die Existenz einer Causalbeziehung vorläufig verräth, ist die zeitliche Aufeinanderfolge. Wo diese in bestimmtester Weise an einem einzelnen Gegenstand wahrzunehmen ist, wie solches in zahlreichen Fällen der Sprach- und Mythengeschichte zutrifft, wo z. B. eine

einzelne mit demselben Namen bezeichnete Göttergestalt in auf einanderfolgenden Zeiträumen eine abweichende, aber doch durch irgend ein Zwischenglied verbundene Bedeutung besitzt, da kann die Existenz eines causalen Verhältnisses nicht zweifelhaft sein, und es bleibt nun nur noch die Aufgabe, die ursächlichen Bedingungen dieser Veränderung zu finden und sie psychologisch zu verwerthen. Wo ein derartiger Uebergang nicht festzustellen ist, da muss die rein comparative Methode herbeigezogen werden, die gerade dann eine grössere Sicherheit bietet, sobald sie nur in die Lücken der wirklich historischen Entwicklung eingreift. Zugleich ist die historisch-psychologische Untersuchung selbstverständlich überall auf die Methoden der betreffenden Geschichtswissenschaften angewiesen, deren Resultate sie verarbeitet. Sie trennt sich von der historischen Untersuchung eben nur darin, dass sie den geschichtlichen Zusammenhang in psychologische Causalbeziehungen überzuführen und aus den letzteren allgemeine psychologische Gesetze zu gewinnen sucht. Da nun die geschichtliche Forschung selbst schon der psychologischen Causalbeziehungen nicht entrathen kann, so unterscheidet sich die psychologische Aufgabe wesentlich nur durch die systematischere Verfolgung der letzteren und durch die hinzutretende allgemeinere psychologische Verwerthung. Innerhalb der Wechselwirkungen zwischen Psychologie und Geschichte nimmt so jene denjenigen Standpunkt ein, auf welchem der historische Stoff als Material zu psychologischen Forschungen verarbeitet wird, während bei den historischen Disciplinen im Gegentheil das Psychologische nur als ein Hülfsmittel erscheint, dessen man zur causalen Interpretation der geschichtlichen Thatsachen benöthigt ist.

Nach den bis jetzt in der geschichtlichen Forschung gegebenen Grundlagen lässt die historische Psychologie zunächst in drei Gebiete sich trennen: in die Psychologie der Sprache, des Mythus und der Sitte. Sie sind sämmtlich mehr Zukunftswissenschaften als wirklich vorhandene Forschungsgebiete. Doch ist durch die vergleichende und historische Linguistik die Sprache am meisten zu einer psychologischen Verwerthung vorbereitet. Freilich weisen hier die gegenwärtig am gründlichsten durchforschten Erscheinungen des Lautwechsels zunächst auf physiologische Bedingungen hin; neben diesen sind aber tiefer liegende psychologische Motive, die wahrscheinlich sogar die ursprünglicheren sind, kaum zu verkennen, wenn sie auch noch sehr einer näheren Untersuchung bedürfen. Zugänglicher scheinen derselben schon jetzt die Wortbildungslehre und die Syntax. Gerade bei ihnen empfindet man es deutlich, dass es eigentlich nur einer Umkehrung des Standpunkts bedarf, um unmittelbar aus der Sprachwissenschaft in die Psychologie einzutreten. Der Grammatiker begnügt sich mit der äusseren Form, der historische Sprachforscher giebt Auskunft über deren Entstehung und zugleich, soweit die Sprache selbst das Material dazu bietet, über die Entstehungsbedingungen; dem Sprachpsychologen sind die letzteren die Hauptsache, und er zieht zu ihrer Erkenntniss nicht bloss

die grammatischen und historischen Thatsachen, sondern auch in weitestem Umfang psychologische Momente herbei, um dann schliesslich aus den psychologisch interpretirten Thatsachen der Sprache wiederum neue Gesichtspunkte für die Psychologie zu gewinnen. Directer noch weist ein freilich bis jetzt von der Sprachwissenschaft vernachlässigtes Gebiet auf eine psychologische Verwerthung hin, der Bedeutungswechsel der Wörter. Hier waltet einerseits die specifisch historische, nur wenig durch die Beimengung der bloss comparativen Methode getrübte Untersuchung vor; anderseits besteht der Bedeutungswechsel aus Erscheinungen, die nicht nur eine psychologische Interpretation dringend verlangen, sondern auch verhältnissmässig leichter als andere linguistische Thatsachen einer solchen zugänglich sind. Die einzige Schwierigkeit liegt darin, dass mehr als bei andern Erscheinungen äussere Causalmomente, wie Culturbedingungen, historische Schicksale der Völker, von Einfluss sind und daher eine umfassendere Mitberücksichtigung der andern Geschichtsgebiete erheischen.

Weiter als die Sprache dürften vorläufig noch Mythus und Sitte von einer fruchtbaren Verwerthung für die historische Psychologie entfernt sein. Dieser Umstand hat die Folge gehabt, dass gerade hier die oben erwähnten Gebietsüberschreitungen der rein vergleichenden Methode von unverhältnissmässig grossem Einflusse gewesen sind.

Abgesehen von dieser Verdrängung durch die Vergleichung coexistirender Zustände ist die historische Psychologie noch durch ein Vorurtheil geschädigt worden, welches der unabhängigen Verwerthung namentlich der linguistischen Resultate im Wege stand. Dasselbe bestand in der besonders bei Sprachforschern verbreiteten Ueberschätzung der individuellen Psychologie und ihrer Methoden, wie der inneren Wahrnehmung, der Beobachtung des Kindes, oder auch gewisser speculativer Voraussetzungen, welche von der Philosophie aus die psychologische Forschung beeinflusst haben*). Indem man zwar für die linguistischen Thatsachen eine psychologische Interpretation suchte, nicht aber dieselben zur Gewinnung psychologischer Folgerungen benützte, konnte von einer Anwendung der historisch-psychologischen Methode nicht die Rede sein, und selbst die zufälligen Rückwirkungen, welche der historische Stoff trotzdem auf die psychologische Forschung ausübte, wurden durch den im voraus eingenommenen Standpunkt und die Vorurtheile, die er mit sich führte, zum Theil wieder unwirksam.

---

*) Vgl. meinen Aufsatz über die Aufgaben der experimentellen Psychologie, in „Unsere Zeit“, 1882, S. 403 f.

## 3. Die Principien der Psychologie.

### a. Die psychologischen Grundbegriffe.

Die Psychologie bedarf, wie jede erklärende Wissenschaft, einer leitenden Voraussetzung, welche sie aus den einfachsten Erfahrungen abstrahirt, um sie dann auf alle Erscheinungen ihres Gebietes anwenden zu können. Diese Voraussetzung braucht nicht nothwendig in einem Begriff zu bestehen, sondern sie kann an und für sich ebenso gut in eine Mehrheit von Begriffen zerfallen. In der That geschah dies bei der lange Zeit herrschenden Lehre von den Seelenvermögen, welche jedoch die Aufgabe einer erklärenden Hypothese verfehlte, indem sie lediglich auf eine Classification der psychischen Thatsachen ausging*). Immerhin lag selbst den hierher gehörigen Anschauungen ein einziger Allgemeinbegriff zu Grunde, der die Richtung der Classification bestimmte. In der Aristotelischen Gestaltung der Vermögenstheorie war dies die Ansicht, dass die Seele das Lebensprincip sei, in der Wolff'schen Lehre war es der Leibniz'sche Begriff der Monade als eines vorstellenden und strebenden Wesens.

Das Grundproblem der Psychologie besteht hiernach stets in der Aufgabe, den Begriff der Seele in solcher Weise zu bestimmen, dass derselbe eine geeignete Basis für die Erklärung der Erscheinungen abgebe. In dieser Beziehung herrscht eine vollständige Analogie mit dem Problem der Physik, welches in dem Begriff der Materie seinen Ausdruck findet. Nachdem die Frage, ob die Psychologie im selben Sinne wie die Naturwissenschaft zur Bildung eines Substanzbegriffs berechtigt sei, aus allgemein erkenntnisstheoretischen Gründen bereits verneinend beantwortet ist (Bd. I, S. 486), bedarf nur die methodologische Frage, inwiefern sich die verschiedenen Seelenbegriffe für die Untersuchung und Verbindung der geistigen Thatsachen fruchtbar erwiesen haben, noch der Erörterung. Hierbei kann die Untersuchung der einzelnen Gestaltungen jener Begriffe der Psychologie überlassen bleiben, indem wir auf die Unterscheidung der beiden Grundformen des substantiellen und des actuellen Seelenbegriffs uns beschränken. Unter dem ersteren seien alle Theorien zusammengefasst, welche die psychischen Thatsachen als die Aeusserungen irgend eines hypothetischen Substrates, einer materiellen oder immateriellen Substanz, auffassen, während der zweite Begriff diejenigen Anschauungen bezeichnen soll, nach welchen das Geistige reine Actualität oder unmittelbar in den Aeusserungen des geistigen Lebens selbst gegeben ist. Im Alterthum hatten sich beide Ansichten meistens noch nicht deutlich gesondert, doch wird die substantielle z. B. von Demokrit, die actuelle von Aristoteles vertreten. In der neueren Philosophie und namentlich

---

*) Vgl. meine Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., S. 9 f.

in der populären Weltanschauung der Neuzeit hat hauptsächlich durch Cartesius zunächst die substantielle Ansicht das Uebergewicht erlangt. Dann aber wird auch hier durch eine Reihe von Autoren, die sonst zum Theil weit von einander abweichen, wie Hume, Kant, Fichte und Hegel, das Princip der Actualität zur Geltung gebracht. Leider stehen unter ihnen gerade die entschiedensten Vorkämpfer desselben, Fichte und Hegel, der psychologischen Untersuchung am fernsten, und es ist daher begreiflich, dass die neuere Psychologie noch in hohem Grade von der substantiellen Ansicht im Sinne des Cartesianismus beherrscht wird.

Die Annahme einer Substantialität der Seele stützt sich in methodologischer Beziehung vor allem auf die Analogie mit dem materiellen Substanzbegriff. Nach den zwei Hauptgebieten der Erfahrung, der äusseren und inneren, unterscheidet man zwei Substanzen, die materielle und die immaterielle. Die bloss negative Bezeichnung der letzteren ist schon ein äusseres Zeugniss für ihren Ursprung. Ein inneres liegt in der besonderen Gestaltung, welche der substantielle Seelenbegriff angenommen hat. Bei Demokrit besteht die Seele aus den beweglichsten Atomen, bei Descartes wird sie zu einem unausgedehnten, aber einen bestimmten Ort im Raum einnehmenden Wesen. Der Begriff des Atoms als der untheilbaren räumlichen Substanz ist also auch hier erhalten. Die Cartesianische Seele ist ein mit der Eigenschaft des Denkens begabtes materielles Atom. Dieselbe verräth namentlich auch darin ihre materielle Natur, dass sie mit den körperlichen Substanzen in mechanischen Wechselwirkungen stehen soll. Doch ist es der letztere Punkt, der zu einer idealistischen Reform der substantiellen Theorie geführt hat. Um die geistige Natur der Seele zu retten, vergeistigte man die Materie. So entstand die Leibniz'sche Monade, aus der fast alle neueren psychologischen Vorstellungen mit unwesentlichen Abänderungen hervorgegangen sind. Durch die Consequenz des idealistischen Grundgedankens wird man hier zu der Anerkennung geführt, dass die Materie ein Begriff sei, der erst in unserm Bewusstsein sich bilde. Trotzdem bindet man das Bewusstsein selbst an eine Substanz, die sichtlich in der Reflexion über die körperlichen Erscheinungen ihre Quelle hat. Insbesondere die Unveränderlichkeit und absolute Entwicklungslosigkeit derselben, die am klarsten in der folgerichtigsten Gestaltung dieses Begriffs bei Herbart zu Tage tritt, kann durchaus nur aus der Vorstellung der Constanz der Materie entsprungen sein. Denn wie könnte die Betrachtung des geistigen Lebens selbst jemals die merkwürdige Vorstellung rechtfertigen, dass diese ganze Entwicklung aus den Störungen hervorgehe, die ein absolut einfaches Wesen durch sein Zusammensein mit andern ähnlichen Wesen erfahre? Eine Vorstellung, welche nothwendig zu der Folgerung führen müsste, dass dieses Wesen wieder in seiner absoluten Inhaltslosigkeit zurückbleibt, sobald jene zufälligen Störungen aufhören. Sie führt nicht immer dazu; denn bei diesem Punkte angelangt, zieht man es vor, den Folgerungen aus dem Wege zu gehen. In der That ist dies

wohl das entscheidendste Argument gegen diesen idealisirten Materialismus, dass derselbe die Erhaltung des Geistigen nur zu retten vermag, indem er sie zugleich werthlos macht. Dies ist eben die nothwendige Folge davon, dass hinter jener unvergänglichen Seelensubstanz lediglich das Princip der Constanz der Materie verborgen ist, ein Princip, welches für die Auffassung der Naturerscheinungen seine guten Dienste leistet, das geistige Leben aber zu einem entwicklungslosen Mechanismus erstarren lässt. So ist es denn nicht zu verwundern, dass die Substanztheorie auch für die Erklärung des geistigen Geschehens die an sie geknüpften Erwartungen nicht erfüllt. Gewiss soll nicht geleugnet werden, dass bei einem Descartes, Leibniz und Herbart nicht wenige werthvolle psychologische Bemerkungen sich finden. Aber bei den erstgenannten Philosophen stehen dieselben in gar keinem inneren Zusammenhang mit ihrer monadologischen Ansicht. Herbart ist der Einzige, der dahin gestrebt hat, seine metaphysischen Grundbegriffe zu einer Theorie der inneren Erfahrung zu verwerthen. Um so augenfälliger zeigt aber die Vergleichung dieses psychologischen Versuchs mit seinen physikalischen Vorbildern, dass bei ihm lediglich äussere Analogien an die Stelle einer wirklichen Erklärung getreten sind. Dass die Vorstellungen Störungen einfacher Substanzen seien, dass die Hemmung der Vorstellungen Gefühle erzeuge u. s. w., wird zwar versichert; aber nirgends liegt eine innere Nothwendigkeit oder auch nur eine zureichende empirische Bestätigung dafür vor, dass jene imaginäre Mechanik wirklich mit dem psychischen Geschehen zusammenfalle. Ganz unzulänglich vollends erweist sich dieselbe gegenüber den höheren intellectuellen Vorgängen und dem geistigen Leben in Gesellschaft und Geschichte. Der Versuch, auch diese Gebiete der nämlichen Mechanik der Vorstellungen zu unterwerfen, zeigt nur um so eindringlicher, dass dies überall zu einem entwicklungslosen Formalismus führt, welcher dem Reichthum des geistigen Lebens einen widernatürlichen Zwang anlegt. So wird es denn erklärlich, dass bei den Nachfolgern Herbart's, abgesehen von dem engeren Kreis seiner Schule, die substantielle Idee allmählich wieder zu einer metaphysischen Zierde geworden ist, deren man sich bedient, wenn man glaubt, ethischen Forderungen auf diesem aussichtslosen Wege gerecht werden zu können, die man aber zur Seite liegen lässt, sobald man sich bequemt, in die Tiefe der psychologischen Erfahrung herabzusteigen.

Die Theorie der Actualität der Seele bleibt so lange gehemmt in ihrer Entwicklung, als die naive Vorstellung des gemeinen Bewusstseins nicht überwunden ist, dass die Aussenwelt eine dem denkenden Subject gleichwerthige Realität besitze. Das Geistige bringt es hier höchstens, wie in dem νοῦς des Anaxagoras und der Aristotelischen Entelechie, zu dem belebenden und formgebenden Princip der Materie. Von dieser Auffassung aus bildet jener Dualismus, welcher das Geistige selbst substantialisirt, eine Art von nothwendigem Uebergangsglied zu dem allein zulässigen Standpunkt des reinen Idealismus, welcher die Körperwelt als

eine Bewusstseinserscheinung auffasst. Auch der Versuch, einem solchen Idealismus nahe zu kommen, indem man zunächst den Unterschied der beiden Substanzen im Sinne einer geistigen Auffassung beider beseitigt, hat in jenem Uebergang nicht nur seine historische Berechtigung, sondern für den physiologischen Standpunkt in der Betrachtung der Lebenserscheinungen sogar einen bleibenden Werth. Nur muss man sich dabei der Relativität dieses Standpunktes bewusst bleiben, der eben nur so lange sein Recht behält, als man bei der Anschauung stehen bleibt, dass unsere äusseren Vorstellungen reale Gegenstände ausserhalb unseres Geistes seien. Gerade die Psychologie wird aber unvermeidlich zur Aufhebung dieser Ansicht getrieben, da eine ihrer Hauptaufgaben darin besteht, nachzuweisen, wie sich die Vorstellung der Aussenwelt aus gewissen elementaren geistigen Vorgängen, den Empfindungen, in uns entwickelt. Nun bedarf freilich die Psychologie für diesen Nachweis bestimmter Voraussetzungen über die objectiven Einwirkungen, denen unser Bewusstsein bei seinen Vorstellungsbildungen ausgesetzt ist, und sie arbeitet in der widerspruchslosen Gestaltung solcher Voraussetzungen über die materielle Substanz mit der Naturwissenschaft zusammen. Aber damit wird diese Substanz nimmermehr zu etwas von unserer geistigen Thätigkeit Unabhängigem. War die ursprüngliche Vorstellung ein unmittelbares Erzeugniss der Vorgänge unseres Bewusstseins, so ist der so entstandene Begriff der Aussenwelt vollends ein verwickeltes Product unserer Denkprocesse. Darum bleibt es nun aber auch völlig unfassbar, woher wir das Recht nehmen sollen, auf unsern Geist, der aus bestimmten in der Entwicklung seines Denkens hervortretenden Anlässen in Bezug auf die Gegenstände seines Vorstellens den Begriff der Substanz erzeugt, diesen selben Begriff anzuwenden. Unsere geistigen Vorgänge sind uns unmittelbar gegeben, nicht als unveränderliche Objecte, sondern als ein unablässiges Geschehen, das aus seinen Vorstellungen die Dinge erzeugt, nie aber selbst zu einem Ding wird. Darum bedürfen wir denn auch bei allen psychologischen Erklärungen immer nur insoweit der substantiellen Grundlage, als bei denselben die Voraussetzung einer Aussenwelt und der Einflüsse, die wir von derselben erfahren, in Frage kommt, und immer findet hier der Begriff der Substanz nur auf die äusseren Gegenstände seine Anwendung, nicht aber auf das Subject, welches diese Gegenstände vorstellt. So bedürfen wir für die Erklärung der Sinneswahrnehmungen der physischen Processe in unsern Sinnesorganen, für die Erklärung der Reproductionen und Associationen ähnlicher Processe in unsern Centralorganen. Schon bei diesen psycho-physischen Vorgängen fällt die psychologische Seite durchaus nur unter den Begriff eines sich nach bestimmten Gesetzen vollziehenden geistigen Geschehens, und bei der Analyse der zusammengesetzten Geistesvorgänge, die aus jenen sinnlichen Elementen sich aufbauen, wird der geistige Dingbegriff eine nutzlose Zugabe, von der man bei der Erklärung der geistigen Gesetze keinen Gebrauch machen kann. Denn diese Erklärung besteht überall nur darin, dass

man aufzeigt, wie die verwickelteren Formen des Geschehens aus den einfacheren sich aufbauen, und wie unser handelndes Ich, das wir ebenfalls nur als Thätigkeit kennen, alle Formen des geistigen Geschehens schliesslich zu einheitlichen Zwecken verwerthet. Von der einfachen Empfindung an bis zum selbstbewussten logischen Denkacte ist hier alles reine Thätigkeit. Aber wir sind fortwährend geneigt, den Standpunkt der äusseren Weltbetrachtung, welcher die Vorstellungen ohne Rücksicht auf ihren geistigen Ursprung auffasst, und den psychologischen Standpunkt, für welchen die Vorstellungen lediglich als geistige Thätigkeiten Bedeutung haben, mit einander zu vermengen. Da man sich nun doch dem Eindruck nicht entziehen kann, dass die Vorstellungen als solche nicht Dinge, sondern Handlungen sind, so glaubt man einen glücklichen Ausweg gefunden zu haben, indem man sie als Handlungen einer an sich unveränderlich bleibenden Substanz auffasst. Eine Handlung sei nicht möglich ohne ein handelndes Wesen; ausserdem fordere unser Selbstbewusstsein, da es beharrlich sei, eine beharrende Grundlage.

Diese beiden Argumente sind in der That diejenigen, welche sowohl in der populären Meinung wie bei vielen Philosophen am stärksten für die substantielle Ansicht ins Gewicht fallen. Dennoch beweisen dieselben nur, wie tief eingewurzelt der materielle Dingbegriff ist. Dass jede Handlung von handelnden Objecten ausgeht, ist ja physikalisch gesprochen vollkommen richtig. Aber es bedarf wahrlich nur geringer Ueberlegung, um zu bemerken, dass für den psychologischen Standpunkt das Verhältniss dieser Reflexionsbegriffe sich umkehrt, indem hier die Vorstellung eines Objectes immer erst aus der Handlung des Vorstellens entspringt. Nun soll diese Handlung selbst wieder auf ein handelndes Subject zurückweisen. Wo und wie ist uns aber das letztere gegeben? Lediglich in jener Handlung des Vorstellens selber. Die Trennung beider ist ein Spiel mit Reflexionsbegriffen, die man zuerst in den Kategorien von Subject und Prädicat logisch von einander geschieden hat, um ihnen dann auch eine reale Verschiedenheit beizulegen. Als wenn jene logischen Kategorien etwas anderes wären als analytische Hülfsmittel unseres Denkens, die sich aus naheliegenden Gründen in Anlehnung an die äussere Erfahrung gebildet haben, aus denen aber selbstverständlich nicht der geringste Schluss auf das wirkliche Sein erlaubt ist.

Unter den nämlichen ontologischen Fehler, den dieser Schluss von der Handlung auf das handelnde Wesen begeht, fällt auch der andere, der aus dem beharrenden Selbstbewusstsein auf dessen beharrende Grundlage zurückschliesst. Das Selbstbewusstsein existirt nicht ausserhalb der selbstbewussten Handlungen, und diese sind uns wiederum nur als solche, nicht als handelnde Objecte gegeben. Ueberdies ist aber hier die Prämisse nicht einmal richtig. Unser Selbstbewusstsein besitzt keineswegs eine Constanz, die der vorausgesetzten Beharrlichkeit der Substanz oder auch nur der relativen Constanz eines empirischen Dings entspricht. Vielmehr ist in

ihm, eben weil es uns nur in seinen Handlungen gegeben ist, alles fliessend, nichts beständig. Nicht auf der Beharrlichkeit unseres inneren Seins, sondern auf der Stetigkeit seiner Veränderungen beruht jener Zusammenhang unseres Selbstbewusstseins, den wir als die Einheit des Ich bezeichnen. Diese Stetigkeit wird psychologisch insbesondere durch einen Bestandtheil vermittelt, der bei allem Wechsel der inneren Vorgänge als ein gleichförmiger wiederkehrt, durch die Thätigkeit der Apperception. Da aber die Apperception wiederum nur als Thätigkeit uns gegeben ist, so fällt jedes Motiv hinweg, jenseits dieser Grundlage unseres Selbstbewusstseins, die eben gleich diesem reine Actualität ist, noch ein von ihr verschiedenes Substrat anzunehmen, das noch dazu durch das mit allen Thatsachen des geistigen Lebens im Widerspruch stehende Merkmal der Unveränderlichkeit sich auszeichnen soll. Es ist richtig, jene stetige Thätigkeit der Apperception ist selbst die Quelle des Ding- und Substanzbegriffs, insofern diesen die Vorstellung der Einheit des Objects, die lediglich ein Reflex der Einheit unseres Ich ist, vorausgehen muss. (Bd. I, S. 415.) Dagegen hat die Voraussetzung einer absoluten Beharrlichkeit der Substanz, welche in den Principien der Constanz der Materie und der Energie ihren wissenschaftlichen Ausdruck findet, andere Quellen, die nicht in der Thätigkeit unseres Denkens selbst, sondern in den formalen Erzeugnissen desselben, namentlich in der reinen Raumanschauung, entspringen, um nachträglich durch die Forderungen der Naturerklärung verstärkt zu werden. (Bd. I, S. 491.) Für unser Denken selbst kommen aber gerade diese Motive völlig in Wegfall. Wer eine dem beharrlichen materiellen Atom analoge beharrliche Seelensubstanz voraussetzt, der wird auch der Uebertragung des Gesetzes der Constanz der Energie auf die geistige Thätigkeit nicht sich entziehen können, wenn er nicht Hülfsannahmen machen will, welche die ursprüngliche Voraussetzung wieder aufheben. Die Thatsachen der geistigen Entwicklung bezeugen es aber laut genug, dass für sie das Gegentheil eines derartigen Princips besteht. Hier gilt vielmehr ein Gesetz unbegrenzter Neuschöpfung geistiger Energie, welches nur durch die sinnliche Bestimmtheit des geistigen Lebens gewisse Hemmungen erleidet. Die Betrachtung dieser Wechselbeziehungen lehrt zugleich, dass ihrerseits wieder die unbegrenzte Entwicklungskraft des geistigen Lebens auf den Naturmechanismus zurückwirkt, um die Hemmungen des geistigen Werdens zu überwinden, so weit dies unter der Herrschaft der materiellen Constanzgesetze erreichbar ist. Das hauptsächlichste Schauspiel dieses Kampfes ist die organische Natur, in deren Entwicklung, wie schon die Biologie annehmen muss, als bestimmende Factoren psychische Kräfte eingreifen. (Abschn. III, S. 471.)

b. Die psychologischen Gesetze.

Wie die physikalischen Gesetze, so beziehen sich auch die psychologischen auf ein Geschehen, welches dem allgemeinen Causalprincip unterzuordnen ist. Aber während wir bei den ersteren alle Erscheinungen auf unveränderliche Eigenschaften einer hypothetisch vorauszusetzenden beharrenden Substanz zurückführen müssen, wenn eine zusammenhängende Naturerklärung gelingen soll, ist die ähnliche Voraussetzung für das geistige Geschehen nicht nur unbrauchbar, sondern sie führt zu Folgerungen, die aller Erfahrung widerstreiten. Dieser Gegensatz zwischen den Gebieten der Natur und des Geistes findet seinen Ausdruck in einem allgemeinen Gesetz des geistigen Wachsthums, das wir dem physikalischen Gesetz der Erhaltung der Energie gegenüberstellen können. Während das letztere auf den Satz »causa aequat effectum« gegründet ist, liefert uns jede individuelle Geistesentwicklung ein zweifelloses Beispiel gewaltiger Zunahme an geistiger Energie, und wir haben allen Grund anzunehmen, ein ähnliches Wachsthum werde bei der allgemeinen Entwicklung der Menschheit nicht gefehlt haben. Dass es sich hier bloss um eine Umwandlung nach Analogie des physikalischen Transformationsprincips handle, ist nicht annehmbar. Niemand wird behaupten wollen, dass in den ersten Sinnesempfindungen des Neugeborenen schon der Vorstellungsreichthum eines gereiften Mannes gegeben sei. Zu der Voraussetzung latenter Kräfte sind wir aber nur dann berechtigt, wenn bestimmte Hinweise auf die Existenz gebundener Energie vorliegen. Solche begegnen uns nun in diesem Falle gerade insoweit, als in unser geistiges Leben sinnliche Elemente eingehen, die an bestimmte physische Vorgänge gebunden sind. Insofern für diese letzteren das Gesetz der constanten Energie gilt, ist es daher auch auf die ersteren übertragbar, sobald man die für den psychophysischen Standpunkt gerechtfertigte Annahme macht, dass für uns in jedem Atom ein physischer und ein psychischer Elementarbegriff sich vereinigen. Aber diese sinnlichen Elemente, so unerlässlich sie für jeden geistigen Vorgang sind, lassen doch an und für sich das psychische Geschehen ganz unerklärt. Zu einer Summe von Empfindungen wird das geistige Leben erst dann, wenn man von den geistigen Vorgängen selbst abstrahirt hat. Denn dasselbe besteht gerade aus den Processen, durch welche der Stoff der Empfindungen in der mannigfaltigsten Weise verbunden, zerlegt und zu den verschiedensten intellectuellen Zwecken verarbeitet wird. Nun ist es zwar richtig, dass diese Processe selbst wieder eine sinnliche Seite haben können. Aber es ist dies doch immer nur insofern der Fall, als dieselben zu dem Vorrath der Empfindungen neue hinzufügen oder auch eine Verstärkung schon vorhandener bewirken; dagegen bleibt hiervon völlig unberührt gerade die geistige Seite des Vorgangs, die Verarbeitung der Empfindungen zu complexen Vorstellungen und Gefühlen, zu Begriffen und Gedankenverbindungen. So ist z. B. die Apperception psychophysisch fundirt, insofern sie als Innervation und verstärkende

Thätigkeit unmittelbar empfunden wird; aber die Gesetze, nach denen sie den Vorstellungsinhalt des Bewusstseins beherrscht, sind nur einer psychologischen Analyse zugänglich und in ihrer abstractesten Gestalt schliesslich auf gewisse allgemeine Denkgesetze zurückzuführen. Diese Betrachtung bedingt zusammen mit der unwiderlegbaren erkenntnisstheoretischen Wahrheit des idealistischen Grundgedankens mit Nothwendigkeit eine vollständige Umkehrung der materialistischen Denkweise: das geistige Geschehen ist nicht eine Function des physischen Organismus, sondern dieser ist eine von dem ersteren erzeugte Vorstellung, welche auf reale Schranken der Geistesthätigkeit hinweist. Ihren wissenschaftlichen Ausdruck finden diese Schranken einerseits in den physikalischen Erhaltungsprincipien, anderseits in dem psychophysischen Princip der Sinnlichkeit des geistigen Inhalts. Beiderlei Principien sind auf das innigste an einander gebunden. Aber da die physikalische Weltbetrachtung nur unsere Vorstellungen, nicht die Gesetze, nach denen sie in uns entstehen, im Auge hat, so ist für sie nirgends ein Anlass geboten, mit ihren Voraussetzungen jene Schranken der Sinnlichkeit zu überschreiten. Die Psychologie dagegen hat auf den Ursprung unserer Vorstellungen zurückzugehen, und diese Untersuchung gliedert sich in zwei Aufgaben. Einerseits handelt es sich darum, die sinnlichen Bedingungen des geistigen Lebens in ihrem Einflusse auf das letztere zu verfolgen: hier herrscht der psychophysische Standpunkt der Betrachtung, welcher mit dem physikalischen übereinstimmt, indem er nur die Voraussetzungen des letzteren durch diejenigen Annahmen ergänzt, welche durch die psychische Seite der Vorgänge gefordert werden. Anderseits sind die geistigen Processe in ihrer eigenen Natur zu erforschen: hier waltet der rein psychologische Standpunkt vor, der die sinnlichen Elemente des Bewusstseins als ein Material behandelt, nach dessen Herkunft nicht weiter gefragt, dessen geistige Verarbeitung aber näher untersucht wird. Beide Behandlungsweisen lassen sich selbstverständlich nicht völlig trennen, da schon bei den psychophysischen Processen im engeren Sinne das Hauptinteresse der Psychologie auf die geistige Seite des Geschehens sich bezieht, und da anderseits keine geistigen Vorgänge völlig unabhängig von ihrem sinnlichen Inhalte untersucht werden können. Immerhin, wenn man sich mit einer ungefähren Grenze begnügen will, so lässt sich diese dahin feststellen, dass bei den associativen Processen die physische Bedingtheit, bei den apperceptiven die psychische Gesetzmässigkeit überwiegt.

Alle Associationen der Vorstellungen erscheinen nun zunächst als Verbindungen, die in der zu einheitlichen Zwecken angelegten physischen Organisation ihren Ursprung haben. Die Bildung einer zusammengesetzten Gesichts-, Gehörs- oder Tastwahrnehmung beruht auf bestimmten Eigenschaften der peripherischen und centralen Sinnesorgane, die Verkettung ähnlicher oder gewohnheitsmässig verbundener Vorstellungen auf bestimmten Innervationsgesetzen der Centralorgane u. s. w. Dennoch weisen schon diese auf das innigste an den physiologischen Mechanismus gebundenen

Vorgänge in doppelter Beziehung über den letzteren hinaus. Erstens kann die physische Organisation gerade in ihren für die Grundlagen des Seelenlebens massgebenden Bestandtheilen gar nicht begreiflich gemacht werden, wenn man sie nicht selbst als ein Product der allmählichen Entwicklung des geistigen Lebens auffasst. Der physische Organismus giebt also dem letzteren nur zurück, was er dereinst von ihm empfangen hat. Zweitens ist das Resultat einer Association durchaus nicht vollständig in den mit einander verbundenen Empfindungen, denen bestimmte psychische Processe parallel gehen, enthalten, sondern das Wichtigste, die thatsächliche Vereinigung dieser Elemente durch die Apperception, kommt aus dem Innern des Geistes hinzu. Auch lässt sich dieser Verbindungsact durchaus nicht bloss als eine formale Handlung auffassen, die den Inhalt des Productes unverändert lässt. Vielmehr hat diese Handlung gerade mit Bezug auf den Inhalt eine schöpferische Bedeutung, so dass trotz des mechanischen Zwangs, mit dem sich die Processe vollziehen, schon hier der dem Erhaltungsprincip entgegengesetzte Charakter des psychischen Energiegesetzes zur Geltung kommt. So ist jede Gesichtswahrnehmung, jede Klangvorstellung, jede Auffassung einer Tonharmonie ein schöpferisches Geisteserzeugniss. Denn so sehr diese Vorstellungen in der genauesten Abhängigkeit von den in sie eingehenden elementaren Empfindungen sind, so entsteht doch durch die räumliche Anordnung der Lichtempfindungen, die einheitliche Färbung des Klangs, den Gefühlswerth des harmonischen Accords ein eigenthümlicher, in den Empfindungen selbst noch nicht gegebener Inhalt unserer Apperception. Am meisten scheint dieser bei der successiven Association zurückzutreten. Gleichwohl ist auch hier die Verbindung der Vorstellungen zu einer Zeitreihe eine neue Handlung unseres Bewusstseins, die zwar von den Vorstellungselementen abhängt und sich mit ihnen nach bestimmten Gesetzen verändert, die aber in denselben keineswegs ohne Rest aufgeht. Durch dieses Verhältniss gewinnt die Untersuchung aller associativen Processe einen eigenartigen Charakter. Die Psychologie sieht sich nämlich genöthigt, jeden Associationsvorgang als eine Function der Empfindungselemente oder der einfacheren Vorstellungen aufzufassen, aus denen er besteht. Sie hat ihre Aufgabe gelöst, wenn die Beziehungen zwischen diesen Elementen als den Urveränderlichen und dem entstehenden Associationsproduct vollständig ermittelt sind. Die Aufstellung dieser Beziehungen liefert ein Associationsgesetz. In den Associationsgesetzen findet daher ebensowohl die psychophysische Beschränkung wie die schöpferische Freiheit unseres geistigen Lebens ihren Ausdruck: die erstere in dem Nachweis der functionellen Abhängigkeit der Associationsproducte von ihren psychophysischen Bedingungen, die zweite in der Feststellung der Eigenartigkeit der Functionen im Verhältniss zu ihren Argumenten, ein Umstand, durch welchen diese psychischen Functionen von den physikalischen Anwendungen des mathemathischen Functionsbegriffs wesentlich sich unterscheiden. Uebrigens ist die Aufstellung von

Associationsgesetzen in dem hier festgestellten Sinne erst in sehr beschränktem Umfange gelungen. Nur die Analyse der simultanen Associationen hat bis jetzt zu Ergebnissen geführt, denen zur Gesetzesformulirung vielfach bloss noch die Feststellung quantitativer Beziehungen fehlen dürfte. Dagegen sind die gewöhnlich so genannten Gesetze der successiven Vorstellungsassociation nicht wirkliche Gesetze, sondern vorläufige Classificationsversuche, wie solche überall künftigen Gesetzesformulirungen den Weg bahnen.

Die apperceptiven Vorgänge können im einzelnen Fall nicht immer sicher von den Associationen geschieden werden, da passive Apperceptionen oder eindeutige innere Willenshandlungen an jedem Associationsprocess betheiligt sind, wesshalb insbesondere auch gewisse Reflexe der Willensthätigkeit, wie Gefühle und Affecte, wesentliche Bestandtheile der Associationsproducte zu bilden pflegen. Suchen wir aber logisch zwischen diesen passiven und den activen Geistesthätigkeiten eine Grenze zu ziehen, so ist es gerade der Begriff der Function in seiner oben bemerkten psychologischen Eigenthümlichkeit, der zu einer solchen Grenzbestimmung sich darbietet. Bei den Associationen ist die Apperception eine Function der Empfindungselemente des Bewusstseins und der psychophysischen Bedingungen, von welchen diese Elemente abhängen; bei den apperceptiven Processen sind umgekehrt die Empfindungselemente und die mit ihnen verbundenen psychophysischen Vorgänge Functionen der Apperception oder kurz, da wir die Apperception für identisch mit dem Willen halten müssen, Willensfunctionen. So entsteht ein einfacher Denkact, ein Urtheil, durch die willkürliche Gliederung einer vorher durch Association verbundenen complexen Vorstellung in zwei Bestandtheile, an deren jedem dann die nämliche Zerlegung sich wiederholen kann; so eine äussere Willkürhandlung durch die Apperception einer bestimmten Bewegungsvorstellung, die vor andern dem Bewusstsein verfügbaren bevorzugt wird, und durch die psychophysischen Rückwirkungen, welche an jene Apperception sich anschliessen. Wie in diesen Beispielen, so ist überall der apperceptive Process an Associationen gekettet. Durch die Association erst werden für ihn die Bewusstseinselemente verfügbar. Aber sobald der apperceptive Process beginnt, kehrt das Verhältniss sich um: nun erscheinen die bereit liegenden Associationen als ein Material, welches die Apperception beherrscht und nach den ihr eigenthümlichen Gesetzen zu neuen Geisteserzeugnissen verwerthet. Dabei haben diese letzteren wiederum die Eigenschaft, dass sie in dem durch die Associationen dargebotenen Stoff nicht vollständig enthalten sind. Nicht bloss lässt die Apperception beliebige associative Elemente fallen, ohne von ihnen Gebrauch zu machen, sondern sie fügt ihren Erzeugnissen gerade die für die intellectuellen Zwecke werthvollsten Bestandtheile vollkommen neu hinzu. So ist bei der Gestaltung eines Begriffs die Gewissheit, dass er die hauptsächlichsten Merkmale einer Anzahl sonst verschiedener Objecte vereinigt, das logisch bedeutsamste Element, aber dieselbe ist weder in der stellvertretenden Vorstellung, die wir als Zeichen des Begriffs be-

nutzen, noch in den associativ verbundenen Einzelvorstellungen, die zu seiner Unterlage gedient haben, enthalten. Nicht minder werden die Gesichtspunkte, nach denen wir Schlüsse bilden oder durch Abstractionen und Inductionen zur Aufstellung bestimmter Gesetze über Form und Inhalt der Erfahrung gelangen, überall erst durch die Apperception selbst hervorgebracht, die hier, wo sie das Empfindungsmaterial von sich aus verarbeitet, noch in ungleich höherem Grade schöpferisch sich bethätigt, als bei den Associationen. Während wir bei diesen wohl von einer gebundenen schöpferischen Thätigkeit reden können, bei der die Apperception durchaus unter dem bestimmenden Einfluss der unmittelbar gegebenen sinnlichen Elemente des Bewusstseins steht, tritt in den apperceptiven Processen mehr und mehr eine freie schöpferische Thätigkeit hervor, die schliesslich zu ihren reinsten Aeusserungen sich erhebt in den originalen Gestaltungen der Kunst, der Wissenschaft und des sittlichen Handelns. Nicht als ob nun diese freie Thätigkeit des Geistes eine causalitätslose wäre. Selbst die höchsten Leistungen des erfinderischen Talentes und der genialen Intuition sind schliesslich von den Bedingungen abhängig, welche äussere Naturumgebung und eigene intellectuelle Arbeit für die individuelle geistige Entwicklung geschaffen haben. Jeder active Apperceptionsact tritt uns darum als ein Geschehen entgegen, bei welchem das Ich durch die ganze Vergangenheit des Bewusstseins determinirt ist*). Aber wir haben hier überall nur an die psychologische Form des Causalgesetzes zu denken, welches mit dem Gesetz des geistigen Wachsthums verbunden ist. Wie darum schon in der einfachen Sinneswahrnehmung der Effect grösser ist als seine Ursachen, so wiederholt sich das nämliche Princip wachsender Energie in steigendem Masse bei den activen Geistesthätigkeiten.

Während wir die Associationsgesetze am klarsten aus denjenigen Bewusstseinsvorgängen abstrahiren können, bei welchen der Einfluss der Apperception zurücktritt, so bieten sich uns umgekehrt die Apperceptionsgesetze am deutlichsten in den Erscheinungen, bei welchen die Associationen von der Willensthätigkeit beherrscht werden. Ein logischer Denkact, ein willkürliches Erzeugniss der Phantasie, eine willkürliche äussere Handlung sind verhältnissmässig einfache Apperceptionsacte dieser Art: jeder von ihnen bewegt sich innerhalb der durch bereitliegende Associationen gezogenen Schranken, aber nicht diese sind es, die den Willen bestimmen, sondern der Wille, d. h. die ganze durch ursprüngliche Anlagen und vorausgegangene individuelle Entwicklung bestimmte Persönlichkeit ist es, die den sinnlichen Stoff zu neuen Erzeugnissen verarbeitet. Dieses Verhältniss verleiht den Willens- oder Apperceptionsgesetzen ein eigenthümliches Gepräge. In Folge der Unabhängigkeit von den unmittelbar vorhandenen sinnlichen Elementen des Bewusstseins erscheint das Geschehen, das jenen Gesetzen folgt, als eine freie Thätigkeit, und dieser Charakter wird noch

*) Vgl. Grundzüge der physiol. Psychologie, 2. Aufl., II, S. 395 f.

erhöht durch die schöpferische Natur dieser Thätigkeit. Die Gesetze selbst treten daher in einen auffallenden Gegensatz nicht bloss zu den äusseren Naturgesetzen, sondern auch zu den durchaus noch den Schranken der Naturbestimmtheit unterworfenen psychologischen Associationen. Sie erscheinen nicht als Gesetze in dem gewöhnlichen Sinne, den wir unter dem Einfluss der physischen Causalität diesem Begriff beilegen, sondern als Normen. Mit diesem Namen belegen wir aber Regeln, welche für bestimmte Erscheinungen gültig sein sollen, ohne dass diese ihnen in allen Fällen wirklich folgen. Den drei oben erwähnten einfachen Willensthätätkeiten, dem logischen Denkact, der willkürlichen Phantasievorstellung und der willkürlichen Handlung, entsprechen dreierlei Normen, welche das logische, künstlerische und sittliche Denken in allen ihren Gestaltungen beherrschen. Diese logischen, ästhetischen und ethischen Normen machen sich ursprünglich in der Form von Gefühlen geltend, die überall die Willensthätigkeit begleiten und, noch ehe dieselbe wirklich eingetreten ist, deren Richtung im voraus andeuten. Erst die Reflexion über das thatsächliche Verhältniss der Gefühle zu dem Vorstellungsinhalt des Bewusstseins führt zur Formulirung jener Normen, bei der aber die nachträgliche Betheiligung des logischen Denkens nicht übersehen werden darf. Denn es wird dadurch begreiflich, dass wir nach den Normen handeln können, ohne uns der entsprechenden Regeln bewusst zu sein, ja dass nicht nur bei den logischen, ästhetischen und ethischen Schöpfungen dies meistens stattfindet, sondern dass auch sehr häufig einseitige oder gänzlich falsche Formulirungen der Normen versucht werden, ohne dass doch solchen Versuchen abweichende Richtungen der intellectuellen Gefühle zu Grunde liegen müssen. In dieser Beziehung verhält es sich mit den Willensnormen wie mit den Naturgesetzen. Ihre thatsächliche Geltung bedingt noch nicht entfernt ihre Erkenntniss. Von den logischen Normen glaubte man meistens, dass sie eine Ausnahme bilden, weil ihre Regeln schon sehr frühe entdeckt worden seien. Doch gilt dies höchstens von den Gesetzen der einfachen Denkoperationen, die den nächstliegenden Verhältnissen der Vorstellungsobjecte entsprechen und darum auch der zwingenden Natur der physischen Gesetze verhältnissmässig am nächsten kommen, nicht aber von den verwickelteren logischen Methoden, deren Regeln so gut wie die Fundamente der Aesthetik und Ethik noch immer dem Streit unterworfen sind. Zu den schwebenden Problemen dieses Streites gehört insbesondere auch die Frage, ob und wie die logischen, ästhetischen und ethischen Normen wieder unter einander zusammenhängen.

Dass ein solcher Zusammenhang überhaupt vorausgesetzt werden muss, dies beweist in der That nicht nur die einheitliche Natur unseres Willens, sondern namentlich auch der den verschiedenen Willensgebieten gemeinsame Charakter objectiver Zweckthätigkeit, welchen das psychologische Causalprincip überall da gewinnt, wo der Wille bestimmend wird für den Verlauf des inneren oder äusseren Geschehens. (Bd. I, S. 580 f.) Die Umkehrung der für das Naturgebiet und im wesentlichen auch noch

für die associativen Bewusstseinsvorgänge gültigen Richtung der Causalität ist hier eine nothwendige Folge jener Umkehrung, welche der psychologische Functionsbegriff bei der Apperception erfährt. Der Wille greift verändernd ein zunächst in die Vorstellungswelt des eigenen Bewusstseins, dann von dieser her in die Aussenwelt. Er findet aber als Bedingungen seiner Thätigkeit in sich gefühlsstarke Vorstellungen, die mehr oder minder den künftigen Effecten schon ähnlich sind und so den Charakter von Zweckmotiven besitzen. Immerhin bleibt zwischen diesen Motiven und ihren Erfolgen eine Kluft bestehen, die in der schöpferischen Natur der Willensthätigkeit begründet ist, und aus der zugleich die Unmöglichkeit entspringt, die Willensnormen selbst in erschöpfende Regeln zu fassen. Logisch, ästhetisch und sittlich handelt der Wille nach Zwecken, und doch werden wir uns dieser Zwecke immer nur unvollständig bewusst. Das Gefühl dieser Beschränktheit erweckt aber im Hinblick auf die schöpferische Thätigkeit des Willens die Vorstellung, dass unser Wille das Organ eines unendlich vollkommeneren Wollens sei, aus dessen Handlungen allein die unbegrenzte Entwicklungsfähigkeit menschlichen Denkens und Handelns verständlich werde. Auf diese Weise verwandeln sich die Willensnormen in Ideale, die, nie erreichbar, immer erstrebt werden müssen.

Es liegt in der Natur dieser Ideale, dass wir zu einer abschliessenden Formulirung der ihnen entsprechenden Willensnormen niemals befähigt sind. Wären wir dies, so würden ja damit die Ideale erfüllt, und es würden die Zweckmotive der ganzen geistigen Entwicklung der Zukunft noch vor deren Ablauf uns bekannt sein. Die schöpferische Natur des geistigen Geschehens bringt es aber mit sich, dass wir immer nur von der erreichten Stufe aus den zurückgelegten Weg überblicken, und daher höchstens auch bis zu diesem Punkte über die gültig gewesenen Willensnormen uns Rechenschaft geben können. Die Untersuchung der Apperceptionsgesetze wird dadurch von selbst auf die vergleichende und die historisch-psychologische Methode hingewiesen, welche bestimmte Geisteserzeugnisse, wie Sprache, Mythus, Sitten, mit Rücksicht auf ihre Entwicklungsfolge benützen, um aus ihnen auf die Gesetze der geistigen Entwicklung Rückschlüsse zu machen. Da die Psychologie nur die allgemeinen Grundlagen dieser Entwicklung festzustellen hat, so reicht sie für ihre Zwecke mit einem verhältnissmässig beschränkteren Erfahrungsmaterial aus, und die Frage nach der Natur der Willensnormen und nach ihren historischen Entwicklungsgesetzen fällt nicht mehr in ihr Gebiet. Hier erheben sich aber auf der Psychologie die speciellen Geisteswissenschaften, Geschichte und Gesellschaftslehre, welche, in ihrem weitesten Umfange aufgefasst, die thatsächlich in Vergangenheit und Gegenwart gültigen logischen, ästhetischen und ethischen Normen festzustellen suchen. Die allgemeingültigen Resultate ihrer empirischen Ermittelungen werden sodann in getrennter Untersuchung die Objecte der philosophischen Disciplinen Logik, Aesthetik und Ethik; und die Ergebnisse der drei letzteren werden schliesslich wieder

mit Rücksicht auf die Frage nach dem allgemeinen Zusammenhang und der Entwicklung der idealen Normen von der Philosophie der Geschichte und der Gesellschaft verwerthet bei ihrem Versuch, den gesammten Inhalt der geistigen Erlebnisse und Errungenschaften der Menschheit einer Beurtheilung zu unterwerfen.

Auch darin aber zeigt sich der nahe Zusammenhang aller dieser Geisteswissenschaften mit der Psychologie als ihrer Grundlage, dass uns bei ihren Objecten überall ein ähnliches Verhältniss von Naturbestimmtheit und Freiheit entgegentritt, wie es die psychologische Untersuchung in seiner elementarsten Form in dem Verhältniss der Associationsgesetze zu den Willensgesetzen kennen lernt. Auch bei historischen oder socialen Erscheinungen überwiegt bald die zwingende Wucht äusserer Naturbedingungen, welche die Menschen mit elementarer Gewalt zu bestimmten Anschauungen und Handlungen treibt; bald tritt ein zweckbewusstes Streben, welches von einzelnen Individuen aus die Massen ergreift, als der herrschende Factor auf. Diese verschiedenen Motive auf den einzelnen Gebieten des geistigen Geschehens an der Hand der grundlegenden psychologischen Gesichtspunkte, besonders des psychologischen Causalprincips zu entwickeln, ist die Aufgabe einer Methodik der speciellen Geisteswissenschaften.

## 4. Die methodischen Hülfsmittel der speciellen Geisteswissenschaften.

Gleichförmigkeiten des Geschehens, die es uns gestatten, die Vielgestaltigkeit der Erfahrung vereinfachenden Regeln unterzuordnen, treten uns im Gebiet des geistigen Lebens nicht weniger entgegen wie in dem der Naturerscheinungen. Aber sobald wir uns das Verhältniss dieser Regeln, der Natur- und der Geistesgesetze, zu den wirklichen Thatsachen vergegenwärtigen, so beginnt ein tiefgreifender Unterschied fühlbar zu werden. Die Naturgesetze beherrschen bis ins einzelnste den Gang der Ereignisse. Wo ihre Anwendung auf diese vollständig gelungen ist, da gestatten sie darum eine Voraussage des zukünftigen Geschehens. Mag die Laplace'sche Weltformel in Bezug auf den Weltlauf im ganzen ein noch so chimärischer Gedanke bleiben, für die einzelnen Erscheinungen wird sie immer wieder zur Wahrheit, sobald es gelingt, in die Erkenntniss von deren Entstehungsbedingungen einzudringen. Nur die lebende Natur widersetzt sich, insoweit künftige Entwicklungsformen derselben in Frage kommen, einer solchen Vorausbestimmung; wir haben aber mehrfach darauf hingewiesen, dass eben hier die Grenze liegt, wo geistige Kräfte in das natürliche Geschehen einzugreifen beginnen. Und je freier diese sich entfalten, um so nichtiger wird die Hoffnung, aus den allgemeinen Gesetzen des geistigen Lebens die einzelnen Thatsachen desselben auch nur für die kürzeste Zeitstrecke vorausbestimmen zu wollen. Nur in zwei Beziehungen über-

trägt sich auch hier die Constanz des Gesetzes von dem abstracten Inhalt desselben auf die concrete Wirklichkeit: zunächst in allen jenen Verhältnissen, welche mit der Naturbestimmtheit des geistigen Lebens zusammenhängen, und sodann in der unabänderlichen Herrschaft psychischer Causalität, welche ebenso wenig wie die physische Ausnahmen duldet.

Den singulären Charakter der geschichtlichen und socialen Ereignisse hat man nun im allgemeinen auf zweierlei Art zu erklären gesucht. Auf der einen Seite wird derselbe dadurch seiner Eigenthümlichkeit entkleidet, dass man, etwa an die Meteorologie mit ihren zweifelhaften und kurzdauernden Wetterprognosen erinnernd, die ungeheure Complication der geistigen Thatsachen betont, welche unsere Erkenntniss zwinge, hier mindestens vorläufig bei der Oberfläche der Erscheinungen zu verweilen. Eine andere Partei, der sich zumeist die Vertreter der speciellen Geisteswissenschaften selbst zuneigen, verwirft jede Anwendung des Causalbegriffs auf das geistige Leben; insbesondere erblickt sie die Freiheit des Willens in seiner Causalitätslosigkeit. So entnimmt die erste dieser Anschauungen in logisch ungerechtfertigter Weise einer speciellen Anwendungsform der Causalität deren allgemeingültige Eigenschaften. Die zweite ist in dem nämlichen naturalistisch verengten Begriff der Ursache befangen; nur weil sie keinen andern kennt, kann sie es wagen, an Stelle der vollendetsten Gesetzmässigkeit ein gesetzloses Spiel des Zufalls zu setzen. Das Resultat ist in beiden Fällen das nämliche, und wenn dasselbe auf die Behandlung der speciellen Geisteswissenschaften meist nicht so schädlich gewirkt hat, als man erwarten sollte, so beruht dies nur auf dem glücklichen Umstand, dass Inconsequenz des Denkens, wenn sie zu tiefer liegenden Irrthümern sich gesellt, zu einer schätzbaren Eigenschaft werden kann.

Der eigentliche Grund dieser bedauernswerthen Verwirrung über die ersten methodischen Grundlagen der Geisteswissenschaften ist die Unkenntniss der Psychologie. Wer in der Analyse der elementaren geistigen Vorgänge das Wesen der psychischen Causalität in seinen einfachsten Formen erfasst hat, der kann auch den verwickelteren Gestaltungen gegenüber, welche dieselbe in Geschichte und Gesellschaft annimmt, den richtigen Standpunkt kaum verfehlen. Noch leidet hier die wissenschaftliche Logik wie die Wissenschaft überhaupt unter den Uebeln eines Uebergangszustandes. Das Aufblühen der Naturwissenschaften hat der Philosophie bis in dieses Jahrhundert hinein ihren vorherrschenden Charakter aufgeprägt. Auf den spiritualistischen Richtungen lastete der Druck der mechanischen Weltanschauung darum nicht minder schwer, weil sie sich desselben oft nicht bewusst waren. So ist besonders auch Kant noch ganz von dem mechanischen Causalbegriff beherrscht; sein Versuch, für das menschliche Handeln eine Art doppelter Buchführung anzuwenden, wird nur unter diesem Gesichtspunkt verständlich*). Doch unverkennbar verschiebt sich allmählich

*) Vgl. hierzu Bd. I, S. 499 f., 563 f.

der Schwerpunkt der wissenschaftlichen Forschungen. Die Naturwissenschaften haben ihre Blüthe hinter sich, die Geisteswissenschaften gehen ihr entgegen. Die Einflüsse des Naturalismus auf die letzteren, die noch überall in geschichtsphilosophischen Systemen, in sociologischen und naturrechtlichen Theorien zu spüren sind, werden damit von selbst verschwinden. Freilich ist es ein Irrthum vieler Specialforscher, wenn sie in der Beschränkung auf das Thatsächliche, in der rein historischen Auffassung der geistigen Erscheinungen das wirksame Hülfsmittel gegen jene Einflüsse gefunden zu haben meinen. Der skeptische Empirismus ist hier ebenso undurchführbar wie in der Naturforschung. Dies lehrt auf das eindringlichste die wissenschaftliche Methodik. Ohne Psychologie, Erkenntnisslehre und Ethik bleibt die historische Geisteswissenschaft ein steuerloses Fahrzeug, das von dem Wellenschlag zufälliger Tagesmeinungen hin- und hergeworfen wird. Insbesondere ist die Psychologie dazu berufen, ihre Rechte als grundlegende Geisteswissenschaft geltend zu machen. Dem Einfluss der mechanischen Physik vermag sie aber nur dann die Wage zu halten, wenn sie der Methodik der exacten Naturforschung die Waffen entlehnt, um, so weit es möglich ist, selbst zur exacten Wissenschaft zu werden.

Vermöge ihrer Stellung zwischen den Natur- und den Geisteswissenschaften verfügt die Psychologie über einen ungewöhnlichen Reichthum methodischer Hülfsmittel. Während ihr auf der einen Seite die experimentelle Methode zur Verfügung steht, bieten sich ihr auf der andern in den objectiven Geisteserzeugnissen zahlreiche Gegenstände einer vergleichenden psychologischen Analyse dar. Dies ändert sich in den speciellen Geisteswissenschaften. Die singuläre Natur der Thatsachen schliesst hier alle Hülfsmittel aus, die eine unabänderliche Gleichförmigkeit des Geschehens voraussetzen. Darum bleibt die vergleichende Methode die allein mögliche. Sie bethätigt sich wieder in den beiden Formen der individuellen und der generischen Vergleichung. Unter ihnen besitzt namentlich die erstere eine grössere und selbständigere Bedeutung als innerhalb der naturwissenschaftlichen Forschung. Am meisten noch sind es die mit der Naturbestimmtheit der geistigen Vorgänge zusammenhängenden Thatsachen der Gesellschaftslehre sowie gewisse auf allgemeineren psychologischen Bedingungen beruhende Entwicklungen, wie die der Sprache, der religiösen und sittlichen Vorstellungen, welche die generische Methode herausfordern.

Trotz dieser Beschränkung der Grundmethoden ist der Reichthum der Geisteswissenschaften an logischen Hülfsmitteln kein geringerer; denn die Durchbildung der vergleichenden Methode ist hier eine ungleich grössere als in der Naturforschung, deren Erfolge fast ausschliesslich auf dem Experimente beruhen. Eine zureichende Kenntniss der logischen Verfahrungsweisen, die der vergleichenden Methode zur Verfügung stehen, lässt sich anderseits allein aus dem Studium der Geisteswissenschaften gewinnen. Die Methodik der letzteren verdankt aber diese Vollkommenheit wiederum der Eigenthümlichkeit des psychologischen Causalprincips, die, indem sie

den Reichthum und die Vielgestaltigkeit der Geistesschöpfungen begründet, zugleich die Beziehungen vermehrt, welche der individuellen oder generischen Vergleichung als Anknüpfungspunkte dienen können. Diese Vielseitigkeit der Beziehungen verleiht den Vermuthungen und Gedankenverbindungen, welche überall der eigentlichen Untersuchung den Weg bahnen, eine grosse Beweglichkeit und Fruchtbarkeit, ein Umstand, welcher bei Naturforschern zuweilen der Ansicht Vorschub leistet, in den Geisteswissenschaften herrsche überhaupt weniger eine klar bewusste Methodik als eine Art instinktiver Intuition*). Diese Meinung ist vollkommen irrig. Das Glück des Instinktes ist in den Geisteswissenschaften ebenso wenig ausreichend wie in der Naturforschung. Aber je verwickelter und vielseitiger die Thatsachen werden, um so wichtiger wird es allerdings, dass rascher Ueberblick und reiche Combinationsfähigkeit von Anfang an das richtige Ziel der Untersuchung ins Auge fassen, während auf exactem Gebiete die zu jenen Eigenschaften in einem gewissen Gegensatze stehende Kraft der Abstraction das mächtigste Werkzeug glücklicher Entdeckungen zu sein pflegt.

---

## Zweites Capitel.

# Die Logik der Geschichtswissenschaften.

## 1. Die philologische Methodik.

### a. Philologie und Geschichte.

Gegenüber beschränkteren Auffassungen, welche die philologische Forschung, ausgehend von gewissen einzelnen Richtungen derselben, bald als Alterthumswissenschaft, bald als Studium der Sprachen und Literaturen definirten, hat August Boeckh »die Erkenntniss der Erkannten«, das Verständniss der gesammten Erzeugnisse des menschlichen Geistes als die eigentliche Aufgabe der Philologie bezeichnet; und er hat dabei gleichzeitig betont, dass diese Aufgabe mit derjenigen der Geschichte zusammenfalle**). Aber so richtig hier der umfassende Blick des grossen Philologen die Bedeutung seines eigenen Arbeitsgebietes erkannte, so sehr dürften gegen die von ihm in Anspruch genommene Identität mit der Geschichte sich Zweifel erheben lassen. Wohl setzt auch die Historie überall

*) Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge, I, S. 16.

**) A. Boeckh, Encyklopädie und Methodologie der philologischen Wissenschaften. Herausgegeben von Ernst Bratuscheck, Leipzig 1877, S. 10 f.

ein Verständniss der menschlichen Geistesschöpfungen und der Denkmäler, die uns dasselbe vermitteln, voraus, ebenso wie ihrerseits die philologische Forschung auf historische Kenntnisse sich stützen muss. Aber diese Wechselwirkung begründet noch keine Gleichheit der Aufgaben.

Die Geschichte untersucht die Veränderungen, welchen die Menschheit theils als Ganzes, theils in ihren staatlichen und nationalen Sonderungen ebenso unter dem Einfluss äusserer Naturbedingungen wie durch die eigene Entwicklung des geistigen Lebens unterworfen ist. Die allgemeine Geschichte erforscht diese Veränderungen in ihrem gesammten Zusammenhang; als solche zerfällt sie wieder in die allgemeine Geschichte der Menschheit oder Universalgeschichte und in die allgemeine Geschichte der einzelnen Nationen. Ihr ordnen sich die speciellen Gebiete der Geschichtsforschung unter, die, als politische, Cultur-, Kunst- und Literaturgeschichte, die hauptsächlichsten Theilerscheinungen des Gesammtlebens herausgreifen, um dieselben eingehender, als es die allgemeine Geschichte vermag, aber im steten Rückblick auf sie in ihren zeitlichen Veränderungen zu verfolgen. Wie jede empirische Wissenschaft, so will auch die Geschichte eine Erkenntniss der Thatsachen und ihres inneren Zusammenhangs vermitteln. Aber die Thatsachen, aus denen das historische Geschehen besteht, lassen nur theilweise jenem Begriff des λόγος sich unterordnen, von dem die Philologie ihren Namen trägt. Bestimmte Naturbedingungen, wie geographische Lage und äussere Naturereignisse, greifen in das historische Geschehen bestimmend ein, und auch unter den menschlichen Willenshandlungen, die an demselben theilnehmen, finden sich manche, die zu bleibenden Geisteserzeugnissen geführt haben und darum einer philologischen Interpretation unzugänglich bleiben. Die Motive z. B., von welchen die mannigfachen Wanderungen der Völker im Anfang der alten und der neueren Geschichte bestimmt waren, entziehen sich fast gänzlich den Hülfsmitteln philologischer Untersuchung. Während ausserdem für die Geschichte der Werth der geistigen Schöpfungen lediglich nach der Wirkung sich bemisst, die sie auf die geschichtlichen Vorgänge ausgeübt, trägt für die philologische Betrachtung jedes Geistesproduct seinen Werth in sich selber. Dieser Vertiefung in das Einzelne, welche der philologischen Forschung eigen ist, muss sich am meisten die allgemeine Geschichte entschlagen; mehr verbindet sie sich mit den specielleren Zweigen der Cultur-, Kunst- und Literaturgeschichte, und diese nehmen darum auch thatsächlich eine Art von Mittelstellung ein zwischen Philologie und Geschichte, um so mehr als ihre Objecte unmittelbar viel weniger von äusseren Naturbedingungen abhängen als die Thatsachen der allgemeinen und politischen Geschichte. Immerhin bleibt der Unterschied, dass bei der historischen Betrachtung das Einzelne nur im Hinblick auf die ganze Entwicklung, an der es theilnimmt, Verwendung findet, während die philologische Untersuchung die historische Entwicklung bloss insofern berücksichtigt, als sie die Erkenntniss des Einzelnen vermitteln hilft. Diesem Gegensatz des

Zwecks entspricht zugleich ein Gegensatz der Methode. In der philologischen Forschung herrscht das analytische Verfahren, in der historischen das synthetische vor. Jene sucht ihren Gegenstand in Bezug auf die Zusammensetzung und Verbindung der Theile zu ergründen, diese ist bestrebt, ihn in dem Zusammenhang der Thatsachen zu begreifen, auf welchem seine Bedeutung für die geschichtliche Entwicklung beruht. Die Art dieses Gegensatzes zeigt aber zugleich, wie innig philologische und historische Forschung mit einander zusammenhängen. Der einzelnen geistigen Schöpfung wird ihre geschichtliche Stellung nur dann richtig anzuweisen sein, wenn sie selbst zunächst in Bezug auf ihre Wahrheit und ihren eigenen Werth geprüft ist. Der Historiker muss also vor allem Philologe sein. In der Herbeischaffung, Prüfung und Sichtung seines Materials arbeitet er nur mit philologischen Hülfsmitteln. Die eigentlich historische Thätigkeit beginnt erst in dem Augenblick, wo er aus den durch die philologische Analyse sichergestellten Thatsachen nunmehr auf synthetischem Wege die historischen Ereignisse in ihrem Zusammenhang zu construiren beginnt. Umgekehrt muss aber auch der Philologe Historiker sein, wenn ihm nicht bei der Analyse des Einzelnen jeder Massstab objectiver Beurtheilung fehlen soll. So macht hier schon ein eigenthümlicher Cirkel sich geltend, der uns noch mannigfach in dem Verhältniss der einzelnen Geisteswissenschaften zu einander begegnen wird. Das Ganze fordert die Kenntniss des Einzelnen, und das Einzelne kann wiederum nur aus dem Ganzen heraus verstanden werden. Der Widerspruch dieses Cirkels würde unlösbar sein, wenn nicht auch hier jene bei aller wissenschaftlichen Forschung hülfsbereite Thätigkeit eingriffe, welche durch hypothetische Voraussetzungen der wirklichen Erkenntniss vorauseilt, um der Forschung bestimmte Gesichtspunkte zur Prüfung darzubieten, aus deren Widerlegung und Bestätigung allmählich sichere Resultate gewonnen werden. Ist auf diese Weise erst ein Anfang gemacht, so kann dann jener Cirkel zu einer Hin- und Herbewegung benützt werden, die durch fortwährende Wechselwirkung das Verständniss des Ganzen wie des Einzelnen zunehmen lässt.

Vermöge ihrer Aufgabe ist die Philologie ebenso die *specielle* Grundlage der Geisteswissenschaften, wie die Psychologie deren *allgemeine* ist. Während die letztere die Gesichtspunkte an die Hand giebt, nach welchen das geistige Leben in allen seinen Erscheinungen beurtheilt und schliesslich erklärt werden muss, liefert die erstere die Hülfsmittel und Methoden, mittelst deren der Thatbestand jedes einzelnen Geschehens sichergestellt und in Bezug auf seinen inneren und äusseren Werth geprüft werden kann. Die Philologie erscheint so zunächst als *Hülfsgebiet der Geschichte*. Aber da alle Geisteserzeugnisse aus historischen Bedingungen hervorgegangen sind, so ruhen alle andern Geisteswissenschaften wieder auf der Basis der Geschichte, und es erstreckt sich daher auch auf sie das Mittleramt der Philologie. So nehmen in den verschiedenen Theilen der Gesellschaftslehre, namentlich in den Rechts- und Staatswissenschaften,

die historische Begründung der Thatsachen und die philologische Kritik der Quellen eine wichtige Stelle ein. Die Philosophie kann, da ein wichtiger, in alle andern Gebiete eingreifender Bestandtheil derselben ihre eigene Geschichte ist, der philologischen Forschung nicht entbehren. In ähnlichem Sinne gewinnt aber diese selbst für Mathematik und Naturwissenschaft ihre Bedeutung. Auch sie sind Geisteserzeugnisse und bieten in ihrem historischen Werden überall wichtige Probleme philologischer Untersuchung dar. Trotz dieser vielseitigen Beziehungen wird die Philologie in den allgemeineren Umkreis der Geschichtswissenschaften einzuordnen sein; denn jene Beziehungen entspringen doch vor allem daraus, dass alle andern Wissenschaften zugleich Objecte historischer Betrachtung sein können. An die Philologie schliesst daher zunächst die Geschichtswissenschaft im engeren Sinne sich an. Zwischen beide schieben aber sodann eine Reihe von Disciplinen sich ein, welche den synthetischen Standpunkt der geschichtlichen Betrachtung mit der analytischen Thätigkeit der philologischen Forschung verbinden. Bei den oben schon erwähnten Gebieten der Cultur-, Kunst- und Literaturgeschichte überwiegt wie dem Namen, so der Sache nach das historische Element; sie werden daher angemessen der Historik zugerechnet. Bei andern dagegen liegt der Schwerpunkt so sehr auf der philologischen Seite, dass sie schon aus diesem Grunde kaum von der eigentlichen Philologie loszulösen sind. Ausserdem pflegen sie theils wegen des über die frühesten historischen Documente hinausragenden Alters ihrer Entwicklung, theils wegen des verhältnissmässig geringen Zusammenhangs mit den Ereignissen der allgemeinen Geschichte von dieser wenig oder gar nicht berücksichtigt zu werden. Hierher gehören die Geschichte der Sprachen, der mythologischen Vorstellungen und sittlichen Anschauungen. Linguistik, Mythologie und historische Ethik mögen darum hier unter dem Doppelnamen von philologisch-historischen Wissenschaften zusammengefasst werden.

Da das Object der eigentlichen Philologie das einzelne Geisteserzeugniss ist, so hat die philologische Forschung als solche zwei Hauptaufgaben. Die erste besteht in der Erkenntniss des Inhalts und der Bedeutung des Forschungsobjectes, die zweite in der Feststellung der ursprünglichen, von zufälligen oder absichtlichen Veränderungen gereinigten Beschaffenheit des Erzeugnisses. Der ersten Aufgabe entspricht die philologische Hermeneutik, der zweiten die philologische Kritik. Hermeneutik und Kritik sind zusammengesetzte Methoden, welche so vielfach auf einander angewiesen sind, dass von einer zeitlichen Priorität der einen oder der andern kaum die Rede sein kann. Doch ist vom logischen Gesichtspunkte aus die Hermeneutik das vorausgehende Verfahren. Zunächst muss ein gewisses Verständniss für den Inhalt eines Erzeugnisses gegeben sein, ehe die kritische Prüfung und Sichtung der Thatsachen beginnen kann. Aber freilich pflegt schon hier jener Cirkel fühlbar zu werden, der überall den Fortschritt philologisch-historischer Forschung begleitet.

Die unvollkommensten Resultate der Interpretation fordern bereits zu kritischen Versuchen heraus, die dann ihrerseits wieder als Ausgangspunkte neuer Erklärungen benützt werden.

### b. Die philologische Hermeneutik.

Die Aufgabe der Hermeneutik ist es, das Verständniss der Eigenschaften eines geistigen Erzeugnisses, seiner Bedeutung und der Bedingungen seiner Entstehung zu vermitteln. Das Resultat der auf dieses Ziel gerichteten Untersuchung ist die philologische Interpretation. Sie bezweckt auf geistigem Gebiete das ähnliche wie die physikalische Erklärung auf natürlichem; nach ihrem logischen Charakter sind daher die Methoden der Interpretation einigermassen verwandt den Methoden physikalischer Forschung. Insbesondere zeichnet hier wie dort die Induction durch eine starke Betheiligung deductiver Elemente sich aus. Dagegen fehlt die von dem Physiker in descriptiver Absicht geübte vorläufige Analyse der Thatsachen, da die philologische Untersuchung von vornherein die Erklärung im Auge hat, und ebenso ist die Deduction bei ihr nicht zu einer selbständigen Methode ausgebildet. So concentrirt sich denn die ganze Arbeit der philologischen Interpretation auf ein aus analytischen und synthetischen Untersuchungen zusammengesetztes Inductionsverfahren, in welches aber fortwährend einzelne Deductionen, die von bekannten Thatsachen oder allgemeingültigen Principien ausgehen, wirkungsvoll eingreifen.

Die Aehnlichkeit, welche durch diesen gemischten Charakter die philologische Interpretation mit der physikalischen Induction annimmt, wird durch zwei Momente gestört, welche mit der verschiedenen Beschaffenheit der Untersuchungsobjecte zusammenhängen. Der philologischen Hermeneutik fehlen selbstverständlich völlig die experimentellen Hülfsmittel. Es steht ihr nicht zu, die Objecte ihrer Untersuchung willkürlich zu verändern, sie muss sich auf die Anwendung der vergleichenden Methode beschränken, welche schon in der Naturforschung überall da eintritt, wo das Experiment seine Hülfe versagt, und auf welche insbesondere auch die Grundlage der Geisteswissenschaften, die Psychologie, bei der Erforschung der höheren Geistesthätigkeiten sich stützt. (Vgl. oben S. 491.) Besteht hierin eine naturgemässe Beschränkung der philologischen Methodik, so liegt dagegen in einem zweiten Punkte ein ebenso bedeutsamer Vortheil derselben, an dem nach ihrem Vorbilde auch die übrigen Geisteswissenschaften theilnehmen. Die physikalische Untersuchung sieht sich auf die Hülfsmittel der objectiven Beobachtung beschränkt, und sie kommt sogar ihrer Aufgabe um so vollkommener nach, je weniger sie sich beigehen lässt, gleichzeitig subjectiven Anschauungen in ihren Voraussetzungen zu folgen. Die Erforschung der Geisteserzeugnisse dagegen darf nicht nur, sondern sie muss neben den objectiv gegebenen Thatsachen psychologische Erklärungsgründe anwenden, die zum Theil aus der eigenen inneren Erfahrung ge-

schöpft sind. Denn die nothwendige Voraussetzung, mit der sie an die Beurtheilung der Geistesproducte herantritt, ist die Annahme einer Gleichartigkeit der geistigen Kräfte, auf Grund deren für jedes Erzeugniss geistiger Thätigkeit das Postulat der psychologischen Begreiflichkeit Geltung hat. Man kann dieses Postulat auf gleiche Linie stellen mit der für alle Naturerklärung gültigen Forderung der Uebereinstimmung mit den allgemeinen Gesetzen der Anschauung. (Vgl. S. 238.) Aber es bleibt hier der ungeheure Unterschied, dass die letztere Forderung nur eine formale Bedeutung hat, die in Bezug auf den Inhalt der Naturvorgänge der willkürlichen Construction freien Spielraum lässt, während sich die psychologische Begreiflichkeit vorzugsweise auf den Inhalt der Geisteserzeugnisse beziehen muss.

Das charakteristische Merkmal der hermeneutischen Induction besteht hiernach darin, dass dieselbe regelmässig von einer doppelten Reihe von Thatsachen ausgeht, erstens von objectiven, welche theils dem Geisteserzeugniss selbst angehören, theils in nachweisbaren Beziehungen zu ihm stehen, und zweitens von subjectiven, entweder als allgemeingültig anerkannten oder sich für den speciellen Fall geeignet erweisenden psychologischen Erfahrungen. Die Thatsachen der ersten Reihe können wir, da sie, gleich dem untersuchten Geisteserzeugniss selbst, stets der Geschichte angehören, als die historischen, die Thatsachen der zweiten Reihe als die psychologischen Interpretationselemente bezeichnen. In dem Verhältniss dieser beiderlei Thatsachen zu einander tritt nun wieder deutlich eine Analogie hervor mit den Voraussetzungen der Naturerklärung. Denn auch die letzteren sind doppelter Art: sie bestehen in den empirischen Thatsachen, die sich direct auf die untersuchte Erscheinung beziehen, und in den allgemeinen mechanischen Principien, deren Giltigkeit für alle einzelnen Naturerscheinungen von uns gefordert wird. Hierin bestätigt es sich, dass die Psychologie in ähnlichem Sinne die Grundlage der Geisteswissenschaften wie die Mechanik diejenige der Naturwissenschaften ist. Ueber dieser Aehnlichkeit sind aber auch hier die wesentlichen Unterschiede nicht zu übersehen. In die Mechanik gehen geometrische und phoronomische Principien ein, welche die Natur allgemeiner Anschauungsgesetze besitzen und dadurch der Mechanik selbst eine exacte Sicherheit verleihen, die mit einer gewissen starren Abgeschlossenheit unauflöslich verbunden ist. Der Reichthum der physikalischen Aufgaben entstammt daher wesentlich den Anregungen der einzelnen Beobachtungen. Dagegen bewahrt jener Charakter der Freiheit, welcher alles geistige Schaffen beseelt, vor allem für die allgemeinen psychologischen Principien selbst seine Geltung. Ist auch die psychologische Interpretation im Stande, in einem concreten Fall die Existenz eines bestimmten psychologischen Motivs über allen Zweifel zu erheben, so ist damit nicht im geringsten bewiesen, dass das nämliche Motiv auch in einem andern Fall Geltung besitzen müsse. Vermöge des Princips der Neuschöpfung geistiger Energie muss daher die

psychologische Erklärung stets zugleich alle *objectiven* Umstände in Betracht ziehen, unter denen ein Geisteserzeugniss entstanden ist. So zeigt sich hier ein ähnlicher Cirkel zwischen historischer und psychologischer Interpretation, wie wir oben zwischen der Interpretation überhaupt und der Kritik ihn gefunden haben. Die historischen Thatsachen bedürfen der psychologischen Erklärung, aber diese ist wiederum von einer richtigen historischen Auffassung abhängig. Dies entspricht ganz dem bei der psychologischen Methodik besprochenen Wechselverhältniss zwischen den speciellen Geisteswissenschaften und der Psychologie. (S. 497.) Die ersteren gründen sich auf die Psychologie, und doch verdankt diese jenen ihre werthvollsten Hülfsmittel. Auch hier löst sich der Widerspruch dadurch, dass dieser Kreis eine Hin- und Herbewegung der wissenschaftlichen Forschung gestattet, bei welcher das Fundament im gleichen Masse verstärkt wird, als der Ausbau des Einzelnen fortschreitet. Um so mehr aber ergiebt sich hieraus die Unmöglichkeit, jemals bei der einzelnen philologischen Untersuchung die historischen und die psychologischen Interpretationselemente getrennt zu verwerthen. Dazu kommt, dass sich auch in der logischen Anwendung beide Elemente wesentlich ähnlich verhalten. Während überall, wo die Mechanik in den Kreis der physikalischen Betrachtung eintritt, diese den Charakter der Deduction annimmt, bedarf die psychologische Beurtheilung eines Geisteserzeugnisses vermöge der Vielgestaltigkeit und Unerschöpflichkeit der psychologischen Gesichtspunkte fast in jedem einzelnen Fall einer besonderen Induction. Es gestaltet sich daher die historische wie die psychologische Interpretation im allgemeinen so, dass beide zuerst aus Thatsachen, die mit dem zu erklärenden Geisteserzeugniss verwandt sind oder mit ihm in Beziehung stehen, durch Induction eine bestimmte Voraussetzung gewinnen, und dass hierauf durch eine sich anschliessende Deduction diese Voraussetzung auf den speciellen Fall angewandt wird. Wir können demnach bei jeder Interpretation ein Stadium der *inductiven Vorbereitung* und ein solches der *deductiven Anwendung* unterscheiden. Dieses Gesetz der philologischen Methodik erfährt aber ausserdem durch den eigenthümlichen Charakter der philologischen Probleme bestimmte Beschränkungen. Vor allem besitzt nämlich die Voraussetzung, zu welcher die Induction führt, fast niemals den Charakter einer allgemeingültigen Regel, sondern, entsprechend dem singulären Charakter historischer Ereignisse, pflegt sie aus einzelnen Thatsachen, manchmal sogar nur aus einer einzigen Thatsache zu bestehen, und das Inductionsverfahren selbst beschränkt sich daher auf eine *Enumeration* dieser zur Anwendung geeigneten Facta. Um die Unvollkommenheiten eines solchen Verfahrens auszugleichen, bemüht man sich daher, wo möglich zahlreiche Inductionen verschiedenen Inhalts bei jeder einzelnen Interpretation zu verwenden, so dass nun mehrmals im Verlaufe der nämlichen Untersuchung inductive Vorbereitung und deductive Anwendung wechseln. Auch das Beweisverfahren, das an eine solche Untersuchung sich anschliesst, besitzt hiernach ganz

und gar den Charakter des praktischen Inductionsbeweises. (S. 67.) Es versteht sich von selbst, dass eine Induction solcher Art häufig der zwingenden Beweiskraft ermangelt. Doch kommt die nämliche singuläre Natur historischer Ereignisse, welche die Unvollkommenheit der Induction verschuldet, dem deductiven Theil des Verfahrens zu Gute. Denn je einzigartiger die Erscheinungen sind, um so geringer braucht die Zahl übereinstimmender Erfahrungen zu sein, die zum Nachweis causaler Beziehungen zwischen ihnen erfordert wird. So kommt es, dass geradezu diejenigen Resultate der philologischen Interpretation die sichersten zu sein pflegen, welche auf einer beschränkten Enumeration vollkommen gesicherter Thatsachen beruhen, während Voraussetzungen allgemeinerer Art, wie sie z. B. bei der Berufung auf den Geist einer Sprache oder eines bestimmten Schriftstellers, auf allgemeine Verhältnisse der Cultur und der politischen Lage wirksam sind, an sich nur höchst unsichere Anwendungen zulassen.

Zu den historischen Interpretationselementen rechnen wir nicht bloss die der eigentlichen Geschichte in ihren verschiedenen Verzweigungen, als politische, Kunst-, Literaturgeschichte, zugehörigen Thatsachen, sondern insbesondere auch die Objecte der philologisch-historischen Forschung, Sprache, mythologische und ethische Anschauungen. Die Sprache als das allgemeine Hülfsmittel des Gedankenausdrucks ist zwar nicht die einzige, aber doch die häufigste Form, in der uns Geisteserzeugnisse gegeben sind. Die grammatische Interpretation ist so der erste Schritt in der historischen Untersuchung eines Literaturdenkmals. Nimmt sie auch in ihren Anfängen auf die speciellere Zeitfärbung der sprachlichen Form noch wenig Rücksicht, da es sich zunächst darum handelt, aus dem allgemeinen Geist der Sprache heraus den Sinn der Gedanken festzustellen, so ist doch schon dieses Allgemeine ein in gewissen historischen Grenzen gegebenes. Je tiefer aber die grammatische Deutung eindringt, um so mehr muss sie zugleich den specielleren Momenten der Sprachgeschichte, dem Laut- und Bedeutungswandel, den dialektischen Färbungen und den im tropischen Gebrauch der Wörter und in directen Anspielungen versteckt liegenden historischen Beziehungen Rechnung tragen. So führt die grammatische Analyse vom Allgemeinsten beginnend schliesslich bis zu der Grenze, wo das für eine bestimmte Zeit und einen bestimmten Ort Gültige durch den individuellen Charakter des Schriftstellers modificirt erscheint, an welchem Punkte nunmehr die psychologische Untersuchung einsetzt.

Die psychologischen Interpretationselemente sind theils subjectiver, theils objectiver Art. Die subjective Interpretation sucht an der Hand der historisch gegebenen Momente von der Individualität des Schöpfers eines Geisteserzeugnisses eine Anschauung zu gewinnen, um von dieser aus einzelne Seiten des Erzeugnisses verstehen zu lernen. Die Quellen dieser subjectiven Deutung fliessen um so reicher, je mehr sich der Urheber zugleich in andern Geistesschöpfungen bethätigt hat, und je eigenartiger seine Schöpfungen sind, während sie bei vereinzelten Erzeugnissen und

bei solchen von wenig originellem Charakter ganz versiegen können. Dagegen bleibt die objective psychologische Deutung immer in gewissem Grade anwendbar. Sie bezieht sich auf den Zweck, welchen der Urheber eines Erzeugnisses bei dessen Schöpfung verfolgte. Auch diese Deutung ist eine psychologische, weil wir bei ihr von dem objectiv gegebenen Thatbestand, wieder unter Herbeiziehung historischer Momente, auf die ursprüngliche Zweckvorstellung des Autors zurückschliessen und aus dieser nun ein Verständniss gewisser Bestandtheile des Objectes zu gewinnen suchen.

Bei allen diesen in der wirklichen Forschung stets in einander greifenden Formen der Interpretation folgen sich in der vorhin angedeuteten Weise Induction und Deduction, Enumeration und Analogie. In dem hierbei grundlegenden Verfahren der Sammlung ähnlicher Thatsachen kommt die vergleichende Methode in jenen beiden Formen der individuellen und der generischen Vergleichung, die wir schon bei der naturwissenschaftlichen und psychologischen Forschung unterschieden, zur Anwendung, und jedes Vergleichungsverfahren setzt sich auch hier im allgemeinen aus der Erwägung übereinstimmender und widerstreitender Fälle zusammen. (Vgl. S. 280 f.) Die beiden Formen der Vergleichung treten aber ausserdem in unmittelbare Beziehung zu den oben unterschiedenen Unterarten der historischen und psychologischen Interpretation. Die erstere verfährt individuell, wenn sie ein Geisteserzeugniss nach den in ihm selbst liegenden Merkmalen zergliedert; sie verfährt generisch, indem sie verwandte Schöpfungen, gleichzeitige Verhältnisse der Cultur und Geschichte zur Erklärung herbeizieht: die grammatische Interpretation ist also vorzugsweise individuell, die historische im engeren Sinne ist generisch. Unter den psychologischen Interpretationsformen ist die subjective wieder individuell: sie sucht aus der Individualität des Schriftstellers oder Künstlers die Eigenart seiner Schöpfung zu erklären; die objective ist generisch, denn der Zweck eines Werkes fordert die Berücksichtigung anderer Erzeugnisse ähnlicher Art. Bestimmte Kunstformen z. B., die Rede, der Dialog, das Epos, Drama, besitzen unter bestimmten historischen Bedingungen einen gewissen allgemeinen Charakter, der für die Erklärung des Einzelnen mannigfache Gesichtspunkte an die Hand giebt*).

Bei der Unvollständigkeit der hermeneutischen Induction ist es begreiflich, dass nicht selten die empirisch gegebenen Interpretationselemente nicht genügen, um eine Deduction zu begründen. Dann ist man genöthigt, hypothetische Motive einzuführen, welche zunächst versuchsweise an-

*) Von Boeckh ist von den zwei letzten Formen, die hier psychologische genannt sind, die subjective allgemein als die individuelle, die objective als die generische bezeichnet, und es sind beide unter dem Namen der subjectiven Interpretationsformen der grammatischen und historischen als den objectiven gegenübergestellt worden (a. a. O. S. 83). Hierbei sind aber die Ausdrücke individuell und generisch nicht in dem früher eingeführten allgemeineren logischen Sinne gebraucht (s. oben S. 283).

gewandt und dann, wenn durch sie eine befriedigende Erklärung gelingt, angenommen werden. Das Verfahren der Prüfung gleicht hier logisch betrachtet ganz der Verification physikalischer Hypothesen. Die hypothetischen Motive selbst müssen aber wieder den Charakter von historischen oder psychologischen Interpretationselementen besitzen, und sie werden in der nämlichen Weise wie die thatsächlichen Elemente in das Schlussverfahren eingeführt. Zuweilen werden solche Hypothesen auch erst im Verlauf der Untersuchung herbeigezogen; man sieht sich zu ihnen genöthigt, um bestimmte Interpretationsresultate begreiflich zu machen. Nur zu leicht ereignet es sich dabei freilich, dass solche Hülfshypothesen nur desshalb erforderlich werden, weil von Anfang an mit hypothetischen Voraussetzungen operirt wurde. Es entsteht so ein Gewirre von Hypothesen, von denen immer die eine die andere halten muss, während vielleicht keine einzige zureichend durch die Thatsachen gestützt wird. Hier wie in andern Fällen kann es als eine bewährte Regel gelten, dass eine Hypothese um so verdächtiger wird, je mehr sie der Hülfshypothesen zu ihrer Aufrechterhaltung bedarf.

Die Betheiligung hypothetischer Elemente an der hermeneutischen Induction ist selbstverständlich um so unentbehrlicher, je spärlicher die thatsächlichen Grundlagen sind, von denen eine Induction ausgeht. Einen charakteristischen Fall dieser Art bildet die Entzifferung der Hieroglyphentexte mittelst der mehrsprachigen Inschriften. Hier handelte es sich um eine grammatische Interpretation, bei der Sprache und Schriftzeichen unbekannt waren. Den einzigen Anhaltspunkt bildete bei dem berühmten Stein von Rosette der Umstand, dass sich unter dem unbekannten Text seine Uebersetzung in griechischer Sprache befand. Hierdurch war unmittelbar die Annahme nahe gelegt, dass gewisse durch eine Einrahmung ausgezeichnete Gruppen hieroglyphischer Schriftzeichen den im griechischen Text enthaltenen Namen entsprächen. Die Häufigkeit ihres Vorkommens bestätigte diese Vermuthung, an die sich nun die fernere Hypothese anschloss, dass die Hieroglyphen als Lautzeichen anzusehen seien. Weitere Inschriften wurden zur Vergleichung herbeigezogen; historische Beziehungen liessen in gewissen ebenfalls ausgezeichneten Gruppen andere bekannte Namen vermuthen, durch deren Zerlegung sich die Zahl der bekannten Lautzeichen vermehrte. Die Bestätigung der Annahmen wurde endlich dadurch bewirkt, dass man die einzelnen Namen, wie z. B. Ptolemaios und Kleopatra, in Bezug auf ihre übereinstimmenden und nicht übereinstimmenden Buchstaben verglich. Da diese Vergleichung nicht immer das erwartete Zeichen ergab, so wurde man zu der weiteren Annahme mehrfacher Symbole für den nämlichen Laut gezwungen. Wäre eine unverhältnissmässig häufige Anwendung dieser Hülfshypothese erforderlich gewesen, so hätte dies sicherlich die ursprüngliche Voraussetzung in Frage gestellt. Innerhalb der Grenzen, in denen sie gebraucht wurde, erweiterte sie nur die Kenntniss des Schriftsystems, durch dessen Analyse man hier allmählich unter Zuhülfenahme bereits bekannter verwandter Idiome in die Grammatik der altägyptischen Sprache eindrang.

Weit mehr tritt das hypothetische Element zurück bei Literaturerzeugnissen, die einer wohlbekannten Sprache angehören; auch entspricht hier gerade die grammatische Interpretation am meisten noch einer Deduction aus allgemeinen Regeln, die durch zahlreiche vorangegangene Inductionen festgestellt sind. Dennoch lässt auch die grammatische Regel dem historischen und individuellen Sprachgebrauch noch einen weiten Spielraum, so dass sie in Bezug auf Allgemeingültigkeit mit den Principien der physikalischen Deduction nicht auf gleiche Linie gestellt werden kann. Gerade da, wo das sprachliche Verständniss an sich keine Schwierigkeit bietet, liegt nun aber in der Würdigung der historischen und psychologischen Momente der Schwerpunkt der Interpretation, und für dieses Gebiet wird stets vermöge des singulären Charakters der Thatsachen eine Generalisation unmöglich sein. Dabei können aber die Thatsachen, die statt allgemeiner Regeln der hermeneutischen Deduction zu Grunde liegen, bald von der umfassendsten, bald von der beschränktesten Art sein. So setzt Dante's Divina commedia zu ihrem Verständniss nicht nur eine grosse Zahl historischer Beziehungen aus der Zeitgeschichte und dem Leben des Dichters, sondern sogar eine ziemlich eingehende Kenntniss der mittelalterlichen Theologie und Philosophie voraus. In andern Fällen dagegen kann irgend ein isolirtes historisches Factum zu einem dichterischen Bild oder einer Anspielung Anlass geben. So legt Sophokles im Oedipus auf Kolonos der Antigone einige Worte in den Mund, in denen eine Beziehung auf einen Streit des Dichters mit dem eigenen Sohne nicht zu verkennen ist, sobald man nur weiss, dass ein solcher Streit um dieselbe Zeit sich ereignet hat. In der Unterredung Hamlet's mit Rosenkranz und Güldenstern würde man in der Erwähnung dramatischer Kindervorstellungen, welche das ernsthafte Schauspiel in der Gunst des Publicums beeinträchtigten, sofort die Anspielung auf ein Zeitereigniss vermuthen, auch wenn das Factum nicht ausdrücklich bezeugt wäre. Gerade diese Beispiele, wo aus einer einzigen Thatsache eine Stelle interpretirt werden kann, zeigen zugleich deutlich, dass hierbei trotzdem wegen der vereinzelten Beschaffenheit der erklärenden wie der erklärten Thatsache der Analogieschluss eine Sicherheit erreichen kann, durch die er sich der exacten Analogie nähert. Darum pflegen auch, abgesehen von den rein hypothetischen Erklärungen, diejenigen hermeneutischen Inductionen die unsichersten zu sein, deren Resultat einen allgemeineren Charakter besitzt, und die desshalb zahlreicher Voraussetzungen bedürfen. Ueber die Deutung des Goethe'schen Faust im ganzen ist bekanntlich viel gestritten worden, während die zahlreichen Anspielungen, die an einzelnen Stellen vorkommen, demjenigen, der die historischen Beziehungen kennt, nicht zweifelhaft sein können.

### c. Die philologische Kritik.

Eine Interpretation fordern Naturerscheinungen so gut wie Geisteserzeugnisse; auf die letzeren allein aber kann die Kritik Anwendung

finden. Nur die geistige Auffassung der Natur ist einer kritischen Untersuchung zugänglich: so übt der Naturforscher seine Kritik an fremden und eigenen Beobachtungen, nicht aber an den Objecten der Beobachtung selber. Diese Eigenthümlichkeit liegt in dem Wesen der Kritik begründet, die in der Unterscheidung des Wahren vom Falschen und in der Werthbestimmung der Gegenstände nach dem Grad ihres Wahrheitsgehaltes besteht. Die Feststellung der Wahrheit ist die nächste Aufgabe der kritischen Thätigkeit. Aber da zusammengesetzte Geisteserzeugnisse keineswegs immer der Kategorie des Wahren oder des Falschen ohne Rest zugerechnet werden können, sondern da in ihnen beide Bestandtheile meistens mannigfach gemischt sind, so entwickelt sich hieraus mit Nothwendigkeit als weitere Aufgabe die Werthbeurtheilung der Geisteserzeugnisse.

Je nachdem sich die kritische Thätigkeit auf die Stellung des untersuchten Objectes zu andern oder auf seine eigene innere Bedeutung bezieht, kann man eine äussere und eine innere Richtung derselben unterscheiden. Die äussere Kritik geht auf die Frage der Echtheit der Erzeugnisse, sie will entscheiden, ob das Sein derselben ihrem Schein entspricht; die innere bezieht sich auf den Werth der Erzeugnisse, sie will ermitteln, ob das Sein derselben ihrem Zweck angemessen ist. Es ist selbstverständlich, dass an sich die innere Kritik die wichtigere ist; aber die äussere muss ihr vorangehen, und die Philologie als Wissenschaft der Geisteserzeugnisse hat vor allem deren äussere Beziehungen festzustellen. Die äussere Kritik ist daher eine specifisch philologische Aufgabe. Sobald die innere Kritik beginnt, tritt das untersuchte Object in den Gesichtskreis der speciellen Wissenschaft, dem es zugehört, der Geschichte, wenn es ein historisches Factum, der Aesthetik, wenn es eine Schöpfung der Kunst, der Jurisprudenz, wenn es eine Rechtsnorm ist, u. s. w. Trotzdem ist nicht bloss die äussere Kritik eine philologische Aufgabe; schon desshalb nicht, weil sie gar nicht von der innern sich trennen lässt, indem aus dieser nicht selten die entscheidenden Gesichtspunkte für die Beurtheilung der Echtheit genommen werden müssen. Ueberdies aber ist bei der Interpretation der Geisteserzeugnisse ihre innere Werthschätzung nicht zu entbehren. Doch hängt es von der historischen Stellung der Objecte ab, in welchem Masse die äussere Kritik überhaupt an ihrer Beurtheilung Antheil nehmen kann. So unerlässlich sie bei einem Sophokles oder Plato ist, ebenso geringfügig wird ihre Aufgabe bei einem Goethe oder Kant; daher der philologische Betrieb moderner Autoren bekanntlich so leicht ins Kleinliche ausartet. Die innere Kritik dagegen ist in Bezug auf Umfang und Schwierigkeit ihrer Untersuchungen von solchen historischen Bedingungen völlig unabhängig.

Die Elemente der Kritik sind, wie diejenigen der Hermeneutik, theils historische, theils psychologische Thatsachen; ebenso beruhen ihre Methoden auf dem nämlichen vergleichenden Verfahren. Die äussere Kritik verwerthet unter den historischen Merkmalen vorzugsweise die grammatischen, unter

den psychologischen die subjectiven; die innere Kritik berücksichtigt in höherem Masse die geschichtliche Stellung und den objectiven psychologischen Zweck eines Erzeugnisses. Dem entsprechend benützt die äussere Kritik hauptsächlich die individuelle, die innere die generische Methode der Vergleichung. Der wesentliche Unterschied der kritischen von der hermeneutischen Aufgabe liegt aber in allen diesen Fällen nicht in dem logischen Verfahren selbst, sondern in den Gesichtspunkten, welche aus den oben bezeichneten Aufgaben der Kritik entspringen, und nach welchen die Methoden und Thatsachen Verwendung finden. Sie bedingen es, dass dann auch die Thatsachen in Bezug auf ganz andere Bestandtheile der Prüfung unterworfen werden, als bei der Interpretation. Der allgemeine Charakter jener Gesichtspunkte bleibt zugleich der nämliche, ob es sich um die Echtheit eines umfassenden Schriftwerks oder eines einzelnen Wortes handelt, ob die Composition eines ganzen Dramas oder die Angemessenheit eines einzigen Verses an die Situation der Handlung in Frage steht. Nur der Umfang der Hülfsmittel, die zur Benützung herbeizuziehen sind, erweitert sich mit der Allgemeinheit der Aufgaben.

Die äussere Kritik geht stets von bestimmten Voraussetzungen aus, in denen sich die für die Prüfung der Echtheit eines Erzeugnisses massgebenden Gesichtspunkte specialisiren. Diese Voraussetzungen sind nothwendig mehr oder weniger hypothetisch, da gerade auf der Unsicherheit der Annahmen die Möglichkeit der kritischen Fragestellung beruht. Bei der nicht selten vorkommenden Frage z. B., ob ein bestimmtes Schriftwerk von dem Autor herrühre, dem die Tradition es zuschreibt, wird die Annahme der Richtigkeit der Tradition die nächste Voraussetzung sein. Aber einzelne Merkmale erwecken Zweifel, und nun hat die Untersuchung im einzelnen festzustellen, ob Compositionsweise, Sprache, vorgetragene Ansichten mit den anderweitig beglaubigten Werken des Autors übereinstimmen, und ob die äusseren Zeugnisse, die Berichte und Citationen anderer Schriftsteller die Annahme unterstützen. So handelt es sich um eine Sammlung übereinstimmender und unterscheidender Instanzen, auf die zuletzt der Schluss gegründet werden muss. Dabei kann dieser noch durch den Umstand erschwert werden, dass die Möglichkeit einer Zusammensetzung aus echten und unechten Theilen in Betracht zu ziehen ist. So hat man allen Grund, die »Gesetze« für eine echte Platonische Schrift zu halten. Aber manche Spuren weisen darauf hin, und die Ueberlieferung bestätigt es, dass sie von einem Schüler des Philosophen überarbeitet ist. In solchen Fällen entsteht die schwierige Aufgabe, echte und unechte Bestandtheile zu sondern. Auch in der Benützung übereinstimmender und unterscheidender Instanzen muss jedoch mit vorsichtiger Erwägung aller andern historischen und psychologischen Momente verfahren werden. Einzelne Abweichungen von dem gewohnten Sprachgebrauch oder von den sonst bekannten Ansichten eines Schriftstellers beweisen ebenso wenig unbedingt die Unechtheit wie umgekehrt Uebereinstimmungen die Echtheit eines

Werkes. Bei einigen dem Plato zugeschriebenen Dialogen z. B. bildet gerade die auffallende Uebereinstimmung vieler Stellen mit bekannten Platonischen Schriften einen entscheidenden Grund gegen die Echtheit, da man nach dem ganzen Charakter des Philosophen nicht annehmen kann, dass er sich selbst compilirt habe. Gerade in solchen Fällen, wo durch absichtliche Unterschiebung die kritische Frage erschwert wird, können unter Umständen die äusseren Zeugnisse einen weit höheren Werth gewinnen als die inneren. So bilden die Citationen bei Aristoteles im allgemeinen die sicherste Gewähr für die Echtheit Platonischer Werke.

Von etwas anderem Charakter ist die Einzelkritik, welche über die Echtheit oder Unechtheit nicht eines Erzeugnisses im ganzen, sondern eines einzelnen Bestandtheils, z. B. eines Wortes in einem Schriftwerk, zu entscheiden hat. Die kritische Frage kann hier durch zwei Ursachen in Fluss kommen. Erstens können Widersprüche der Ueberlieferung vorliegen, verschiedene Lesarten der Handschriften und Ausgaben, unter denen natürlich bei Schriftwerken, die längere Zeit bloss handschriftlich vervielfältigt wurden, die ersteren den Vorrang behaupten. Hier besteht nun die kritische Prüfung stets in einem doppelten Vergleichungsverfahren, in einem generischen, welches sich auf den allgemeinen Charakter und die hierdurch verbürgte relative Glaubwürdigkeit der Handschriften und Ausgaben bezieht, und in einem individuellen, welches die specielle Glaubwürdigkeit im Auge hat, die der betreffenden Stelle in der einzelnen Tradition zukommt. Die Möglichkeit der Einschleichung eines Schreibfehlers, eines inhaltlichen Missverständnisses, der Uebertragung eines Glossems in den Text, namentlich aber die durch die Lesart entstehenden Schwierigkeiten der Interpretation sind hier die Hauptmomente der Beurtheilung. Der zuletzt erwähnte Punkt führt zugleich zu der zweiten Ursache, aus welcher, ganz abgesehen von etwaigen Widersprüchen der Ueberlieferung, die kritische Frage in Fluss kommen kann: sie liegt in der Entstehung eines hermeneutischen Problems. Ein solches ist immer dann vorhanden, wenn eine Lesart entweder überhaupt unverständlich ist, oder einen Sinn giebt, der mit dem sonstigen Gedankenzusammenhang im Widerspruch steht, oder aus irgend welchen objectiven oder subjectiven Gründen der Wahrscheinlichkeit entbehrt, z. B. dem Sprachgebrauch der Zeit, des Schriftstellers widerstreitet, u. dergl. Stehen bei der Aufwerfung eines derartigen hermeneutischen Problems nicht andere Lesarten zu Gebote, durch welche dasselbe befriedigend gelöst wird, so beginnt nun eine Art von experimentellem Verfahren, indem Conjecturen, hypothetische Berichtigungsversuche, gebildet werden, die man so lange prüft, bis sich unter ihnen eine findet, die mit zureichender Wahrscheinlichkeit der unbrauchbaren Lesart substituirt werden kann. Dabei kommen für die Richtigkeit der Conjectur wieder zweierlei Kriterien in Betracht: einerseits die Beseitigung des hermeneutischen Widerspruchs und anderseits die Möglichkeit einer causalen Interpretation der Entstehung der falschen Lesart an Stelle der richtigen.

In letzterer Beziehung können alle diejenigen historischen und psychologischen Momente herbeigezogen werden, die überhaupt der Kritik zur Verfügung stehen. Insbesondere aber kommen hier einige specifische Erklärungsgründe psychologischer Art zur Geltung, welche auf die Art der Entstehung der Handschriften und Ausgaben Rücksicht nehmen, z. B. durch Abschreiber, welche die Sprache mangelhaft verstanden, durch Dictiren, welches die Verwechslung ähnlich lautender Worte begünstigt, u. dergl. Aus unzähligen Einzeluntersuchungen solcher Art setzt sich schliesslich die grösste Leistung äusserer philologischer Kritik zusammen, die Wiederherstellung eines Schriftwerks, das uns unmittelbar nur in einer grösseren Zahl mangelhafter und verderbter Ueberlieferungen vorliegt, in einem dem ursprünglichen möglichst angenäherten Zustande. Die logische Arbeit, die dieses Resultat zu Stande bringt, besteht theils aus einer Anzahl von Einzelinductionen, die in einer Enumeration einzelner Data ihren Abschluss finden, und an die sich die deductive Anwendung auf den einzelnen Fall anschliesst, theils unmittelbar in der Deduction aus hypothetischen Voraussetzungen und in der Annahme der letzteren, nachdem sie sich durch die Anwendung bewährt haben. Der erste Fall, die Enumeration und Deduction, findet z. B. dann statt, wenn man die Lesart einer bestimmten Handschrift wegen der durchgehends grösseren Glaubwürdigkeit derselben vor andern bevorzugt; der zweite Fall, die hypothetische Deduction und Verification, entspricht dem gewöhnlichen Verfahren der Conjecturalkritik.

Die innere Kritik unterscheidet sich, entsprechend ihrer abweichenden Aufgabe, schon in dem Ausgangspunkt ihrer Methode wesentlich von der äusseren. Die inhaltliche Würdigung eines Geisteserzeugnisses kann nur auf Grund einer genauen Einsicht in die Zwecke desselben unternommen werden. Die letzteren sind aber wieder von objectiver und von subjectiver Art. Der objective Zweck bezieht sich auf die Norm, welcher eine geistige Schöpfung vermöge der Gattung, zu der sie gehört, unterworfen ist. So folgen Rede, Drama, Epos, wissenschaftliche Darstellung bestimmten allgemeingültigen, wenn auch unter historischen Bedingungen einigermassen veränderlichen Normen. Hier waltet die Methode der generischen Vergleichung vor. Sie vermittelt zunächst eine Induction, welche in einer allgemeinen Regel oder in einer Enumeration mustergültiger Beispiele ihren Abschluss findet, und von welcher aus dann auf den einzelnen der Kritik unterworfenen Fall exemplificirt wird. Neben diesem objectiven kann aber auch ein subjectiver Zweck, nämlich die individuelle Absicht, welche der Urheber eines Erzeugnisses im Auge hatte, bei der kritischen Beurtheilung in Frage kommen. So kann dem epischen Dichter ein bestimmter nationaler Zweck, dem Dramatiker eine ethische Anschauung, dem Redner eine politische Tendenz vorschweben, und die Kritik hat nun zu untersuchen, ob diese besonderen Zwecke mit angemessenen Mitteln erreicht worden sind. Hier ist die Methode der individuellen Vergleichung vorherrschend. Zunächst sucht man aus einzelnen Merkmalen die obwaltende Tendenz zu

erschliessen; dann wird diese theils an und für sich in Bezug auf ihre Berechtigung beurtheilt, theils aber wird untersucht, ob das Erzeugniss als Ganzes und in seinen einzelnen Bestandtheilen im Stande ist die gewünschte Wirkung hervorzubringen. Beide Untersuchungen, die objective wie die subjective, sind mit psychologischen Deductionen verwebt. Diese werden um so vorwaltender, je individueller das der Kritik unterworfene Werk ist, und je mehr man von den ursprünglichen Entstehungsbedingungen desselben Rechenschaft zu geben sucht. Hier kann es daher geschehen, dass die Kritik, auf die generische Vergleichung Verzicht leistend, vollständig in der psychologischen Deduction aufgeht, indem sie entweder die allgemeinen Gesetze über die betreffende Gattung als bekannt voraussetzt oder ganz von ihnen abstrahirt, um den individuellen Gegenstand nur nach den in ihm selbst gelegenen Eigenschaften und nach den allgemeinen Gesetzen des menschlichen Denkens und Fühlens zu beurtheilen. Es sind vorzugsweise ästhetische Objecte, die eine solche allgemeine Beurtheilung zulassen.

Diese Gegensätze des Verfahrens kommen namentlich bei der letzten und höchsten Aufgabe der inneren Kritik zur Geltung, nämlich bei der Feststellung der allgemeinen Gesetze selbst, denen die verschiedenen Gattungen geistiger Schöpfung unterworfen sind. Eine derartige Kritik, welche für die Beurtheilung jeder einzelnen Leistung die Grundlage bildet, hat ihre grösste Bedeutung in der Aesthetik, wo sie als Kritik der Kunstgattungen den hauptsächlichsten Inhalt der Wissenschaft selbst ausmacht. Das Beispiel einer rein deductiven psychologischen Behandlung der ästhetischen Probleme hat hier Aristoteles in seiner Rhetorik und Poetik aufgestellt. Die Induction fehlt zwar nicht, aber sie liegt grossentheils vor der uns mitgetheilten Untersuchung. Ihre Resultate werden nach einer einleitenden Betrachtung, die ebenfalls den Charakter psychologischer Deduction besitzt, in allgemeinen Definitionen der Kunstgattungen zusammengefasst, und an diese knüpft dann die psychologische Deduction des Einzelnen an. Völlig entgegengesetzt verfährt Lessing. Er liebt es, wie er in der Einleitung zu den Abhandlungen über die Fabel sagt, »einen Sprung in die Mitte der Materie zu machen«. Er zergliedert zunächst einzelne Objecte der ästhetischen Erfahrung, vergleicht sie mit andern verwandten Objecten in Bezug auf ihre übereinstimmenden und unterscheidenden Merkmale, sucht dann an der Hand allgemeingültiger psychologischer Erfahrungen über den Grund der Unterschiede Rechenschaft zu geben, und auf diese Weise durch generische Vergleichung und hülfsweise psychologische Deduction zu allgemeinen ästhetischen Gesetzen zu gelangen, die nun theils noch eingehender psychologisch begründet, theils durch weitere Erfahrungen verificirt werden. Musterhafte Beispiele dieser kritischen Induction sind besonders der »Laokoon« und die »Hamburgische Dramaturgie«. In beiden hat Lessing ausserdem noch von einem Kunstgriff Gebrauch gemacht, der ein wirksames Hülfsmittel zur Abkürzung der Untersuchungen sein kann. Er beginnt nämlich nicht mit der Kritik der

Objecte selbst, sondern mit einer Kritik ihrer bereits vorliegenden kritischen Beurtheilungen. Gerade dann, wenn diese unrichtig sind, fördern sie das kritische Geschäft in der wirksamsten Weise, indem sie auf dem Wege der Ausschliessung den richtigen Standpunkt der Betrachtung gewinnen helfen.

## 2. Die Historik.

### a. Die historische Kritik.

Der Gegenstand der Geschichte ist die Vergangenheit menschlicher Erlebnisse. Aber die Vergangenheit selbst ist unwiederbringlich verschwunden. Die historische Forschung sucht daher aus den in die Gegenwart hereinreichenden Ueberlebnissen derselben ihr Bild zu entwerfen. In seltenen Fällen nur bestehen solche in den Erinnerungen des selbst Erlebten. Sogar der Darsteller der Zeitgeschichte kann allein unter der Gunst einer bevorzugten persönlichen Stellung und einfacher äusserer Verhältnisse wie ein Thukydides die eigene Erfahrung als seine hauptsächlichste Quelle benützen. Mit der zeitlichen Entfernung der Begebenheiten treten von selbst andere Zeugnisse an deren Stelle, die auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen sind, ehe ihnen der Stoff der Geschichte entnommen werden kann. Die historische Kritik, welche eine solche Prüfung bezweckt, bildet daher den Anfang der historischen Forschung, an den erst die Hauptaufgabe der letzteren, die Deutung und causale Verbindung der Thatsachen, welche den Inhalt der historischen Interpretation bildet, sich anschliessen kann. Demnach ist, obgleich auch hier ein wechselseitiger Einfluss beider Bestandtheile der Methodik nicht fehlt, doch im allgemeinen die Aufeinanderfolge eine der philologischen Forschung entgegengesetzte. Dieser Gegensatz erklärt sich aus dem Verhältniss beider Forschungsgebiete. Da das einzelne Geisteserzeugniss zunächst gegeben ist und dann erst seine Verbindung mit andern in Frage kommt, so setzt die Historik die philologische Methodik voraus. Zunächst tritt der Historiker mit philologischen Gesichtspunkten und Methoden seinem Stoff gegenüber; erst nachdem er ihn hermeneutisch und kritisch als Philologe bearbeitet, beginnt die Aufgabe der historischen Kritik, welche nun ihre Objecte nicht mehr auf ihren eigenen inneren Werth, sondern in Bezug auf ihre Bedeutung als historisches Material prüfen muss. Eine historische Interpretation, welche nicht sowohl den Inhalt der einzelnen Thatsache als ihr Verhältniss zu andern, mit denen sie in zeitlichem Zusammenhange steht, zu ergründen sucht, kann aber immer erst unternommen werden, wenn die historische Glaubwürdigkeit der Thatsachen selbst sichergestellt ist.

In ihrer wirklichen Ausführung kann die historische Kritik selbstverständlich kaum jemals von der philologischen völlig geschieden werden.

Ist es doch unvermeidlich, dass der Historiker schon bei der philologischen Vorprüfung seines Stoffes von den Gesichtspunkten der historischen Kritik geleitet wird und daher manches unbeachtet lässt, was philologisch werthvoll ist, um anderes in den Vordergrund zu stellen, was dem Interesse des Philologen ferner liegt. Namentlich darin verräth sich der verschiedene Standpunkt, dass unter jenen Ueberlebnissen, welche die Anwendung der historischen Kritik verlangen, manche, wie anthropologische und ethnologische Thatsachen, geographische Verhältnisse, unter Umständen auch mündliche Traditionen, ganz ausserhalb des Bereichs philologischer Hülfsmittel liegen, während andere, wie Urkunden, Verträge, Gesetze, in der Regel nur in Folge ihres historischen Werthes und daher von vornherein unter historischen Gesichtspunkten zugleich zu Objecten philologischer Forschung werden.

Die Ueberlebnisse, die dem Historiker als Zeugen der Vergangenheit dienen, sind theils rein physischer Art, theils sind es physische Gegenstände, die zugleich einen bestimmten geistigen Werth besitzen, theils bestehen sie in unmittelbaren Geisteserzeugnissen. In die erste Kategorie gehören die physischen Ueberreste von Menschen, Hausthieren, Culturpflanzen, die geographischen und klimatischen Verhältnisse oder die physischen Spuren von deren einstiger Beschaffenheit: hier sind es naturwissenschaftliche Hülfsquellen, die den Historiker bei der Feststellung der Thatsachen unterstützen. Grösser an Zahl und zugleich an Wichtigkeit alle andern überragend sind die Ueberlebnisse der zweiten Classe, die man vorzugsweise unter dem Namen historischer Ueberreste zu verstehen pflegt. Kunstgegenstände, Bauwerke, Feldfluren, schriftliche Zeugnisse aller Art, die auf Zustände oder Ereignisse einer Zeit Licht werfen können, gehören hierher. Solche Ueberreste werden im eigentlichen Sinne des Wortes zu Denkmälern, wenn sie absichtlich entstanden sind, um das Gedächtniss an ein Ereigniss oder an eine historische Persönlichkeit festzuhalten. Auf diese Weise bilden die Denkmäler den Uebergang zu den absichtlichen Aufzeichnungen der Chronisten und älteren Historiker, die gewöhnlich die nächsten Quellen für die Neubearbeitung eines geschichtlichen Stoffes bilden. Denn diese geht meistens von dem bereits feststehenden Bilde einer Zeit oder eines Ereignisses aus und sucht dasselbe dann unter Zuhülfenahme aller sonstigen Anhaltspunkte zu berichtigen und zu vervollständigen. Meist am spärlichsten und zugleich für die Benützung am schwierigsten sind die Ueberlebnisse der dritten Art, die rein geistigen Erzeugnisse, die ihrer Natur nach zugleich am vergänglichsten und am meisten der Veränderung ausgesetzt sind. Sprache, Sitten, Religionsanschauungen, mündliche Ueberlieferungen gehören hierher. Gerade wegen ihrer Vergänglichkeit kommen aber auch sie zu historischer Verwerthung in der Regel erst dann, wenn sie durch schriftliche Aufzeichnungen einigermassen fixirt und dadurch zugleich in Ueberlebnisse der zweiten Classe übergegangen sind.

Diese verschiedenen Objecte historischer Kritik sind nicht bloss an sich von verschiedenem Werthe, sondern es richtet sich naturgemäss auch die Art ihrer Benützung, die Bevorzugung bestimmter Hülfsquellen vor andern nach der zeitlichen Ferne der zu erforschenden Ereignisse und dem Verhältniss, in dem sie sich zu unserm eigenen Denken und Handeln befinden. Ausserdem ist der individuelle Standpunkt, welchen der Historiker ihnen gegenüber einnimmt, von wesentlichem Einflusse. Für die Urgeschichte des Menschen überwiegen so sehr die rein naturwissenschaftlichen Hülfsmittel, dass jene bis jetzt noch ausserhalb der historischen Forschung in der Anthropologie und Ethnologie ihre Stelle einnimmt. Doch können selbst die Anfänge der eigentlichen Geschichte des von der Ethnologie und ihren naturwissenschaftlichen Hülfsgebieten dargebotenen Materials nicht entbehren. Neben spärlichen Kunsterzeugnissen, Inschriften, uralten Gesetzesüberlieferungen, Andeutungen in Sitte und Sprache bildet sodann eine mit mythologischen Bestandtheilen durchsetzte sagenhafte Tradition den einzigen Stoff, über welchen die älteste Geschichte der Völker verfügt. Die naive Geschichtschreibung früherer Zeiten, welche mit jenen objectiven Zeugnissen der Vergangenheit wenig anzufangen wusste, hat hier in der Regel die Sage selbst als Geschichte behandelt und so gerade der unsichersten Quelle historischer Forschung ein gewisses Bürgerrecht in der Geschichte verschafft. Heute ist der Standpunkt des Historikers genau der entgegengesetzte. Zunächst sucht er, so viel als möglich abstrahirend von diesen Ueberlieferungen der Sage, in den unmittelbaren Ueberlebnissen der ältesten Zeiten, Denkmälern, Inschriften, Staatsalterthümern, einen gewissen, wenn auch noch so spärlichen Thatbestand sicherzustellen, zu welchem erst in secundärer Weise und mit steter Rücksicht auf den durch jene Zeugnisse an die Hand gegebenen Massstab die Tradition hinzugezogen wird, um zu prüfen, ob auch in ihr nach Ausscheidung des zweifellos Mythischen und Sagenhaften ein historischer Kern zu retten ist. So nimmt überhaupt in der alten Geschichte die Erschliessung neuer Quellen einen verhältnissmässig beschränkten Raum ein. Die Auffindung von Denkmälern und Inschriften dient, abgesehen von den wenigen Fällen, wo solche Funde in kurzer Zeit eine fast völlig unbekannte Cultur erschlossen haben, wesentlich nur dazu, die vorhandene Ueberlieferung in einzelnen Punkten zu berichtigen. Im ganzen aber erscheint hier die Ausscheidung des Unechten und die Auffindung der echten Elemente in einer Wahrheit und Dichtung auf das mannigfaltigste verwebenden Tradition als die Hauptaufgabe des historischen Kritikers. Ganz anders steht dieser den Aufgaben der neueren Geschichte gegenüber. Wohl handelt es sich auch hier, wie bei aller Kritik, um die Scheidung des Wahren vom Falschen. Aber je reichlicher mit der Annäherung der Zeiten die Quellen der historischen Ueberlieferung fliessen, um so mehr handelt es sich darum, wo möglich unzureichend bekannte oder völlig unbenützte Quellen zu entdecken, welche die Ereignisse vollständiger kennen lehren oder die bisher von einem einseitigen Stand-

punkte aus aufgefassten Thatsachen in ein neues Licht setzen. Je weniger der neuere Historiker daran denken kann, alle überhaupt existirenden Quellen zu benützen, um so mehr muss er darauf bedacht sein, mangelhafte Quellen durch bessere überflüssig zu machen. Darum überwiegt in der alten Geschichte die Kritik der einzelnen Bestandtheile der verschiedenen Ueberlieferungen, in der neueren die Kritik der Quellen im ganzen. Eine Tradition wie die römische Königssage würde in der neueren Geschichte schwerlich einen Anspruch auf historische Beachtung erheben können; wohl aber kann in dieser durch die Erschliessung eines Staatsarchivs unter Umständen eine ganze Reihe bisher benützter Quellen werthlos gemacht werden.

Diese in der Natur und dem Reichthum der Hülfsquellen begründeten Eigenthümlichkeiten bedingen entsprechende Unterschiede in der Methode der historischen Kritik, ohne jedoch den allgemeinen Charakter derselben zu ändern. Ueberall besteht dieser in einer Anwendung der vergleichenden Methoden, welche der philologischen Kritik am nächsten verwandt ist, dabei aber noch durch die Aufgaben der historischen Forschung besondere Eigenschaften annimmt. Auch hier lässt sich eine äussere und eine innere Kritik unterscheiden. Die erste bezieht sich in diesem Fall auf die Wahrheit, die zweite auf den Werth einer historischen Thatsache oder auf die Bedeutung, welche dieselbe in dem allgemeinen Zusammenhang der untersuchten Ereignisse einnimmt. Nur die äussere Kritik bildet aber ein einigermassen selbständiges Geschäft; die innere, welche die ganze Prüfung des Quellenmaterials voraussetzt, ist von der Interpretation nicht zu trennen, da die Schätzung des Werthes der Thatsachen durchaus an die causale Verknüpfung derselben gebunden ist. Schon in der äusseren Kritik kommt, im Gegensatze zu der ihr nahe verwandten philologischen, der synthetische Charakter, welcher der historischen Methode eigen ist, deutlich zur Geltung. Der historische Kritiker will nicht gleich dem philologischen die Echtheit eines einzelnen Geisteserzeugnisses, so umfassend oder so beschränkt es auch sein mag, bestimmen, sondern es handelt sich für ihn darum, mittelst einer Anzahl von Objecten, die grossentheils solche Geisteserzeugnisse sind, welche die philologische Kritik zuvor bestanden haben, einen Zusammenhang von Ereignissen in Bezug auf seine Wahrheit zu prüfen. Dieses Unternehmen setzt voraus, dass irgend ein Zeugniss für den betreffenden Thatbestand, z. B. eine Inschrift, der Bericht eines Chronisten, oder auch nur eine sagenhafte Ueberlieferung, gegeben sei. Ist die philologische Echtheit dieses Zeugnisses, soweit sie überhaupt möglich ist, festgestellt, so besteht nun seine historische Prüfung in der Vergleichung mit andern Zeugnissen ähnlicher Art, die sich entweder auf denselben oder auf einen nahe damit zusammenhängenden Thatbestand beziehen. Wegen des singulären Charakters historischer Ereignisse kann hier die spärlichste Coincidenz einen entscheidenden Werth besitzen. Oft gelingt es aber auch ohne sie eine Thatsache mindestens

im höchsten Grade wahrscheinlich zu machen, indem man einen wahrscheinlichen inneren Zusammenhang mit einer andern sichergestellten Thatsache nachweist. Gerade in solchen Fällen pflegt auch hier der eigentlich historischen Kritik eine psychologische ergänzend zur Seite zu treten. Denn wo eine Thatsache objectiv nur unzureichend bezeugt ist, da kann allein die Vergegenwärtigung der subjectiven Eigenthümlichkeiten der betheiligten Individuen zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit gelangen. In dieser psychologischen Beziehung findet daher der Analogieschluss, z. B. der Schluss von einer Handlung eines Menschen auf eine andere Handlung desselben, eine einigermassen berechtigte Anwendung, wogegen eine Analogie nach bloss historischen Gesichtspunkten wegen der einzigartigen Natur der Ereignisse in hohem Grade bedenklich ist. Ein bemerkenswerther Unterschied der historisch-kritischen Methode von der philologischen besteht ferner darin, dass in jener das hypothetische Element fast ganz ausgeschlossen ist. Eine so wichtige Rolle auch die Hypothese in der historischen Interpretation spielt, die Kritik sucht sich ihrer möglichst zu enthalten. Ein Verfahren, welches etwa der philologischen Conjecturalkritik gleichkäme, ist hier völlig unmöglich. Dies steht mit der Richtung der philologischen Forschung auf das Einzelne, der historischen auf den Zusammenhang des Einzelnen im unmittelbarsten Zusammenhang. Der philologischen Forschung kann die einzelne Thatsache in mangelhafter Form gegeben sein; die historische, welche die philologische Vorprüfung bereits erledigt hat, kann als solche nur im Zusammenhang der Thatsachen Lücken vorfinden, deren Ergänzung dann allein auf dem Wege der Interpretation möglich ist. Aus dieser verschiedenen Richtung der Thätigkeit entspringt endlich ein letzter bedeutsamer Unterschied der historischen Kritik: diese benützt zwar, wie jede Kritik, sowohl Uebereinstimmungen wie Widersprüche in den ihr vorliegenden Ereignissen, um das Wahre vom Falschen zu sondern; aber auf der Feststellung der Uebereinstimmungen liegt der Schwerpunkt des Verfahrens. Die Widersprüche der Quellenangaben können höchstens die Unlösbarkeit eines Problems bewirken; dagegen ist die Uebereinstimmung verschiedener Zeugnisse, deren Unabhängigkeit von einander sicher constatirt werden kann, das einzige Hülfsmittel zur Erlangung historischer Gewissheit. Dieses Verhältniss entspringt einerseits aus dem Verzicht der historischen Kritik auf die Hypothese, anderseits abermals aus der singulären Natur geschichtlicher Ereignisse. Jener Verzicht verbietet es, zwischen verschiedenen gleich glaubwürdigen Quellen nach blossen Muthmassungen zu entscheiden; dieser eigenthümliche Charakter des Historischen dagegen bedingt es, dass durch eine einzige übereinstimmende Instanz schon die Gewissheit eines Resultates verbürgt werden kann. So gehören bekanntlich die Fragen der älteren Chronologie zu den schwierigsten Aufgaben historischer Kritik, und die ungeheuren Widersprüche der verschiedenen Zeitrechnungen können hier nur dazu dienen, die grosse Unsicherheit der einzelnen Daten ins Licht zu stellen. Eine einzige Ueber-

einstimmung dagegen, wie z. B. in den jüdischen und griechischen Angaben über gewisse Thatsachen der persischen und assyrischen Geschichte, kann nicht bloss zur Fixirung bestimmter Ereignisse dienen, sondern in ihnen auch feste Ausgangspunkte für weitere Zeitbestimmungen gewinnen lassen*).

Aus diesen allgemeinen Bedingungen historischer Kritik erhellt ohne weiteres, wie trügerisch jene meist aus einer falschen Uebertragung der Gesichtspunkte naturwissenschaftlicher Methodik hervorgegangenen Bemühungen sind, ein- für allemal bestimmte Kriterien historischer Gewissheit anzugeben, nach denen nun in gleichförmiger Weise die Wahrheit oder Wahrscheinlichkeit der Thatsachen beurtheilt werden soll**). Meistens übersieht man dabei völlig den für alle historische Methodik massgebenden Umstand, dass die nämliche singuläre Beschaffenheit geschichtlicher Ereignisse, welche eine unmittelbare, durch eine beliebige Zahl von Erfahrungen zu führende Beweisführung ausschliesst, vereinzelten Uebereinstimmungen bereits einen Werth verleihen kann, wie er bei der naturwissenschaftlichen Induction nur einer überwältigenden Zahl von Beobachtungen oder, was damit gleichbedeutend ist, der Unterordnung unter die allgemeinsten Naturgesetze zukommt. Jeder Versuch einer solchen Feststellung gleichförmiger Kriterien der historischen Wahrheit steht im Widerspruch mit der unendlichen Vielgestaltigkeit des historischen Geschehens, das, wie es einen Gegensatz bildet zu der Gleichförmigkeit der Naturerscheinungen, so auch wesentliche Abweichungen in der methodischen Behandlung der Probleme erforderlich macht.

### b. Die historische Interpretation.

Die allgemeine Natur der geistigen Schöpfungen und die besonderen Bedingungen des historischen Geschehens bringen es mit sich, dass eine causale Erklärung geschichtlicher Thatsachen immer nur bruchstückweise und niemals in der Form einer zwingenden Deduction möglich ist. Die Aufgabe der historischen Interpretation lässt sich daher nicht etwa mit der Aufgabe der Naturerklärung auf gleiche Linie stellen, sondern sie beschränkt sich auf die Nachweisung eines psychologisch begreiflichen Zusammenhangs zwischen den durch die Kritik gesicherten einzelnen historischen Thatsachen. Ist ein solcher Zusammenhang nachgewiesen, so haben wir dadurch ein Verständniss der Begebenheiten gewonnen.

---

*) Vgl. L. v. Ranke, Zur Chronologie des Eusebius. Beilage zum 1. Band seiner Weltgeschichte. Anderweitige Beispiele historischer Kritik enthalten desselben Verfassers kritische Erörterungen zur alten Geschichte im 3. Band des genannten Werkes.

**) Vgl. H. Wuttke, Ueber die Gewissheit der Geschichte, Universitätsprogramm. Leipzig 1865.

Wie der Interpretation der objective Zwang einer physikalischen Deduction mangelt, so fehlt dem Verstehen geschichtlicher Ereignisse der subjective Zwang der Naturerkenntniss. Während es nur eine wirkliche Naturerkenntniss giebt, der jeder abweichende Erklärungsversuch als Irrthum gegenübersteht, sind mannigfache, vielleicht dem Grade nach gleiche, aber qualitativ abweichende Arten des historischen Verständnisses einer und derselben Reihe von Begebenheiten möglich, die alle die Wahrheit, jede nur von einem andern Standpunkte aus, enthalten. So geht hier der nämliche Charakter der Freiheit, der den Objecten selbst zukommt, bis zu einem gewissen Grade auch auf die subjective Betrachtung derselben über. Darum würde es falsch sein, wenn man dieses Verhältniss als einen Mangel auffassen wollte, durch den die Interpretation der Geschichte hinter derjenigen der Natur zurückstehe. Vielmehr ist es augenfällig, dass was jene an logischer Strenge einbüsst, sie an Vielseitigkeit und Gestaltungskraft gewinnt. Auf keine Geisteswissenschaft findet in dieser Beziehung das Gesetz der schöpferischen Energie in so reichem Masse Anwendung als auf die Geschichte, in welcher sich die menschlichen Geisteskräfte in so unendlich mannigfaltiger Weise bethätigt haben, dass dadurch auch ihr Verständniss zu dem schwierigsten Problem des menschlichen Geistes selbst wird.

Ausgehend von dem im allgemeinen vollkommen richtigen Satze, dass die logischen Normen, nach welchen die wissenschaftliche Forschung handelt, überall die nämlichen sind, hat man mehrfach den Versuch gemacht, die Regeln der naturwissenschaftlichen Induction auf das Gebiet der Geschichte zu übertragen. H. Th. Buckle, der beredteste Vertreter dieser Idee, wirft den Historikern vor, dass sie sich niemals bemüht haben, bestimmte Gesetze des historischen Geschehens abzuleiten, die sich den Naturgesetzen gegenüberstellen liessen. Er selbst versucht, indem er die vergleichende Methode, insbesondere die der Uebereinstimmung, auf verschiedene zeitlich und räumlich von einander unabhängige historische Begebenheiten anwendet, solche Gesetze durch Generalisation zu gewinnen*). Es ist nun augenfällig, in welch ungeheurem Missverhältniss die von Buckle gefundenen Gesetze zu dem methodischen Aufwande stehen, der ihrer Gewinnung vorausging. Das erste derselben lautet z. B.: »Der Fortschritt des Menschengeschlechts beruht auf dem Erfolg, womit die Gesetze der Erscheinungen erforscht sind«; ein anderes sagt: »Die wissenschaftlichen Entdeckungen stärken den Einfluss intellectueller Wahrheiten und schwächen relativ, aber nicht unbedingt, den Einfluss sittlicher Wahrheiten«. Man sollte denken, dass es nicht umfassender historischer Studien bedürfte, um Sätze zu finden, zu denen die Regel »auf Regen folgt Sonnenschein« etwa als eine ebenbürtige naturwissenschaftliche Induction

*) H. Th. Buckle, Geschichte der Civilisation in England. Deutsch von A. Ruge, 2. Aufl., 1864, Bd. I. Vgl. hierzu die Kritik v. J. G. Droysen in Sybel's historischer Zeitschrift, Bd. 9, 1863, S. 1 f.

gelten könnte. Der principielle Fehler liegt hier in der Voraussetzung, die geschichtlichen Ereignisse bildeten ein in ähnlicher Weise uniformes Geschehen wie die Naturvorgänge, so dass es nur einer Sammlung ähnlicher Erscheinungen bedürfte, um aus ihnen Gesetze abzuleiten. Wir haben gesehen, dass selbst auf physikalischem Gebiet durch eine derartige Aufzählung niemals wirklich causale Gesetze gefunden werden, da es dabei völlig an der nothwendigen Isolation und Variation der Bedingungen mangelt. Aber auch jenes Verfahren der Sammlung gleichartiger Beobachtungen, die nur in einzelnen Elementen sich unterscheiden, welches die Naturwissenschaft in Fällen, die dem Experimente unzugänglich sind, unter Umständen mit Erfolg anwendet, ist auf historischem Gebiete völlig unbrauchbar, weil hier vermöge der unendlich vielgestaltigen Bedingungen der Erscheinungen solche Fälle, in denen gleichsam die Natur selbst für uns experimentirt hat, niemals vorkommen. Es ist daher selbstverständlich, dass man bei dem Versuch, dieses Verfahren anzuwenden, zu so vagen und trivialen Abstractionen gelangen muss, wie sie Buckle wirklich gefunden hat. Auch ist nicht zu hoffen, dass etwa mit dem reicher werdenden Stoff, welchen der Fortgang der Geschichte künftigen Geschlechtern an die Hand giebt, das Verhältniss sich wesentlich anders gestalten werde. Denn nichts spricht dafür, dass das historische Geschehen auch nur annähernd unter gleichen Bedingungen sich wiederholen werde. Der Versuch, gleichartige Fälle zu sammeln, steht also nicht etwa auf einer Linie mit der Beobachtung übereinstimmender Entwicklungsvorgänge in der organischen Natur, sondern er würde sich eher mit einem Unternehmen vergleichen lassen, welches darauf ausginge, über die physischen Anfangszustände unseres Planeten aus den in der Zukunft zu beobachtenden geologischen Veränderungen desselben Aufschluss zu gewinnen.

In der That bedient sich nun die historische Interpretation, gleich den rein beobachtenden Naturwissenschaften, der vergleichenden Methode; aber sie wendet dieselbe in einer wesentlich abweichenden Weise an. Ihre Aufgabe ist es nicht, auf dem Wege der Induction schliesslich zur Generalisation von Gesetzen zu gelangen, sondern ihre Absicht geht dahin, die Erscheinungen aus sich selbst und aus den sich in ihnen verrathenden psychologischen Gesetzen zu erklären. Historische Gesetze von allgemeinem Charakter finden zu wollen ist also einfach dessalb eine Chimäre, weil es solche überhaupt nicht giebt. Die allem historischen Geschehen gemeinsamen Gesetze sind die psychologischen Gesetze der Menschennatur, die aber in jedem einzelnen Fall wieder unter mannigfach abweichenden Bedingungen Anwendung finden. Nun kann freilich die Geschichte selbst dazu dienen, psychologische Gesetze zu finden, und wir haben in dieser Beziehung die historische Methode als ein wichtiges Hülfsmittel der psychologischen Forschung kennen gelernt. (Vgl. S. 497.) Aber hierbei sind es niemals die historischen Thatsachen allein, welche uns zur Entdeckung verhelfen, sondern jene müssen mit den

sonstigen Hülfsmitteln der psychologischen Untersuchung, vor allem mit der unmittelbaren inneren Erfahrung, combinirt werden. Darum sind dann aber auch die auf diesem Wege gefundenen Gesetze nicht historische, sondern psychologische. In der That ist ersichtlich, dass selbst die von Buckle aufgestellten Regeln, so unbestimmt und auch in psychologischer Beziehung werthlos sie im ganzen sind, dennoch einen psychologischen Charakter besitzen. Zudem ist wegen der einzigartigen Beschaffenheit ihrer Ereignisse gerade die eigentliche Geschichte für die theoretische Psychologie weit weniger fruchtbar als jene philologisch-historischen Disciplinen, welche sich mit der Entwicklung einzelner der Naturbestimmtheit des Bewusstseins in höherem Masse unterworfener Geisteserzeugnisse beschäftigen, wie die Sprachwissenschaft, die Mythologie und die historische Ethik.

Von dem hier erörterten Verhältnisse zur Psychologie ist die Anwendung der vergleichenden Methode innerhalb der historischen Interpretation durchaus bestimmt. Indem diese darauf ausgeht, die Thatsachen aus ihrem eigenen Zusammenhang und aus den Motiven der handelnden Wesen zu erklären, ist sie zunächst auf die individuelle Vergleichung angewiesen, auf ein Abwägen der bei den Thatsachen selbst in Betracht kommenden Einflüsse, ein Ausscheiden der aus thatsächlichen oder psychologischen Gründen unwesentlichen und eine Combination der zurückbleibenden wesentlichen Factoren. In zweiter Linie wird dann aber auch die generische Vergleichung herbeigezogen. Sie kann wieder von subjectiven oder von objectiven Bedingungen bestimmt sein. Im ersteren Falle zieht sie andere, in ihrer objectiven Beschaffenheit unter Umständen ganz abweichende Ereignisse herbei, an denen aber die nämlichen massgebenden Factoren, seien diese nun einzelne Personen, Regierungen, Parteien, Staaten oder Völker, betheiligt waren. Aus dem Verhalten dieser Factoren in andern Fällen schliesst man auf die Wirksamkeit bestimmter Motive bei dem in Frage stehenden Ereigniss. Diese Anwendungsform der generischen Methode schliesst sich am nächsten an die individuelle Vergleichung an; sie ist die häufigste, dem Charakter der historischen Probleme angemessenste. Daneben fehlt auch die zweite, objective Anwendung nicht ganz. Sie besteht darin, dass andere objectiv ähnliche, aber unter andern äusseren Verhältnissen und darum unter Betheiligung anderer Factoren stattgehabte Ereignisse zur Vergleichung herbeigezogen werden. Auch hier dient die Vergleichung nicht zur Ableitung allgemeiner Gesetze, sondern sie folgert von einem Fall auf den andern. Beide Methoden generischer Vergleichung operiren also mit dem Analogieschluss. Bei der subjectiven Methode schliesst man, dass irgend eine Person oder ein bestimmter Complex von Personen analog den in früheren Erfahrungen bethätigten Charaktereigenschaften auch unter einer andern Verkettung von Umständen handeln werde; bei der objectiven Methode schliesst man, dass ein ähnlicher causaler Zusammenhang, wie er bei einem andern durch übereinstimmende Merkmale ausgezeichneten Ereignisse stattgefunden hat, auch

in dem gegebenen Fall vorhanden sein werde. Es ist klar, dass diese zweite Analogie im allgemeinen die weniger bindende ist; denn die Charaktere von Individuen und selbst von Völkern sind trotz der Schwankungen, die sie oft darbieten, doch im ganzen constanter als die unter Umständen sehr verschiedenartigen Einflüsse, die äusserlich übereinstimmende historische Erfolge herbeiführen. Darum kann der objective Analogieschluss am ehesten noch in Bezug auf solche Thatsachen, die mit den natürlichen Vorstellungen und Trieben des menschlichen Geistes zusammenhängen, eine bindende Kraft gewinnen. So schliesst man gewiss mit Recht, dass, wenn in den Traditionen verschiedener Urgeschichten, wie z. B. in der hebräischen und der römischen, auffallend übereinstimmende Züge vorkommen, hieraus die mythische Natur derartiger Theile der Ueberlieferung wahrscheinlich wird. Zugleich ist dies ein Beispiel für den auch auf historischem Gebiete vorkommenden Fall, dass die Methode der Uebereinstimmung ausnahmsweise als negative Instanz Verwerthung finden kann. (Vgl. oben S. 531.)

In ihrem ganzen Zusammenhange betrachtet stellt sich die historische Interpretation als ein Inductionsverfahren dar, welches nicht, wie die naturwissenschaftliche Induction, zu allgemeinen Gesetzen, die eine Reihe ähnlicher Thatsachen beherrschen, sondern zu Specialgesetzen führt, welche für den der Interpretation unterworfenen Zusammenhang allein gültig sind. Auch hier verdient die Nachweisung des causalen Zusammenhanges den Namen eines Gesetzes, insofern wir unter einem solchen stets die irgend eine Thatsache oder einen Complex von Thatsachen beherrschende Regel verstehen. Man pflegt nur von der Anwendung dieses Namens hier desshalb abzusehen, weil ein Specialgesetz, welches nur für einen singulären Thatbestand Geltung besitzt, nie eine abstracte Formulirung zulässt, sondern nur in Verbindung mit den concreten Erscheinungen, die unter das Gesetz fallen, ausgesprochen werden kann. Immerhin bezeichnet die Verschiedenheit der Aufgaben der Kritik und der Interpretation deutlich die Grenze, wo die Thatsachen selbst von ihrer Verbindung zu einem Gesetze sich scheiden. Denn die Kritik hat es nur mit den Thatsachen zu thun, die Interpretation aber sucht einen gesetzmässigen Zusammenhang der Thatsachen nachzuweisen. Vermöge der speciellen Natur der historischen Gesetze nimmt auch der Beweis für bestimmte causale Beziehungen der Thatsachen im allgemeinen die Form eines praktischen Inductionsbeweises an. (Abschn. I, S. 67.) In die historische Induction greift nun aber, untrennbar mit ihr verbunden, die psychologische Deduction ein. Während die individuelle Vergleichung wesentlich dem Inductionsverfahren dient, ist es die generische, welche überall dieses deductive Element einschliesst. Demnach bewegt sich die Deduction hier überall zunächst in Analogieschlüssen der oben geschilderten Art. Diese Analogieschlüsse stützen sich aber wieder auf psychologische Gesetze, welche letztere daher als die Principien der historischen Deduction anzuerkennen sind.

Bei der Vielgestaltigkeit der Hülfsquellen, über welche die historische Interpretation gebietet, ist eine beschränkende Auswahl unter denselben theils durch ihre verschiedene Sicherheit, theils auch schon durch ihre Zahl geboten. Sobald nun eine derartige Auswahl willkürlich und unter der Leitung eines bestimmten methodischen Princips geschieht, so verbindet sich die Induction mit einer Abstraction, deren auszeichnender Charakter in diesem Falle in ihrer Willkürlichkeit besteht. Dabei kann der Wille des historischen Beobachters bald durch objective Bedingungen, bald aber auch durch seine eigene Individualität motivirt werden. In diesem Sinne sind zunächst die zwei Richtungen der Interpretation zu verstehen, welche die Historik zu unterscheiden pflegt: die pragmatische und die psychologische. Diese Namen beziehen sich zwar zunächst auf die Darstellung; die Unterschiede liegen aber tiefer, in den Methoden der Forschung. Die pragmatische Interpretation will den Thatbestand für sich selbst reden lassen, indem sie den Zusammenhang nachweist, in welchem die Thatsachen objectiv mit einander stehen. Die psychologische geht den Motiven nach, von welchen die in das historische Geschehen eingreifenden Willenshandlungen bestimmt wurden. Die pragmatische Historik beschränkt sich also möglichst auf die eigentliche historische Induction, die psychologische verwendet mit Vorliebe die deductiven Hülfsmittel, die subjectiven und objectiven Analogien. Aber es versteht sich von selbst, dass niemals der Pragmatiker von der psychologischen Seite oder der psychologische Historiker von der pragmatischen Behandlung ganz abstrahiren kann. Nur um vorwiegende Richtungen handelt es sich also hier. Gerade der reine Pragmatismus ist so wenig durchführbar, dass sogar dieser Name eine veränderte Bedeutung angenommen hat, indem man häufig unter ihm eine Behandlung der Geschichte versteht, welche, statt die Ereignisse aus ihren eigenen Motiven psychologisch zu begreifen, vielmehr dieselben nach untergeschobenen moralischen oder politischen Zwecken beurtheilt*), so dass nun mit völliger Umkehrung der eigentlichen Bedeutung die pragmatische Interpretation als die subjective, die psychologische als die objective erscheint.

Wichtiger als diese willkürliche Scheidung von Thatsachen und Motiven ist die Abstraction von einzelnen Quellen der Forschung und die damit verbundene ausschliessliche Benützung anderer. Eine derartige Behandlungsweise kann namentlich durch die wechselseitige Ergänzung verschiedener mit abweichenden Hülfsmitteln arbeitender Forschungen von hohem Werthe sein. Eine Construction der ältesten Geschichte Roms an der Hand der Ueberreste und Denkmäler, wie sie von Mommsen versucht wurde, ist selbst dann, wenn man in der sagenhaften Tradition historische Anklänge vermuthet, von hohem Werthe, insofern sie zunächst die sicheren Bestandtheile der Ueberlieferung ausscheidet, die nun die Beurtheilung jener mannigfach gefälschten Quellen leiten können. Die Art, wie Ranke die

*) G. G. Gervinus, Grundzüge der Historik. Leipzig 1837, S. 39.

verschiedensten Gebiete der neueren Geschichte mit vornehmlicher Benutzung von Gesandtschaftsberichten bearbeitet hat, besitzt durch die subjective und doch zugleich von bestimmten politischen Gesichstpunkten bestimmte Färbung, welche die Ereignisse annehmen, ein hohes Interesse*). So wird überall die historische Abstraction zunächst durch die Fülle des Stoffs und die Mannigfaltigkeit der Gesichtspunkte veranlasst, die auf das historische Geschehen anwendbar sind; in ihrer speciellen Richtung wird sie aber durch die besondere geistige Auffassung des historischen Forschers bestimmt, welcher gerade hierin die Eigenthümlichkeit seiner Begabung verräth.

Neben der pragmatischen und der psychologischen Interpretation hat man noch eine Interpretation der Bedingungen und eine solche der Ideen unterschieden, indem man unter der ersteren hauptsächlich die Erklärung aus den Naturbedingungen, unter der letzteren aber die Geschichtsbetrachtung an der Hand gewisser allgemeiner, namentlich ethischer Ideen versteht**). Aber insoweit diese Interpretationen zum unmittelbaren Verständniss des Geschehens erfordert werden, ist die erste mit der pragmatischen, die zweite mit der psychologischen Interpretation untrennbar verbunden; und sobald über dieses Ziel hinaus nach dem allgemeinen Einflusse der Naturbestimmtheit der Völker auf ihre Geschichte oder nach den Ideen gefragt wird, welche etwa in der historischen Entwicklung zum Ausdruck gelangen, bilden beide die Hauptbestandtheile einer philosophischen Geschichtsbetrachtung.

### c. Die philosophische Geschichtsbetrachtung.

Die historische Untersuchung beschränkt sich auf die Ermittelung des causalen Zusammenhangs der geschichtlichen Erscheinungen, wie er unmittelbar aus den Thatsachen selbst sich ergiebt, oder nach allgemeingültigen psychologischen Gesetzen anzunehmen ist. Bei der Erledigung dieser Aufgabe erheben sich nun zugleich andere Probleme, zu deren Lösung die Hülfsmittel der historischen Interpretation nicht genügen, und die durch ihren allgemeinen Charakter, sowie durch die Verbindung, in der sie mit anderen Fragen des menschlichen Wissens stehen, der philosophischen Untersuchung anheimfallen. Wie jede Einzelwissenschaft in Bezug auf ihre allgemeinsten Principien zum Object der Philosophie wird, so schliesst darum an die historische Betrachtung der menschlichen Erlebnisse die philosophische Geschichtsbetrachtung sich an, als ein Gebiet, welches zu dem durch die Kritik geprüften und durch die Interpretation verbundenen Inhalt der Geschichte eine ähnliche Stellung einnimmt wie die Historik selbst zu dem Stoff, den sie bearbeitet. Zwei Fragen sind es insbesondere, deren Beant-

*) Vgl. Ranke, Fürsten und Völker von Süd-Europa im 16. und 17. Jahrhundert, Bd. I, Vorrede.

**) J. G. Droysen, Grundriss der Historik, 3. Aufl., S. 23 f.

wortung einer solchen philosophischen Betrachtung überlassen bleibt: die eine bezieht sich auf den Ursprung und die historische Bedeutung der geistigen Eigenschaften der Völker, die andere auf die Ideen, welche die einzelnen Perioden der Geschichte beherrschen. Nicht als ob der Historiker als solcher sich nichts um diese Fragen zu kümmern hätte; vielmehr bilden dieselben das Ziel einer jeden tiefer eindringenden Geschichtsauffassung. Nichts desto weniger liegen sie ausserhalb der Aufgaben der historischen Forschung als solcher. Die Völker mit ihren durch Naturbedingungen und psychologischen Ursachen bedingten geistigen Eigenthümlichkeiten und die aus ihnen hervorgegangenen massgebenden Individuen bilden gegebene Factoren, aus denen die historische Interpretation ihre wichtigsten Resultate abzuleiten hat, die aber selbst einer geschichtlichen Erklärung nicht, oder doch nur zum allergeringsten Theile zugänglich sind. Ebenso beruht die Erkenntniss der die Geschichte beherrschenden Ideen, insoweit eine solche überhaupt möglich ist, auf einer philosophischen Abstraction, die sich zwar auf die historische Causalerklärung der Ereignisse stützt, in dieser aber noch nicht enthalten ist.

Wie die historische Forschung selbst nur auf die der Erinnerung zugängliche, aus Ueberlebnissen mannigfacher Art zu reconstruirende Vergangenheit sich beziehen kann, so auch die philosophische Geschichtsbetrachtung. So selbstverständlich dies erscheinen sollte, so hat sich dennoch merkwürdiger Weise fast der grösste Theil der Bestrebungen, die einer »Philosophie der Geschichte« gewidmet waren, umgekehrt theils mit der Zukunft des Menschengeschlechts theils mit den jenseits aller Erfahrung liegenden Zwecken der historischen Entwicklung beschäftigt, und die Betrachtung der Geschichte wurde höchstens dazu benützt, um aus ihr auf diese Zwecke und den nach ihnen zu vermuthenden künftigen Verlauf der Dinge zu schliessen. Hierher gehören alle jene Geschichtsphilosophien, die von Giambattista Vico an bis auf Hegel und über diesen hinaus bestimmte philosophische Ideen an die Geschichte heranbringen und nun, so gut es geht, die ungeheure Mannigfaltigkeit der historischen Thatsachen in das bereit gehaltene Schema einzwängen. Es ist begreiflich, dass bei solchen Versuchen unzulängliche Generalisationen und falsche Analogien eine grosse Rolle spielen. So wenn Vico seine Betrachtungen nach den drei Zeitaltern der Götter, Heroen und Menschen ordnet, wofür August Comte etwas moderner ein theologisches, metaphysisches und positives Stadium der Entwicklung setzt, oder wenn noch bei Hegel die Vergleichung mit den Lebensaltern der einzelnen Menschen eine gewisse Rolle spielt*). Dass vollends die herrschende Idee, der sogenannte Zweck der Geschichte, nicht aus dieser entnommen, sondern auf sie übertragen war, haben im allgemeinen

*) Vico, Grundzüge einer neuen Wissenschaft über die gemeinschaftliche Natur der Völker. Deutsch v. W. E. Weber, S. 108 f. Comte, Philos. positive, I. Introd.

die Philosophen selbst zugestanden. Bald ist dieser Zweck ein ethisches Postulat, wie Herder's »Erziehung zur Humanität«, bald ein Resultat anderweitiger speculativer Erwägungen, wie Hegel's Satz, dass die Substanz der Weltgeschichte die Vernunft sei*). Nicht minder fallen in dieses Gebiet ethischer und speculativer Betrachtungen die noch in neuerer Zeit viel gepflogenen Erörterungen über die Frage, ob die Menschheit im Ganzen vorwärts- oder rückwärtsschreite oder stillstehe, Anschauungen, welche Kant als historischen Eudämonismus, Terrorismus und Abderitismus bezeichnet hat. Er selbst bekannte sich in Bezug auf die allgemeinen socialen und rechtlichen Verhältnisse zum Eudämonismus; für den Menschen als Individuum zog er den Abderitismus vor. So wohlfeil es in der That ist auf den fortschreitenden intellectuellen Erwerb hinzuweisen, ebenso wenig hat es jemals an Beispielen moralischer Schlechtigkeit gefehlt, die schon desshalb, weil in dieser Beziehung das Selbsterlebte den tiefsten Eindruck zu machen pflegt, leicht auf einen sittlichen Rückschritt gedeutet werden, der die fragwürdigen Eroberungen der Intelligenz mehr als compensire. Da es sich nun hier überall um Dinge handelt, die sich der Messung entziehen, so kann eine Bilanz, wie sie Lotze in seinem »Mikrokosmus« ausführt, wonach das grosse Facit der Weltgeschichte zwischen Null und einer unbestimmten negativen Grösse schwanken soll, auf dem Standpunkte der Geschichtsphilosophie ebenso wenig widerlegt wie bewiesen werden. Wohl aber kann dieser Umstand darauf aufmerksam machen, dass jene Frage an eine unrichtige Stelle gebracht ist, wenn man sie auf dem Boden der historischen Betrachtung zu entscheiden sucht. Die Entwicklungen der Geschichte sind so vielgestaltig und unsere Schätzungen über Werth und Unwerth der Dinge sind in solchem Masse subjectiv veränderlich, dass jene geschichtsphilosophischen Urtheile höchstens über den subjectiven Gemüthszustand des Urtheilenden Aufschluss geben können. Nun ist aber die Anschauung, dass es eine menschliche Entwicklung giebt, welche das ganze geistige Leben, nicht bloss einzelne Seiten desselben, umfasst, zunächst kein Resultat historischer Erfahrung, sondern ein ethisches Postulat. Nicht darum also handelt es sich hier, in welchem Masse man in der relativ kurzen Spanne Zeit, deren Ueberblick uns gegönnt ist, thatsächlich eine solche Entwicklung nachweisen kann, sondern darum, ob man den Gedanken, dass der geistige Lebensinhalt der Menschheit überhaupt nichtig sei, für eine ethisch mögliche Idee hält. Wer die Sache von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, der wird wohl zugestehen, dass, wie gross man auch immerhin die theoretische Möglichkeit des Abderitismus oder Terrorismus anschlagen möge, es doch schwer begreiflich erscheint, wie Jemand mit dem praktischen Glauben an denselben noch irgend ein

---

*) Hegel's Vorlesungen über Philosophie der Geschichte, S. 12. Ges. Werke Bd. 9.

Interesse an der Weltgeschichte oder auch nur an seinem eigenen Leben verbinden könnte.

Die philosophische Geschichtsbetrachtung hat es nun aber ebenso wenig mit den künftigen Zielen, wie mit dem ursprünglichen Zweck der geschichtlichen Entwicklung zu thun. Jene Frage überlässt sie der Ethik, diese dem religiösen Glauben. Bezüglich der ersteren kann es sich für sie höchstens darum handeln zu beurtheilen, inwiefern in dem bisherigen Verlauf der Geschichte die ethischen Postulate verwirklicht sind oder nicht. Die zweite kann, wie sie aus ethischen Forderungen entsprungen ist, so auch nur aus diesen beantwortet werden. (Vgl. Bd. I, S. 372 f.) Der eigentliche Inhalt der Geschichtsphilosophie liegt in dem Inhalte der historischen Erfahrung selber, und die Probleme, auf die sie ausgeht, überschreiten zwar das Gebiet der historischen Interpretation, nicht aber das der historischen Thatsachen. Dieser Probleme giebt es, wie schon bemerkt, zwei: das eine bezieht sich auf die Ursachen der geschichtlichen Factoren, das andere auf den Inhalt der herrschenden Ideen. Für das erstere zieht die philosophische Betrachtung die Naturgeschichte und Völkerkunde zu Rathe, für das zweite stützt sie sich vor allem auf eine umfassende Kenntniss der Geschichte selbst, die sich mit psychologischer Beurtheilung und ethischer Auffassung der Dinge verbindet.

Von diesen beiden Problemen hat das erste, als das leichtere, in den Darstellungen der Geschichte wie der Geschichtsphilosophie bis jetzt am meisten Beachtung gefunden. So hat vor allem Herder in seinen »Ideen«, freilich zum Theil mit unzureichender Kenntniss der naturgeschichtlichen und ethnologischen Thatsachen, aber unterstützt durch seinen feinen Natursinn, die Naturbestimmtheit der historischen Factoren aufzuzeigen gesucht. Von ähnlichem Geiste ist Carl Ritter's Erdkunde getragen, und auf die Historiker selbst sind diese Versuche, die geschichtlichen Eigenschaften der Völker so viel als möglich aus den äusseren Bedingungen ihrer Verbreitung verstehen zu lernen, nicht ohne Einfluss gewesen, wie dies namentlich Max Duncker's Behandlung der alten Geschichte zeigt. Freilich liegt hier die schon von Hegel gemachte Bemerkung nahe, dass unter gleichen äusseren Verhältnissen Völker von sehr abweichendem historischem Charakter existiren können, und jene Betonung der Naturbedingungen fordert daher als Ergänzung die psychologische Untersuchung; hier hat die psychische Ethnologie noch ein reiches Feld von Aufgaben vor sich. Schwieriger und darum minder mit Erfolg behandelt ist das zweite Problem der philosophischen Geschichtsbetrachtung, das sich auf die herrschenden Ideen der Geschichte bezieht, wenn man von jenen geschichtsphilosophischen Versuchen absieht, die speculative Ideen von aussen an die historischen Thatsachen heranbringen, statt die geistigen Mächte nachzuweisen, welche das historische Geschehen selber lenken. So freigebig die Geschichtsphilosophie mit derartigen Versuchen gewesen ist, so vorsichtig zurückhaltend war die Historik. Und doch besteht gerade hierin die einzige wissenschaftliche

Aufgabe einer »Universalgeschichte«, welche die Resultate der historischen Kritik und Interpretation der Specialgeschichte entnehmen muss und daher nur in der philosophischen Behandlung des Ganzen ihr eigenthümliches Verdienst erblicken kann. Ranke's Behandlung der ältesten Geschichte, sein Versuch, die Geschichte der alten Culturvölker des Orients unter dem Gesichtspunkte der sie beherrschenden religiösen Ideen in eine innere Verbindung zu bringen, ist ein Beispiel derartiger Behandlung, deren Aufgaben freilich in den späteren Zeiten und bei den verwickelteren Culturbedingungen der neueren Völker wachsenden Schwierigkeiten begegnen.

Die methodische Aufgabe bei allen diesen dem Gebiet der philosophischen Geschichtsbetrachtung zugehörenden Untersuchungen besteht in einer auf umfassender Kenntniss des Einzelnen sich erhebenden isolirenden Abstraction und in einer an die letztere sich anschliessenden psychologischen und thatsächlichen Deduction. So greift die Frage nach der Naturbestimmtheit eines Volkscharakters auf Grund vorangegangener Vergleichung die passenden geographischen und sonstigen naturgeschichtlichen Elemente heraus, mittelst deren man nun ein Verständniss der historischen Verhältnisse zu gewinnen sucht. Die Nachweisung der herrschenden Ideen sieht ab von zahlreichen sonstigen Culturbedingungen, die als ergänzende Momente einer späteren Berücksichtigung vorbehalten bleiben, um zunächst zu versuchen, inwieweit von dem einen Punkte aus, der sich als der bedeutsamste aufdrängt, eine Erkenntniss der Erscheinungen zu gewinnen sei. Wie jede Deduction, so kann darum auch diese zunächst eine hypothetische Beschaffenheit besitzen, um dann an ihrer wirklichen Brauchbarkeit ihren Prüfstein zu finden. Methodisch scheidet sich so die philosophische Geschichtsbetrachtung von der durchaus inductiv verfahrenden historischen Interpretation durch ihren deductiven Charakter. Hierin liegt, mit Rücksicht auf die unsicheren Grundlagen der Deduction, zugleich der Ursprung der Gefahren, denen die Geschichtsphilosophie so oft unterlegen ist.

## 3. Die Methodik der philologisch-historischen Wissenschaften.

### a. Die Linguistik.

Unter denjenigen Objecten geschichtlicher Entwicklung, welche ausserhalb des Forschungsgebietes der eigentlichen Geschichte liegen, theils weil sie in die äusseren Lebensschicksale der Völker nicht unmittelbar eingreifen, theils weil ihre Entstehung menschlicher Erinnerung entzogen bleibt, nimmt die Sprache eine hervorragende Stellung ein. Denn sie ist die Bedingung aller anderen Geisteserzeugnisse; insbesondere werden durch sie erst die wichtigsten Thatsachen der philosophischen wie der historischen Forschung der Erkenntniss zugänglich. In dieser ursprünglichen Stellung,

welcher die Sprache zugleich ihre Bedeutung als psychologisches Forschungsobject verdankt, liegt der Grund eines eigenthümlichen Streites, der zwischen den Sprachforschern selbst über die wissenschaftliche Classification der Linguistik entstanden ist. Bald hat man sie, wie es hier geschieht, den Geschichtswissenschaften zugezählt, bald ist sie in ausdrücklichem Gegensatze hierzu als eine Naturwissenschaft bezeichnet worden*). Mit Rücksicht auf den Gegenstand der linguistischen Forschung kann es nun aber keinem Zweifel unterworfen sein, und wird im Grunde selbst von den Vertretern der entgegengesetzten Auffassung zugestanden, dass die Linguistik eine historische Wissenschaft ist: die Sprache ist ein Erzeugniss des menschlichen Geistes, welches sich in einer fortwährenden Entwicklung befindet, und sie ist von Naturbedingungen nicht in wesentlich anderer Weise als andere historische Entwicklungen abhängig. Dagegen ist es ebenso zweifellos, dass die Linguistik in Bezug auf ihre Methodik denjenigen Gebieten der Naturforschung, welche auf die comparative Methode angewiesen sind, verwandter ist als irgend ein anderer Zweig der Geschichtswissenschaften. Ganz besonders gilt dies für die Geschichte der sprachlichen Lautveränderungen, welche theils in Folge des Einflusses physiologischer Factoren, theils aber auch desshalb, weil die hierher gehörigen Vorgänge mehr als andere dem directen Willenseinflusse entzogen bleiben, bis zu einem gewissen Grade den Charakter naturgeschichtlicher Ereignisse an sich tragen. Immerhin verleugnet die Sprachwissenschaft auch in denjenigen Gebieten, die sich mit dem geistigen Inhalt der Lautformen und ihrer Verbindungen beschäftigen, wie in der Untersuchung der Wortbildung, der syntaktischen Formen oder selbst des historischen Bedeutungswandels der Wörter, keineswegs ganz den Charakter naturwissenschaftlicher Methodik. Denn die sprachlichen Bildungen besitzen verhältnissmässig am wenigsten jene singuläre Beschaffenheit, welche sonst dem historischen Geschehen eigen ist. Während es der Geschichte versagt bleibt, Gesetze aufzustellen, die mehr als nichtssagende Verallgemeinerungen sind, ist es gerade eine Hauptaufgabe der Linguistik, allgemeine Gesetze zu finden, die, mögen sie nun für alle menschliche Sprache oder für einen besonderen Sprachstamm oder selbst bloss für eine Einzelsprache gelten, doch in allen diesen Fällen in ähnlicher Weise wie die Naturgesetze die einzelnen Thatsachen erklären und mit einander ver-

*) Vertreter der letzteren Auffassung sind Max Müller, Vorlesungen über die Wissenschaft der Sprache, I, S. 19 f., und Aug. Schleicher, Die Darwin'sche Theorie und die Sprachwissenschaft, Weimar 1863. Ihnen gegenüber betonen den Charakter der Linguistik als Geschichtswissenschaft Whitney, Vorlesungen über Sprachwissenschaft, herausgeg. von Jolly, S. 71 f., und Herm. Paul, Principien der Sprachgeschichte, Halle 1880, Einleitung. Eine vermittelnde Stellung nimmt G. Curtius ein, Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. W. V, S. 187.

binden. Freilich aber ist anzuerkennen, dass die verschiedenen Gebiete des sprachlichen Lebens keineswegs in gleichem Grade diesem naturgesetzlichen Charakter sich fügen; und dadurch kommt es, dass innerhalb der Sprachwissenschaft selbst ein allmählicher Uebergang sich vollzieht von der vergleichenden Methodik des Naturforschers, welche vorzugsweise mit der generischen Vergleichung operirt, zu derjenigen des Historikers, die mehr auf die individuelle Vergleichung beschränkt bleibt. Dem ersten Gebiet fällt die ganze Lautlehre, dem zweiten die Geschichte der Wortbedeutungen zu; zwischen beiden stehen mit einem nach Aufgabe und Methode gemischten Charakter die Geschichte der Wortbildungen und der syntaktischen Formen.

Zweifellos verdankt die Untersuchung des Lautbestandes der Sprache und ihrer geschichtlichen Wandlungen der relativen Leichtigkeit, mit welcher hier die vergleichende Methode zur Aufstellung allgemeiner Gesetze führt, einen Theil ihrer Bevorzugung durch die moderne Linguistik. Zugleich ist aber diese an sich schon durch die fundamentale Natur der hier vorliegenden Probleme bedingt, da die Lautform das äussere Gewand ist, in das der geistige Inhalt der Begriffe und ihrer Beziehungen gekleidet werden muss. Zwei Aufgaben verfolgt die lautgeschichtliche Untersuchung: sie will die Veränderungen der Laute ermitteln, welche im Laufe der Entwicklung der Sprache eingetreten sind, und sie will die Gesetze auffinden, nach welchen diese Veränderungen erfolgen. Die erste dieser Aufgaben ist beschreibender, die zweite erklärender Art. Die Beschreibung liefert den Stoff, den die Erklärung an der Hand physiologischer und psychologischer Thatsachen zu verwerthen sucht. Jene bereitet die Induction vor, diese vollzieht sie, um gleichzeitig zur deductiven Anwendung der gefundenen Gesetze fortzuschreiten. Doch sind beide Aufgaben nicht völlig von einander zu trennen, da sich nicht bloss der ursprüngliche Lautbestand einer Sprache meistens unserer directen Nachweisung entzieht, sondern weil auch zwischen den in historischer Zeit vorliegenden Uebergängen Lücken der Tradition vorhanden sein können, die durch Schlüsse aus den anderweitig erkannten Lautgesetzen ausgefüllt werden müssen. Theils hierdurch, theils wegen der Vieldeutigkeit der physiologischen und psychologischen Momente, die in die Erklärung eingehen, nimmt die Hypothese in der Untersuchung der historischen Lautgesetze eine unentbehrliche Stellung ein. In allen diesen Beziehungen hat die linguistische Methode eine gewisse Aehnlichkeit mit der comparativen Methode der geologischen Forschung, bei der in ähnlicher Weise Ungewissheit der Anfangszustände, Lücken des Zusammenhangs und nachträgliche Verschiebungen in der Ordnung der Objecte die geschichtliche Reconstruction erschweren.

Die lautgeschichtliche Untersuchung beginnt mit der individuellen Vergleichung: sie verfolgt die Lautform eines einzelnen Wortes während einer gewissen mehr oder minder umfassenden Entwicklungsperiode; dann schreitet sie zur generischen Vergleichung fort, indem sie die Ver-

änderungen solcher Wörter zusammenstellt, deren Lautbestand ein ähnlicher ist. Da aber diese Aehnlichkeit immer nur auf einzelne Laute oder beschränkte Lautcomplexe sich beziehen kann, so verbindet sich hier die Vergleichung unmittelbar mit einer Abstraction, welche es möglich macht, dass das nämliche Wortganze gleichzeitig zu mehreren Inductionen verwendet wird, die sich auf verschiedene Lautbestandtheile desselben beziehen. Solche Inductionen können dann theils die isolirte Veränderung der Laute, theils den Einfluss benachbarter Laute auf diese Veränderung betreffen. In beiden Fällen ergeben sich als Resultate der generischen Vergleichung bestimmte empirische Gesetze des Lautwechsels. An diese knüpft nun eine doppelte Hypothesenbildung an. Eine erste sucht von den empirisch gefundenen Veränderungen rückwärts zu gehen und auf diese Weise einen Anfangszustand zu reconstruiren, welcher den unmittelbaren Zeugnissen der Sprachgeschichte unzugänglich ist; eine zweite sucht physiologische und psychologische Erklärungsgründe für die thatsächlichen Veränderungen zu finden und dadurch die rein empirischen Gesetze der Lautgeschichte in causale umzuwandeln. Es wiederholt sich hierin lediglich der allgemeine Verlauf des inductiven Verfahrens. (Abschn. I, S. 23 f.) Doch sind in diesem Falle, ähnlich wie bei anderen Vorgängen, deren erste Entstehung unserer Beobachtung entzogen ist, nur diejenigen Hypothesen, die sich auf die Erklärungsgründe empirisch gegebener Veränderungen beziehen, einer directen Verification zugänglich, wogegen alle Hypothesen bezüglich der Anfangszustände der Sprache überhaupt wie der einzelnen Sprachstämme einer solchen entbehren müssen. Hier bleiben wir daher immer auf Analogieschlüsse aus der uns zugänglichen Entwicklung angewiesen. Diese können dann wieder von rein empirischer oder von causaler Beschaffenheit sein: wir können vermuthen, dass eine Folge lautlicher Veränderungen im selben Sinne jenseits des unserer Untersuchung zugänglichen Anfangspunktes sich fortsetzt, in welchem sie diesseits desselben verläuft, ohne uns über den Grund der Veränderungen Rechenschaft zu geben; oder wir können schliessen, dass die nämlichen Bedingungen, die in der uns zugänglichen Zeit Lautveränderungen bewirkt haben, jenseits derselben wirksam gewesen sind. Die Linguistik hat sich bisher ganz und gar mit Analogieschlüssen der ersten Art begnügen müssen, was um so mehr zu beklagen ist, da sie nicht nur die minder zwingenden sind, sondern auch mit den Ergebnissen der Schlüsse zweiter Art durchaus nicht nothwendig zusammentreffen. Denn die inneren und äusseren Bedingungen der Lautveränderungen können sich verändert haben, daher diese nicht immer in der nämlichen Richtung, in der wir sie innerhalb engerer Grenzen beobachten, über dieselben hinaus sich fortsetzen müssen. So kommt es, dass hier überhaupt derjenige Theil der Induction, der die Aufstellung empirischer Gesetze überschreitet, noch wenig ausgebildet ist. Wir besitzen z. B. in Grimm's Gesetz der Lautverschiebung das Resultat einer die isolirten Veränderungen der consonan-

tischen Laute in den Einzelsprachen des indogermanischen Stammes sehr glücklich zusammenfassenden Induction*). Dagegen sind die hieraus geschöpften Vermuthungen über den consonantischen Lautschatz der indogermanischen Ursprache durchaus hypothetischer Art, und ebenso bewegt sich alles, was über die physiologischen und psychologischen Ursachen der Lautverschiebung geäussert worden ist, in zweifelhaften Vermuthungen. Noch unsicherer wird dieser zweite Theil der Induction natürlich dann, wenn selbst das empirische Gesetz, auf welchem er weiter baut, in Bezug auf seine Allgemeinheit bestritten werden kann. So hat man aus gewissen Unterschieden, welche sich bei der Vergleichung älterer und jüngerer Sprachformen darbieten, geschlossen, dass die Aenderungen in dem Vocalismus der Sprache überall durch ein Gesetz der Schwächung der Laute beherrscht werden, und darum vermuthet, dass einerseits die Ursprache nur die starken Vocale a, i, u und ihre Verbindungen besessen habe, und dass anderseits als die vorherrschende Triebfeder der Veränderungen die Bequemlichkeit der Articulation zu betrachten sei. Aber hier ist schon das empirische Gesetz bestritten, und noch erheblicheren Zweifeln begegnen die Hypothesen, die daran geknüpft werden. Eine grosse Schwierigkeit liegt in diesem Fall für die Formulirung empirischer Gesetze darin, dass dieselben bei der ersten Auffindung keineswegs als ausnahmslose Normen erscheinen, daher bekanntlich in der alten Grammatik der Satz »keine Regel ohne Ausnahmen« beinahe allein als eine Regel ohne Ausnahmen auftritt. Mehr und mehr hat die neuere Linguistik diesen Standpunkt verlassen und die »Ausnahmslosigkeit der Lautgesetze« in dem Sinne zur Geltung gebracht, dass, wo immer die Gültigkeit eines Gesetzes durchbrochen erscheint, der Einfluss eines andern Gesetzes nachgewiesen werden müsse, dessen Einfluss die Wirkung des ersten aufhebe. Sichtlich handelte es sich hier zunächst nur um ein berechtigtes logisches Postulat, dem der empirische Nachweis noch keineswegs in allen Fällen zu folgen vermag. Darum drängte nun aber auch dieses Postulat dazu, über eine bloss empirische Gesetzesformulirung hinaus- und den Complicationen causaler Bedingungen nachzugehen, welche eine derartige Kreuzung verschiedener Gesetze erklärlich machen. So zeigte es sich auch hier, dass, sobald man zu einer Erklärung der Erscheinungen fortzuschreiten sucht, der stetige Gang der Induction abgekürzt wird, indem, noch bevor die Aufstellung empirischer Gesetze abgeschlossen ist, die Untersuchung der causalen Verhältnisse beginnt. Von besonderem Einflusse sind hierbei psychologische Erklärungsgründe geworden, indem man in der Association ähnlicher Lautformen, die in diesem Fall nicht ganz zweckmässig als Analogie bezeichnet worden ist, eine wichtige Quelle der Beeinflussung der Laut-

---

*) Ueber den Inhalt desselben vgl. Max Müller, Vorlesungen über die Wissenschaft der Sprache, II, S. 187 f.

formen erkannte*). Von dem so gewonnenen Gesichtspunkte aus hat man dann zuweilen auch schon mit dem Versuch begonnen, den Bedingungen des ursprünglichen Lautbestandes und der allgemeinen Richtung der Lautveränderungen einer Sprache nicht von den empirischen Gesetzen der Lautgeschichte selbst aus, sondern durch eine allgemeine Erwägung der bestimmten physischen und psychischen Einflüsse auf eine Sprachgenossenschaft nachzuspüren**). Derartige Versuche sind freilich noch sehr in ihren Anfängen begriffen, immerhin weisen sie auf eine Ergänzung hin, der die rein lautgeschichtliche Untersuchung an und für sich zugänglich ist, und die in einer andern Anwendung der comparativen Methode bestehen würde, derjenigen ähnlich und zum Theil mit ihr zusammenfallend, deren sich in allgemeinerem Sinne die Anthropo-Geographie bei ihrer Untersuchung der Beziehungen des Menschen zu seinen äusseren Lebensbedingungen bedienen muss.

Der in der Lautlehre annähernd festgehaltene regelmässige Verlauf der Induction von der Aufstellung empirischer Gesetze zur Hypothesenbildung und Causalerklärung erfährt nun in der Theorie der Wortbildung und in der Geschichte der syntaktischen Formen nach entgegengesetzten Richtungen hin Abänderungen: in der ersteren durch den frühzeitigen Einfluss der Hypothese, in der letzteren durch die fast unbeschränkte Geltendmachung einer rein empirischen Induction. Dies liegt in der verschiedenen Natur der Untersuchungsobjecte begründet. Das Wort zeigt im allgemeinen schon in seinem frühesten uns zugänglichen Zustande eine fertige Form, welche zwar noch mannigfache Umwandlungen, namentlich lautliche Veränderungen erfahren kann, in Bezug auf die Zusammenfügung aus bedeutungsvollen Bestandtheilen aber ihre eigentliche Bildungsperiode bereits hinter sich hat. So kann denn die Wortbildung selbst gar nicht Gegenstand einer directen Induction sein, sondern Aufschlüsse über dieselbe lassen sich nur theils der Vergleichung der Bestandtheile verschiedener Wortformen, theils der Vergleichung verschiedener Sprachen eines und desselben Stammes oder verschiedener Abstammung entnehmen. Eine generische Vergleichung dieser Art bedarf von vornherein der leitenden Hypothesen, wenn sie nicht zu jenem unsicher tastenden Verfahren herabsinken will, welches lange Zeit beinahe alle etymologischen Bestrebungen in einen üblen Ruf gebracht hat. Dagegen sind die syntaktischen Formen unmittelbare Objecte der Beobachtung, und sie sind überdies in der historischen Zeit der Sprache leicht zu verfolgenden Veränderungen unterworfen,

---

*) Vgl. hierüber B. Delbrück, Einleitung in das Sprachstudium, Leipzig 1880, S. 60 f., und die Aufsätze von Misteli in Ztschr. f. Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft, Bd. 11 u. 12.

**) H. Osthoff, Das physiologische und psychologische Moment in der sprachlichen Formenbildung. (Samml. wissensch. Vortr. von Virchow u. Holtzendorff.) Berlin 1879.

deren Interpretation höchstens zu psychologischen Hypothesen Anlass geben kann, von denen aber das Grammatische selbst unberührt bleibt. Sehr augenfällig sind diese Unterschiede in der indogermanischen Sprachforschung hervorgetreten. Die herrschende Richtung wird hier in ihrer Auffassung der Wortformen und insbesondere in ihrer Erklärung der Flexion von der so genannten Agglutinationstheorie geleitet. Diese letztere ist aber ursprünglich aus zwei Hypothesen hervorgegangen, aus der Annahme einsilbiger Wurzeln und aus der Voraussetzung, dass die Personalendungen des Verbums angehängte Pronomina seien*). Keiner dieser Hypothesen steht eine zureichende Induction zur Seite. Der einzige, allerdings genügende Grund ihrer Aufrechterhaltung besteht in dem Nutzen, den sie bei der Ableitung der sprachlichen Formen gewähren. Diesem heuristischen Motiv entsprechend, hat man denn auch in dem Begriff der Wurzel ursprünglich nur eine grammatische Abstraction gesehen. Je mehr aber die Agglutinationstheorie auf eine reale Entwicklung bezogen wurde, um so nothwendiger mussten die ursprünglichen Wurzeln mit den Wörtern der Ursprache selbst zusammenfallen. Dieser Anschauung kam dann noch die generische Vergleichung verschiedenartiger Sprachformen zu Hülfe, welche es gestattet, gerade mit Bezug auf die Wortbildung die Gesammtheit der menschlichen Sprachen in ein bestimmtes Entwicklungsschema zu ordnen**). Hier war dann freilich die Entwicklung selbst wieder zu einer Abstraction geworden, welche sicherlich nur in wenigen Punkten mit einer realen Entwicklung zusammenfiel. So bewegen sich alle diese Untersuchungen über den Sprachbau theils in Deductionen aus bestimmten Hypothesen, die in vereinzelten sprachlichen Thatsachen oder auch in psychologischen Erwägungen ihre Quelle haben, theils in Abstractionen, die nicht selten eine etwas ungewisse Stellung zwischen den Gebieten des Begriffs und der Wirklichkeit einnehmen.

Wesentlich andern Charakters sind die, freilich bis jetzt noch allzu wenig vom vergleichenden Standpunkte aus unternommenen, Untersuchungen im Gebiet der Syntax. Hier ist der sprachliche Stoff nicht nur unmittelbar gegeben, ohne einer auf Hypothesen bauenden Reconstruction zu bedürfen, sondern er nähert sich auch durch eine mehr singuläre Beschaffenheit den sonstigen Objecten philologischer und historischer Induction. Die Art, wie der Redende seine Worte stellt, ist zunächst immer von den besonderen psychologischen Motiven abhängig, die ihn im einzelnen Fall bewegen, und sie kann daher in jeder Sprache innerhalb gewisser, nach der Eigenthümlichkeit der Sprachen allerdings in hohem Grad wechselnder Grenzen

*) Delbrück, a. a. O., S. 3 f.

**) Eine Uebersicht der wichtigsten hierher gehörigen Classificationen giebt Fr. Müller, Grundriss der Sprachwissenschaft, I, S. 63 f. Vgl. ausserdem Max Müller, Vorlesungen, I, S. 137 f., und Steinthal, Charakteristik der hauptsächlichsten Typen des Sprachbaues, S. 327 f.

variiren. Aus diesen einzelnen, durchaus nur der individuellen Interpretation zugänglichen Erscheinungen ergeben sich freilich auch hier mittelst generischer Vergleichung gewisse allgemeine Regeln, die einer ebenso allgemeinen psychologischen Deutung zugänglich sind. Dabei kann aber die letztere keine anderen Gesichtspunkte zur Anwendung bringen, als die sie schon bei der individuellen Interpretation benützt hat. Die Generalisation liefert hier nicht erst die erklärenden Gesetze, von denen aus auch das Einzelne verständlich wird, sondern sie bringt nur die in einer Völkergemeinschaft vorherrschenden psychologischen Motive zum Ausdruck, die an sich ebenso deutlich in irgend einer einzelnen Gedankenäusserung zur Erscheinung gelangen können. Näher noch den sonstigen Formen historischer Untersuchung führt endlich die Geschichte der Wortbedeutungen. Wie sie sich auf das Innerlichste der Sprache bezieht, so arbeitet sie auch am meisten mit psychologischen Hülfsmitteln. Jedes Wort hat seine individuelle Geschichte, durch die es, unterstützt durch die Methoden philologischer Forschung und unter steter Rücksichtnahme auf die historischen Bedingungen des Sprachgeistes, verfolgt werden muss. Das Einzige, was hier der generischen Vergleichung zu thun bleibt, ist eine psychologische Classification der verschiedenen Formen des Bedeutungswandels. Diese ist aber ein Geschäft, welches schon mehr auf dem Boden der Psychologie als auf dem der Sprachwissenschaft selbst liegt, während die individuelle Wortgeschichte nicht nur von der Methodik der Philologie und Geschichte Gebrauch macht, sondern auch mit ihren Resultaten diesen Geisteswissenschaften zu Hülfe kommt. Denn in der Geschichte der Wortbedeutungen reflectirt sich die ganze Geschichte der Cultur und ihrer Erzeugnisse.

### b. Die Mythologie.

Den Gegenstand der Mythologie bilden theils die ursprünglichen Vorstellungen des Völkerbewusstseins über Gott, die Welt und die Vorgänge in der Natur, theils die Veränderungen, welche diese Vorstellungen bis zu dem Zeitpunkte erfahren haben, wo in Folge der sittlichen und intellectuellen Entwicklung religiöse Ideen und wissenschaftliche Begriffe an ihre Stelle getreten sind. Der Mythus ist demnach gleichzeitig die Vorstufe der Religion und der Wissenschaft. Die Stetigkeit aller Entwicklung bringt es aber mit sich, dass nirgends feste Grenzen den Uebergang aus der mythologischen in die ethisch-religiöse und wissenschaftliche Form des Denkens bezeichnen. Früh schon beginnt diese an einzelnen Punkten die Herrschaft des mythologischen Denkens zu durchbrechen, wogegen mannigfache Ausläufer des letzteren in der Gestalt von Symbolen und symbolischen Handlungen oder als Sage und Aberglaube in die spätere Entwicklung hineinragen. Noch in diesen letzten Gestaltungen bewahrt der Mythus die Eigenschaft, dass er, ähnlich der Sprache, fast als ein naturgesetzliches Erzeugniss des menschlichen Bewusstseins erscheint. Trotzdem wird kein

Zweifel daran aufkommen können, dass die Mythologie, ebenso wie die Linguistik, ihrer Aufgabe nach zu den historischen Wissenschaften zählt. Nicht desshalb, weil Mythus und Sage so oft selbst an die Stelle der Geschichte zu treten suchen, sondern weil die Mythologie jene Geschichte des vorwissenschaftlichen Denkens erzählt, die an sich ebenso gut wie die Geschichte der Wissenschaft den Anspruch erheben darf Geschichte zu heissen, und deren Erzeugnisse, wenn auch zum Theil aus anderen Gründen, kein geringeres Anrecht auf unser Interesse besitzen.

Die Untersuchungen der Mythologie scheiden sich zunächst in die Behandlung von zwei Aufgaben. Die erste besteht in der Untersuchung des Zusammenhangs verschiedener Mythenbildungen: hier arbeitet die Mythologie der Geschichte in die Hände, denn die Gemeinschaft der ursprünglichen Vorstellungskreise kann ein ebenso werthvolles Zeugniss für die einstige Stammesgemeinschaft oder für frühen Verkehr der Völker bilden wie die Beziehungen der Sprache. Die zweite Aufgabe geht auf die Bedeutung des Mythus und die Ursachen seiner Veränderungen. Hier kann die Mythologie psychologischer Erwägungen nicht entrathen, und zugleich bildet sie selbst eine der wichtigsten Hülfsquellen für die psychologische Untersuchung der Phantasiethätigkeit. Auf die Lösung beider Aufgaben hat schliesslich die Mythologie den Versuch einer Entwicklungsgeschichte des Mythus zu gründen, der zugleich über die psychologischen Gesetze der Mythenbildung und über die Beziehung derselben zu der ethischen und intellectuellen Entwicklung des Bewusstseins Rechenschaft geben soll. Bei allen diesen Untersuchungen bedient sich die mythologische Forschung der vergleichenden Methode in zum Theil abweichenden Anwendungsformen und mit wechselnder Anlehnung an die Verfahrungsweisen anderer, ihr übergeordneter oder benachbarter Forschungsgebiete.

So stützt sie sich bei der Erledigung ihrer ersten Aufgabe, der Feststellung der ursprünglichen Identität verschiedener räumlich oder zeitlich getrennter Mythenbildungen, mit der sich zuweilen auch der Nachweis der Verschiedenheit scheinbar ähnlicher Formen verbinden kann, vor allem auf die linguistische Methode. Das nächste und in den meisten Fällen zugleich das entscheidendste Merkmal für die Uebereinstimmung der Göttervorstellungen ist die Identität ihrer Namen. So bilden die Thatsachen, dass der Name des Zeus in lautlich verwandter Form in fast allen indogermanischen Sprachen wiederkehrt, oder dass Vesta, Juno und Janus offenbar mit den griechischen Wörtern Hestia, Dione und Zen identisch sind, gewichtige Zeugnisse, dort für die Ursprünglichkeit gewisser arischer Göttergestalten, hier für eine den gräko-italischen Völkern gemeinsame Vorstellungsgruppe. Neben dieser linguistischen kommt dann zum gleichen Zweck noch eine andere Form vergleichender Methode zur Anwendung, die wir die eigentlich philologische nennen können. Wie jene auf die Bezeichnung, so bezieht sich diese auf den Inhalt der mytho-

logischen Vorstellungen, auf Alles was in den Anschauungen über die Bedeutung der Götter, in Gebräuchen, Symbolen und sonstigen Beziehungen auf eine Uebereinstimmung hinweist. Am sichersten ist die letztere natürlich dann bezeugt, wenn die philologische mit der linguistischen Methode zusammentrifft. Aber da die Namengebung mannigfachen verändernden Einflüssen ausgesetzt ist, so kann das Resultat der philologischen Vergleichung allein schon von zwingender Natur sein. So glaubt man z. B. trotz der Namensverschiedenheit Indra und Thunar, Apollon und Mars als ursprünglich identische Göttervorstellungen ansehen zu dürfen*). Die Hauptgefahr bei beiden Methoden besteht in der übertriebenen Werthschätzung oberflächlicher Aehnlichkeiten und in dem Uebersehen negativer Instanzen. So war die herkömmliche Zurückführung der römischen auf die griechische Mythologie zum Theil aus falschen Etymologien und unzureichenden Analogien hervorgegangen, gegenüber denen die neben den späteren Wechselwirkungen fortlebenden Keime altitalischer Göttervorstellungen ganz übersehen wurden.

Grösseren Schwierigkeiten begegnet die zweite Aufgabe, die Feststellung der ursprünglichen Bedeutung des Mythus. Denn diese wird verhüllt durch die späteren Veränderungen der mythologischen Vorstellungen, so dass auf sie nur in ähnlicher Weise zurückgeschlossen werden kann, wie aus den späteren Formen der Sprache auf eine Ursprache. Auch hier bildet die linguistische Methode, die aber in diesem Fall in einer andern Richtung als bei der Mythenvergleichung verwerthet wird, die nächste Hülfe dar. Das erste und in den meisten Fällen das sicherste Merkmal ist die Wortbedeutung. Die Thatsache, dass die indogermanischen Götternamen Naturerscheinungen, wie den Himmel, das Licht, die Morgenröthe, den Donner bedeuten, bildet zweifellos das gewichtigste Zeugniss für die anfängliche Naturvergötterung. Nicht minder werfen sprachliche Bilder, wie die Vergleichung der Morgen- und Abendwolken mit den Heerden röthlicher Kühe, ihr Licht auf die Vorstellungen, welche das nomadisirende Hirtenvolk, auf welches diese Mythologie zurückweist, mit seiner Naturvergötterung verband**). Auch für die Erklärung der weiteren Umgestaltungen des Mythus liefert die linguistische Untersuchung wichtige Hülfsmittel durch die Aufzeigung des Bedeutungswandels der Wörter und durch die Nachweisung des Einflusses, welchen die Wortzeichen auf die Vorstellungen ausüben, ein Einfluss, der so gewaltig ist, dass man zuweilen den Mythus überhaupt auf ein blosses Missverständniss von Wörtern und Bildern zu-

---

*) Beispiele linguistischer Vergleichung siehe bei Max Müller, Ueber die Wissenschaft der Sprache, II, S. 386 f., Beispiele philologischer Vergleichung bei Mannhardt, Germanische Mythen, Berlin 1858, und in Bezug auf das griechisch-römische Gebiet bei W. H. Roscher, Studien zur vergl. Mythologie der Griechen und Römer, Leipzig 1873 u. 75.

**) Vgl. A. Kuhn, Ueber Entwicklungsstufen der Mythenbildung. Abhandl. der Berliner Akad. 1873, S. 123.

rückführen wollte*). So werden die ganz und gar vermenschlichten Gestalten der späteren Mythologie erst möglich, nachdem der Gedanke an die Naturerscheinungen, die man einst in einem Indra, Zeus oder Thunar verkörpert dachte, völlig verschwunden ist. Noch augenfälliger wird dieser Einfluss der Sprache dann, wenn die blosse Klangähnlichkeit von Wörtern, die verschiedene Begriffe bedeuten, neue Vorstellungen wachruft, die mit der ursprünglichen Bedeutung des Mythus völlig unvereinbar sind. So wenn der Naturmythus von der Sonne, welche der Morgenröthe (Dahanâ) nacheilt, durch die Bedeutung »Lorbeerbaum«, welche das griechische Wort Daphne annimmt, in die Legende von Apollon und Daphne übergeht**), oder wenn die Steine, die Deukalion und Pyrrha hinter sich werfen, durch die blosse Wortähnlichkeit von λαός und λᾶας sich in Menschen verwandeln. Aber gerade in solchen secundären Wortdeutungen zeigt doch die mythenbildende Phantasie so deutlich ihre nie rastende Thätigkeit, dass es naturwidrig erscheint anzunehmen, diese Thätigkeit sei in jenen Anfängen der Sprache, in denen die Worte ihre ursprüngliche Bedeutung bewahrt hatten, noch nicht vorhanden gewesen.

Von ähnlicher Anwendung wie bei der Mythenvergleichung ist bei dem Problem der Bedeutungsentwicklung des Mythus die philologische Methode. Sie erstreckt sich niemals auf die Anfänge des Mythus, welche früher sind als alle Denkmäler der Kunst und Literatur. Wohl aber bieten diese die wichtigsten Hülfsquellen dar für die Verfolgung seiner weiteren Entwicklung. Freilich sind hier namentlich die poetischen Schöpfungen insofern von zweideutiger Natur, als es in Folge der nahen Verwandtschaft der poetischen und der mythischen Phantasiethätigkeit häufig zweifelhaft sein kann, bis zu welchem Grade eine Legende von dem Dichter umgestaltet, oder ob sie von ihm selbst geschaffen worden ist. Da aber solche poetische Schöpfungen, wie dies der Einfluss eines Homer und Hesiod zeigt, selbst wieder in den Strom der allgemeinen Mythenentwicklung einmünden können, so wird durch den Nachweis einer derartigen Antheilnahme der Dichtung der Gegenstand noch nicht aus dem Bereich des Mythus entfernt, sondern es entsteht nur die schwierige und manchmal gar nicht zu lösende Aufgabe, die Wechselbeziehungen zwischen Poesie und Mythus im einzelnen festzustellen.

Während so die philologische Forschung mittelst individueller Vergleichung hauptsächlich den einzelnen Gestaltungen der mythologischen Bedeutungsentwicklung nachgeht, sucht neben ihr eine generische Vergleichung unabhängig neben einander hergehender Mythenentwicklungen, unterstützt von psychologischen Erwägungen, theils die aus der Specialuntersuchung gezogenen Schlüsse zu bestätigen, theils die Lücken derselben durch eine wahrscheinliche Interpolation auszufüllen. Hierbei handelt es sich nicht, wie bei der zum Behuf

*) Max Müller, Essays, II, S. 66. Kuhn, a. a. O., S. 137.
**) Max Müller, Essays, II, S. 82 f.

der Abstammungs- und Verwandtschaftsverhältnisse der Mythen vorgenommenen Vergleichung, um eine Verbindung des historisch Zusammengehörigen, sondern um jene unbestimmteren, obgleich nicht minder gesetzmässigen Beziehungen, welche in den übereinstimmenden Eigenschaften der menschlichen Natur ihre Quelle haben. Darum können nun bei dieser Vergleichung nicht bloss die mythologischen Vorstellungen stamm- oder geistesverwandter Völker, sondern unter Umständen selbst die Mythenbildungen der Naturvölker verwerthet werden. Besonders ist letzteres in der Absicht geschehen, aus dem Geisteszustand der niedrigeren Rassen Aufschluss zu gewinnen über die Vergangenheit der Culturvölker. Die vergleichende Untersuchung auf dieser Grundlage führt aber bereits zu dem dritten und letzten Problem der mythologischen Forschung, zu der Frage nach den allgemeinen Gesetzen der Mythenentwicklung.

Gerade diese Frage, die das grösste psychologische Interesse darbietet, begegnet besonderen Schwierigkeiten. Der singuläre Charakter historischer Thatsachen wird zwar überall, wo das menschliche Bewusstsein unter dem Antrieb bestimmter Naturbedingungen handelt, durch die relative Gleichförmigkeit der letzteren einigermassen aufgewogen. Dennoch ist die mythologische Production vermöge der grösseren Freiheit, mit der sich ihre von den individuellen Einflüssen der Kunst und selbst der Philosophie abhängigen Wandlungen vollziehen, dem geschichtlichen Werden verwandter als die Schöpfungen der Sprache. Obgleich daher die Aehnlichkeiten, die sich zwischen unabhängig entstandenen Mythenbildungen darbieten, sowie manche Uebereinstimmungen in den Veränderungen, denen sie unterliegen, das Streben mythologische Gesetze aufzusuchen berechtigt erscheinen lassen, so werden doch objective Vergleichung und psychologische Interpretation höchstens in Bezug auf die allgemeinsten und eben desshalb dürftigsten Züge der Mythenentwicklung zu Ergebnissen führen, denen unbedingte Allgemeingültigkeit zugesprochen werden kann. Hierin ist aber eine Verwandtschaft mit jenen allgemeinsten »historischen Gesetzen«, welche man zuweilen durch Induction zu finden hoffte, nicht zu verkennen. (Vgl. S. 540.) In viel höherem Grade noch als bei der Aufsuchung gemeinsamer Gesetze der Sprachentwicklung kommt hier neben dem Fehler unberechtigter Generalisation das Streben, die Erscheinungen nach vorgefassten Ansichten zu deuten, in störender Weise zur Geltung. Die pessimistische und die optimistische Auffassung der menschlichen Natur hat wohl nirgends eine so grosse Rolle gespielt wie in den der Hypothese einen weiten Spielraum gebenden Anschauungen über den Ursprung der religiösen Vorstellungen, und regelmässig ist dadurch zugleich die einseitige Bevorzugung bestimmter Untersuchungsmethoden gefördert worden. Die pessimistische Mythologie stützt sich zumeist auf die vergleichende Anthropologie. Sie geht von dem Grundsatze aus, dass der Mythus bei den noch jetzt lebenden Wilden seinen ursprünglichen Zustand verhältnissmässig unverändert bewahrt habe, und auf die weiteren Entwicklungsstufen sucht sie dann aus den Spuren zurück-

zuschliessen, welche von jenen Vorstellungen des wilden Zustandes in dem heutigen Bewusstsein der Culturvölker geblieben sind*). Die entgegengesetzte Auffassung dagegen bedient sich der historischen Methode, die an und für sich nur bei den geschichtlich entwickelten Völkern anwendbar ist. Damit verbindet sich leicht die Tendenz, spät entwickelte Vorstellungen schon in die Keime, aus denen sie entsprungen sein mögen, hineinzudeuten, wenn nicht gar, einer leicht verständlichen Neigung des Gemüthes folgend, das Ideal, das die Gegenwart vermissen lässt, in der fernen Vergangenheit unseres Geschlechts zu erblicken. Die Mythologie selbst unterliegt so dem Zauber des Mythus vom goldenen Zeitalter. Es ist leicht zu beweisen, dass diese beiden Richtungen einseitig sind; schwerer ist es zu sagen, wie ihre Fehler vermieden werden sollen. Wie bedenklich es ist, niedere Stufen der Civilisation unbedingt als gleichbedeutend mit den Urzuständen des Menschengeschlechts anzusehen, wurde schon bei Gelegenheit der Verwerthung der anthropologischen Methode für die Psychologie hervorgehoben, und dabei der ungeheure Unterschied der Sprachen der niederen Rassen von den wahrscheinlichen Anfängen der Sprachentwicklung als warnendes Beispiel angeführt. (S. 496.) Nun muss allerdings anerkannt werden, dass die mythologischen Vorstellungen gerade wegen ihrer näheren Beziehungen zu dem geschichtlichen Leben im allgemeinen ein treueres Abbild des unmittelbaren intellectuellen und sittlichen Zustandes eines Volkes sein werden als die Sprache, in der in Folge ihres mehr naturgeschichtlichen Werdens in höherem Masse die geistige Arbeit vergangener Geschlechter nachwirken kann. Von dem Mythus der geschichtslosen Völker werden wir daher immerhin voraussetzen dürfen, dass er der Vorstellungswelt der geschichtslosen Anfänge unserer Culturvölker insoweit verwandt sei, als zwischen den intellectuellen und sittlichen Zuständen Aehnlichkeiten bestehen. Aber wie weit sich diese Aehnlichkeiten erstrecken, dies bleibt doch angesichts der Verschiedenheiten, die wir schon in dem geistigen Leben der heutigen Naturvölker vorfinden, eine schwer zu entscheidende Frage. Insbesondere führt die Vergleichung des Mythologischen selbst zu der Vermuthung, dass zwar gewisse Vorstellungen über die kosmischen Vorgänge und über die das menschliche Schicksal bestimmenden Mächte unter den verschiedensten Verhältnissen in analogen Formen wiederkehren, dass dabei aber doch der ethische Gehalt solcher Vorstellungen ein mannigfach wechselnder sein kann. Dazu kommt, dass wir bei primitiven Völkern, deren Lebensanschauungen sich nicht in Werken der Kunst und Literatur verkörpert haben, häufig auf Beobachtungen und Mittheilungen von höchst zweifelhafter Art angewiesen bleiben. Je weniger hier eine unmittelbare Correctur durch die Thatsachen zu fürchten ist, um so grösseren Einfluss kann die Neigung pessimistischer oder optimistischer Deutung auf die Thatsachen selber gewinnen. Nichts beweist schlagender diesen Einfluss als die gänzlich ab-

*) E. Tylor, Die Anfänge der Cultur, I, S. 280.

weichende Gestalt, welche die nämlichen Dinge bei verschiedenen Forschern annehmen, die noch dazu im wesentlichen aus übereinstimmenden Quellen geschöpft haben. Während die englische Anthropologie die Entwicklung des Mythus im allgemeinen in die Stufen des Fetischismus und Animismus, der polytheistischen Naturvergötterung und des Monotheismus gliedert, wobei sie voraussetzt, dass zwar aus den früheren Stufen Reste in die späteren hineinragen, von diesen dagegen keine Spur in jenen anzutreffen sei, hat Theodor Waitz in seiner »Anthropologie der Naturvölker« auf Grund der nämlichen Schilderungen nachzuweisen gesucht, dass der monotheistische Gedanke schon die frühesten und rohesten Gestaltungen des mythologischen Denkens begleite*), und Max Müller vollends ist geneigt, in der angeblich primitivsten Form des Cultus, in dem so genannten Fetischismus, lediglich ein Product späteren Verfalls zu sehen, ähnlich etwa den zerstörten Formen polynesischer Idiome. Auf Grund der historischen Methode kommt aber Müller ebenfalls zu einem monotheistischen Ausgangspunkt, den er darin angedeutet findet, dass jeder einzelnen der ursprünglichen Göttervorstellungen in Hymnen und Cultushandlungen die Attribute einer höchsten Gottheit zuerkannt werden, eine den Polytheismus mit dem Monotheismus vereinigende Anschauung, welcher der Name »Henotheismus« von ihm beigelegt wird**).

Der Gegensatz dieser Anschauungen ist nicht bloss bezeichnend für den Einfluss anderweitig entstandener ethischer Gedanken auf die Beurtheilung, sondern vielleicht mehr noch zeigt derselbe, wie sehr die Betrachtung der Thatsachen der Hülfe psychologischer Interpretation bedarf, wenn die Klippen willkürlicher Deutung vermieden werden sollen. Eine solche Interpretation darf sich aber nicht auf das Verständniss des Einzelnen beschränken, sondern sie muss versuchen die Entwicklung des mythologischen Bewusstseins begreiflich zu machen. Dieses Ziel wird von den Vertretern der anthropologischen und der historischen Methode in der Regel in entgegengesetzter Weise verfehlt. Die Aufmerksamkeit der Ersteren ist nur der abwärts gekehrten Richtung des mythologischen Denkens zugekehrt: ihr vergleichendes Verfahren gestattet ihnen, in späten Culturentwicklungen mannigfache Reste eines wilden Fetischismus aufzufinden; wie aber daneben sich die vollkommeneren Formen religiöser Anschauung entwickeln konnten, bleibt vollkommen unverständlich. Die Vertreter der historischen Methode anderseits sind geneigt, die letzten Resultate religiöser Entwicklung, manchmal noch in idealisirter Gestalt, in die Anfänge des mythologischen Denkens zurückzuverlegen. Nun kann man alle Thatsachen zugeben, auf Grund deren ein ursprünglicher Monotheismus oder »Henotheismus« construirt worden ist, ohne der Folgerung selbst zuzustimmen.

*) Waitz, Anthropologie der Naturvölker, II, S. 167 f.; III, S. 177 u. a.

**) M. Müller, Vorlesungen über den Ursprung und die Entwicklung der Religion, S. 58 f., 291 f.

So ist z. B. die Erscheinung, dass das Gebet auf den jeweils angerufenen Gott alle denkbaren Prädicate der Macht und Erhabenheit häuft, ein in dem Wunsche der Gottgefälligkeit psychologisch so wohlmotivirter Zug, dass es offenbar gezwungen ist, hierin ein monotheistisches Motiv erblicken zu wollen. Auch erklärt sich die Ausbildung monotheistischer Anschauungen vollkommen zureichend aus der historisch beglaubigten Thatsache, dass eine einzelne Natur- oder Stammesgottheit allmählich gegenüber den andern Göttervorstellungen eine herrschende Bedeutung gewann. Für dieses Herrschendwerden einer Vorstellung bildet dann allerdings wohl die allgemeine Eigenschaft des Bewusstseins, hinter der jeweils erfassten alle andern zurücktreten zu lassen, eine der psychologischen Bedingungen. Daraus entspringt aber noch nicht das Recht einer besonderen mythologischen Anschauungsform.

Derartig einseitige Auffassungen können nur durch eine Verbindung der anthropologischen und der historischen Methode mit einander und mit einer unbefangenen psychologischen Interpretation vermieden werden. Es ist anzuerkennen, dass die auf diesem Wege zu gewinnenden Vorbedingungen für eine allgemeine Entwicklungsgeschichte des mythologischen Bewusstseins noch allzu mangelhaft sind. Der Schwerpunkt der mythologischen Forschung muss daher für jetzt in die ganz und gar mit den Hülfsmitteln historisch-philologischer Methode arbeitende Entwicklungsgeschichte der einzelnen Mythologien der Culturvölker verlegt werden. Sie bieten zugleich den grossen Vorzug, dass bei ihnen allein von einer wirklichen, geschichtlich zu reconstruirenden Entwicklung der mythologischen Vorstellungen die Rede sein kann, während die mittelst der anthropologischen Methode hergestellten Entwicklungsreihen so lange hypothetischer Natur sind, als sie nicht durch die Resultate der historischen Methode bestätigt werden. So ist es die letztere, die auch hier das wichtige Problem der Entwicklung der Geisteserzeugnisse allein auf directem Wege zu lösen im Stande ist.

### c. Die historische Ethik.

Neben Sprache und Mythus bilden Sitte und sittliche Vorstellungen ein drittes wichtiges Gebiet geistiger Entwicklung, dessen Untersuchung die Verbindung philologischer und historischer Methodik voraussetzt, während zugleich in Folge gemeinsamer Naturbedingungen die comparative Methode der Anthropologie wiederum unterstützend eingreift. In allen diesen Beziehungen schliesst sich die historische Ethik der Mythologie an, der sie überdies durch die innigen Beziehungen der ethischen und mythologischen Vorstellungen nahe steht. Auch in der Gliederung der Aufgaben und in den speciellen Methoden und Hülfsmitteln der Untersuchung kommt diese Verwandtschaft zum Ausdruck.

Die nächste und engste Aufgabe bezieht sich hier ebenfalls auf gewisse

ursprünglich gemeinsame Vorstellungen und ihnen entsprechende Normen der Sitte. Die sicherste Hülfe bei der Lösung dieser Aufgabe gewährt wieder der gemeinsame Wortschatz jetzt getrennter Völker. Wie sich aus den übereinstimmenden Götternamen der indogermanischen Stämme ein blasses Bild der Mythologie eines einstigen arischen Urvolkes entwerfen lässt, so liefern uns die gemeinschaftlichen Wörter für ethische Vorstellungen, auf ihre ursprüngliche Bedeutung zurückverfolgt, werthvolle Andeutungen über das sittliche Bewusstsein jener frühen Zeit. Dass das Wort, mit welchem der Arier sich selbst nannte, mit der Bebauung des Bodens zusammenhängt, dass die Grundbedeutung des Königs auf den Vater zurückgeht, dass in manchen indogermanischen Sprachen das Wort für Strafe (poena) von einer Wurzel kommt, welche »reinigen« bedeutet, diese und manche ähnliche Beziehungen werfen ein, wenn auch spärliches, Licht auf ursprüngliche Sittenzustände und sittliche Vorstellungen. Dagegen ist in diesem Fall jene philologische Methode, welche aus dem verwandten Inhalt später entwickelter Vorstellungen auf eine ursprüngliche Gemeinschaft zurückschliesst, von bedenklicherer Anwendung als auf mythologischem Gebiete. Denn unter allen hier besprochenen Geisteserzeugnissen ist die Sprache das beständigste; nach ihr kommt der Mythus, der, wenn seine ursprüngliche Form erloschen ist, in Sagen, Märchen und abergläubischen Vorstellungen lange noch fortleben kann; am vergänglichsten aber ist die Sitte, die, insoweit sie nicht in der Sprache und der mythischen Dichtung anklingt, meist nur in einzelnen unverständlich gewordenen symbolischen Zügen nachzudauern pflegt. Anderseits ist aber zugleich eine Uebereinstimmung der Vorstellungen gerade auf diesem Gebiet am wenigsten beweisend für einen historischen Zusammenhang. Denn hier hat die anthropologische Vergleichung der philologisch-historischen Forschung den guten Dienst geleistet, dass sie zeigte, wie ethische Anschauungen von überraschender Aehnlichkeit unter Bedingungen vorkommen können, unter denen die Annahme einer ursprünglichen Stammeseinheit oder selbst einer Mittheilung durch Verkehr vollständig ausgeschlossen ist, so dass uns nichts anderes übrig bleibt, als derartige Uebereinstimmungen auf gleich wirkende psychologische Motive allgemeinerer Art zurückzuführen. So finden sich nicht nur in den Leichen- und Hochzeitsgebräuchen und in andern Sitten, bei denen die übereinstimmenden Motive meistens leicht begreiflich sind, unter den verschiedensten Nationen ähnliche Züge, sondern selbst den auffallendsten Gewohnheiten, wie gewissen sonderbaren Begrüssungsformen oder dem Männerkindbett, begegnet man gleichzeitig in den entlegensten Theilen der Welt*).

*) Es ist das hauptsächlichste Verdienst der anthropologischen Untersuchungen E. B. Tylor's, die in dessen beiden Werken „Early history of mankind“ (1865) and „Primitive Culture“ (1871) niedergelegt sind, diese Gemeinschaft der Ideen bei historisch völlig unabhängigen Völkern an zahlreichen Beispielen gezeigt zu haben.

Während so die Anthropologie der einseitigen Verwerthung der philologischen Methode einen heilsamen Zügel anlegt, verfällt aber sie selbst in einen ähnlichen Fehler, wenn sie aus den gegenwärtigen Zuständen der so genannten Naturvölker allgemeine Rückschlüsse auf die Anfänge der sittlichen Entwicklung zu machen sucht. Hier gilt lediglich was in Bezug auf die verwandten Fragen der Mythologie und der geistigen Entwicklung überhaupt schon bemerkt worden ist. (S. 496 und 560.) Ganz und gar auf die Hülfsmittel der historisch-philologischen Methode angewiesen bleiben wir vollends bei der Frage nach der Entwicklung der sittlichen Vorstellungen, die freilich noch weniger als die Entwicklung des Mythus bis jetzt Gegenstand selbständiger Untersuchung geworden ist. Darum ist hier wo möglich in noch höherem Grade eine Begrenzung nach den nationalen Schranken der Sitte geboten, durch welche allein der historische Zusammenhang gesichert wird. Eine eigenthümliche Schwierigkeit der Forschung besteht zugleich darin, dass die Quellen für die Erkenntniss des sittlichen Lebens der Völker am verborgensten fliessen. Die Zeugnisse der Sprache liegen offen zu Tage, über den Mythus bieten die Denkmäler der Kunst und Literatur mannigfache Aufschlüsse. Das sittliche Leben verbirgt sich am meisten. Es bildet nicht als solches den Gegenstand von Aufzeichnungen und Darstellungen, sondern muss in mehr indirecter Weise aus seinem Spiegelbild in Dichtung, Geschichtschreibung, Redekunst und Philosophie erschlossen werden*). Diese Quellen sind aber von ungleichem Werthe und bedürfen in verschiedener Weise der kritischen Prüfung. Am unmittelbarsten vielleicht findet das sittliche Leben in einer freilich beschränkten Weise in Gerichtsreden, Verträgen und andern auf das Privatleben bezüglichen Documenten seinen Ausdruck. Ihnen werden sich voraussichtlich in einer späteren Zukunft die Resultate der Bevölkerungsstatistik als eines der werthvollsten Materialien der historischen Ethik anschliessen. Wie in diesen Thatsachen das sittliche Leben im kleinen sich spiegelt, so im grossen in den Ergebnissen der Geschichtschreibung, bei der freilich jene individuelle Kritik nicht zu vernachlässigen ist, welche der Richtung des Historikers und seiner Beeinflussung durch die eigene Zeit Rechnung trägt. Zwischen beiden Quellen stehen die Dichtung und die mehr fragmentarischen Darstellungen des sittlichen Lebens durch die bildende Kunst in der Mitte. Ihr Gebiet erstreckt sich von dem grossen Schauplatz des Mythischen und Geschichtlichen bis zur kleinen Bühne des täglichen Lebens, wobei freilich dort das idealisirende Streben, hier meistens, wie in Komödie und Satire, die absichtliche Uebertreibung der Schwächen und Laster bei der Beurtheilung nicht vernachlässigt werden darf. Verhältnissmässig am geringsten vielleicht ist die Ausbeute, welche die philosophische Literatur

*) Vgl. L. Schmidt, Die Ethik der alten Griechen, Bd. 1, Einleitung. Das Werk selbst ist ein trefflicher erster Versuch einer selbständigen Behandlung der historischen Ethik nach philologischer Methode.

gewährt, auch in den Schriften, welche der Ethik selbst gewidmet sind. So wenig man die Einflüsse verkennen wird, welche die antike Lebensanschauung auf den Platonischen »Staat« ausgeübt hat, so würde es doch völlig unmöglich sein, aus diesem Werk das sittliche Leben der Griechen, wie es wirklich beschaffen war, zu erschliessen. Denn mehr noch als die Dichtung will die philosophische Ethik ein Ideal des sittlichen Lebens gestalten, und sie ist dabei nicht beengt durch einen überkommenen Stoff; wohl aber hat auf ihre Erzeugnisse die individuelle Richtung des Philosophen den massgebendsten Einfluss, und diese wird zwar niemals den Wirkungen der Zeit und Umgebung ganz sich entziehen, sie wird aber doch um so freier sich gestalten können, je bedeutender der Schöpfer eines ethischen Systems ist.

Die Aufgaben der historischen Ethik sind die letzten und schwierigsten unter den historischen Problemen überhaupt; doch sie sind von um so grösserer Wichtigkeit, nicht bloss durch das Interesse, das ihnen um ihrer selbst willen und wegen ihrer Bedeutung für das Verständniss der Geschichte zukommt, sondern auch weil sie in nächster Beziehung stehen zu den Problemen derjenigen Geisteswissenschaften, welche, auf der Grundlage der historischen Forschung sich erhebend, die menschliche Gesellschaft in ihrem gegenwärtigen Zustande zu ihrem Objecte haben. Den Mittelpunkt dieser Gesellschaftswissenschaften bildet die sociale Ethik, die ebenso auf der historischen Ethik ruht, wie Sitte, Recht und sociale Verkehrsformen geschichtlich geworden sind und fortdauernd die Bedingungen zur weiteren geschichtlichen Entwicklung in sich tragen.

---

## Drittes Capitel.

## Die Logik der Gesellschaftswissenschaften.

### 1. Die allgemeinen Gesellschaftswissenschaften.

#### a. Ethnologie und Bevölkerungskunde als allgemeine Gesellschaftswissenschaften.

Die menschliche Gesellschaft ist eine historisch gewordene, und sie steht niemals still in dem Fluss geschichtlicher Entwicklung. Nichts desto weniger ist die Wissenschaft nicht nur berechtigt, sondern genöthigt, gegebene Zustände der Gesellschaft, die zwischen engeren Zeitgrenzen eingeschlossen sind, als relativ beharrende anzusehen. Die Zeitgrenzen, innerhalb welcher eine solche Abstraction gestattet ist, können aber mannigfach wechseln: so sind sittliche Anschauungen und Rechtsnormen meist

nur einer langsamen Umbildung zugänglich, während sich die Verhältnisse des wirthschaftlichen Verkehrs in schnelleren Schwankungen befinden. Zugleich versteht es sich von selbst, dass jene Voraussetzung immer nur vorübergehend festgehalten werden darf, da an die Untersuchung eines gegebenen Zustandes sofort die Frage nach seiner Entstehung sich anschliesst. Die sociale Wissenschaft kann daher der historischen Forschung so wenig entbehren wie die Physiologie der Entwicklungsgeschichte. Die Beziehungen zwischen Gesellschaftslehre und Geschichte sind aber auch hier wieder wechselseitige. Denn so sehr die Socialwissenschaft für das Verständniss gegebener Zustände die Kenntniss von deren historischem Werden verlangt, ebenso gewiss kann sie sein, dass die Resultate ihrer Untersuchung wiederum die wichtigsten Quellen historischer Forschung sind. Nur die späte Entwicklung einiger der hauptsächlichsten Socialwissenschaften bringt es mit sich, dass bis jetzt der erste dieser Einflüsse fühlbarer geworden ist als der zweite.

Wie in der Ausführung ihrer Arbeiten die Gesellschaftslehre an die Geschichte gebunden ist, so ist auch die Gliederung der Aufgaben in beiden Fällen eine ähnliche. Verschiedene Bedingungen, namentlich der sehr abweichende Entwicklungsgang der beiden grossen Zweige der Geisteswissenschaften, haben jedoch dazu beigetragen, dieses Verhältniss zu verdunkeln. Die Geschichte hat mit der allgemeinsten, die Socialwissenschaft mit der speciellsten Form der Untersuchung begonnen. Dort sind aus der allgemeinen Geschichte, die zunächst nur die nationale Sonderung als Schranke sich auferlegte, erst spät die einzelnen Zweige einer Cultur-, Literatur-, Rechtsgeschichte hervorgegangen. Hier sind die Sondergebiete der Rechtswissenschaft, Politik, Wirthschaftslehre zunächst isolirt entstanden, und erst die neueste Zeit hat es gewagt, dieselben zu der Idee einer allgemeinen Gesellschaftslehre zu vereinigen, die ihr selbständiges Recht hauptsächlich auf die Erwägung gründete, dass jene Einzelgebiete, da sie wesentlich praktischen Motiven ihre Ausbildung verdanken, zahlreiche Erscheinungen innerhalb der menschlichen Gesellschaft unbeachtet lassen, die nicht nur an sich ein wissenschaftliches Interesse beanspruchen, sondern auch auf die politischen, rechtlichen und wirthschaftlichen Formen einen massgebenden Einfluss besitzen. In diesem Sinne sucht daher die allgemeine Gesellschaftslehre eine ähnliche Stellung neben den einzelnen Socialwissenschaften einzunehmen, wie sie etwa der allgemeinen Sprachwissenschaft neben der Grammatik einer einzelnen Sprache oder der allgemeinen Physiologie neben der speciellen Physiologie der Pflanzen und Thiere zukommt.

Während die Gesellschaftslehre mit diesen andern allgemeineren Wissenschaften naturgemäss das Schicksal einer späten Entwicklung theilt, haben aber bei ihr noch besondere Umstände zusammengewirkt, um ihre Aufgabe als eine unsichere und selbst fragwürdige erscheinen zu lassen. Auf der einen Seite hat die Thatsache, dass manche Gebiete des gesellschaftlichen Lebens in den specielleren Socialwissenschaften keine Berücksich-

tigung finden, dahin geführt, dass die neuere Rechtswissenschaft die Gesellschaft als einen eigenen Lebenskreis zwischen das Einzelleben und den Staat einfügte und so die Gesellschaftslehre als einen Zweig der Staatslehre behandelte*). Auf der andern Seite hat die Philosophie, geleitet von humanen und socialen Bestrebungen, die Wechselbeziehung, welche zwischen den gegebenen Zuständen der Gesellschaft und ihrem geschichtlichen Werden vorausgesetzt werden muss, als das Object einer allgemeinen Socialwissenschaft hingestellt, deren Hauptaufgabe eine Theorie der bisherigen geschichtlichen Veränderungen der Gesellschaft und ihrer in der Zukunft zu erwartenden Umwandlungen sein soll. Auf diese Weise ist der eigentliche Inhalt der »Sociologie« August Comte's eine Geschichtsphilosophie, die alle Irrthümer der gewöhnlichen Geschichtsphilosophie theilt und ausserdem den Fehler begeht, dass sie die verschiedenartigen Aufgaben der Gesellschaftslehre und der Geschichte mit einander vermengt**). Da nun das unmittelbare Object der ersteren nur die Gegenwart sein kann, und ihre Anfänge kaum um ein Menschenalter zurückreichen, so ist es klar, dass eine Verwerthung der von ihr gefundenen Thatsachen für die Geschichte voraussichtlich erst im Lauf der Jahrhunderte ein Object wissenschaftlicher Forschung werden kann. So ist es denn auch charakteristisch für diese philosophische Sociologie, dass sie gerade auf diejenigen Methoden, auf welche die Gesellschaftslehre vermöge der Natur ihrer Aufgaben vorzugsweise angewiesen ist, auf die Methoden der Massenbeobachtung völlig Verzicht leistet, um wenig exacte ethnologische und historische Vergleichungen an deren Stelle zu setzen.

Gegenüber derartigen Versuchen, welche die Grenzen der Gesellschaftswissenschaft bald zu eng bald zu weit ziehen, wird es sich nun darum handeln festzustellen, inwieweit vom logischen Gesichtspunkte aus das Bedürfniss einer allgemeinen Behandlung der socialen Probleme anerkannt werden muss. Diese Bedürfnissfrage wird selbstverständlich am sichersten immer durch die thatsächliche Existenz einer mit bestimmten Problemen beschäftigten Wissenschaft beantwortet. Wo aber, wie im vorliegenden Fall, ein Gebiet erst nach seiner sichern Abgrenzung sucht, da wird immerhin auch aus der allgemeinen Richtung der Arbeiten und aus den Forderungen, die von den specielleren Disciplinen her sich ergeben, ein gewisser Schluss gemacht werden können. Hiernach dürften zunächst zwei allgemeine Gesellschaftswissenschaften Anerkennung verlangen, die an zwei wohlberechtigte, auf eigenartige Hülfsmittel und Methoden hinweisende Fragen anknüpfen.

---

*) Vgl. R. v. Mohl, Encyklopädie der Staatswissenschaften, 2. Aufl., S. 34.

**) Herbert Spencer's „Sociologie" zeichnet sich zwar vor dem Unternehmen Comte's durch eine weit umfassendere Verwerthung namentlich ethnologischer Thatsachen aus. Die Aufgabe der Sociologie fasst aber Spencer in durchaus übereinstimmendem Sinne mit Comte auf.

Die erste dieser Fragen bezieht sich auf die Gliederung der menschlichen Gesellschaft in ihrer Gesammtheit. Mit ihr beschäftigt sich eine theils an die naturwissenschaftlichen Gebiete der Geographie und physischen Anthropologie, theils an die Psychologie sich anlehnende Wissenschaft, die Völkerkunde oder Ethnologie. Aus verschiedenen Gründen könnte man versucht sein, der Völkerkunde eine andere Stellung anzuweisen. Da sie sich ebensowohl mit den physischen wie mit den geistigen Eigenschaften des Menschen beschäftigt, so scheint es zunächst fraglich, ob sie nicht mit gleichem Rechte den Naturwissenschaften zuzuzählen sei. Doch wie bei der Abgrenzung der Geisteswissenschaften überhaupt, so entscheidet auch hier das vorwaltende Interesse. Die Ethnologie kann freilich ebenso wenig wie die Psychologie von der physischen Seite des Menschen abstrahiren. Aber diese hat für beide ihre Bedeutung nur darin, dass sie die Trägerin der geistigen Eigenschaften ist. Vom bloss naturwissenschaftlichen Standpunkte aus betrachtet gehört der Mensch in die Zoologie; naturgeschichtlich bilden die Völker unbedeutende Spielarten einiger Hauptrassen. Gerade da wo das zoologische Interesse aufhört, beginnt aber das ethnologische, für das die geringen Unterschiede der nahe verwandten Culturvölker am meisten ins Gewicht fallen. Insofern die Ethnologie die geistigen Charaktere der Völker in ihrer Bedingtheit durch die physischen Einflüsse der Organisation und des Wohnorts und in ihrer Rückwirkung auf die socialen und historischen Erscheinungen betrachtet, schliesst sie sich am nächsten der Psychologie an. Wie diese das Fundament der Geisteswissenschaften überhaupt, so bildet jene die Grundlage der historischen und socialen Wissenschaften. Hierbei bringt es gerade die Allgemeinheit ihrer Aufgabe mit sich, dass sie auch relativ unthätige und vor allem sich selbst ihrer Zusammengehörigkeit durchaus nicht bewusste Glieder der menschlichen Gesellschaft mitberücksichtigt. Ueberdies ist in absolutem Sinne gleichgültig für die Menschheit vielleicht kein noch so verwahrloster und isolirter Stamm; die Geschichte der Völkerwanderungen, der Entdeckungen und der Colonisationen ist erfüllt von den Wirkungen des culturlosen Theiles der Menschheit auf die Culturvölker. Ebenso wenig wie innerhalb eines einzelnen Volkes die Unmündigen ausserhalb der Gesellschaft stehen, ebenso wenig sind die Naturvölker auszuschliessen von der menschlichen Gesellschaft überhaupt. So ist es denn eine merkwürdige Schickung, dass jene universelle Socialwissenschaft, welche die Vertreter der philosophischen Sociologie als ein Desiderat betrachteten, in den Grenzen, innerhalb deren sie überhaupt möglich ist, thatsächlich bereits existirt. Die Ethnologie ist diese universelle Sociologie. Denn eine allgemeine Lehre von der menschlichen Gesellschaft wird sich niemals eine andere Aufgabe stellen können als die, das Ganze der Menschheit in Bezug auf die eigenthümlichen Unterschiede, die sich in ihm durch Naturbedingungen und geistige Eigenschaften entwickelt haben, einer zusammenfassenden Untersuchung zu unterwerfen.

An die Erledigung der ethnologischen Probleme schliesst sich nun eine

zweite Frage an. Sie ist zwar insofern von speciellerem Charakter, als sie von den durch die Ethnologie festgestellten engeren Gesellschaftsgrenzen ausgeht; aber innerhalb dieser Grenzen beschränkt sie sich nicht auf eine einzelne Richtung geistiger Thätigkeit, sondern sie umfasst die Erscheinungen des gesellschaftlichen Lebens in ihrem wechselseitigen Zusammenhang. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich eine noch im Entstehen begriffene Wissenschaft, die Bevölkerungskunde oder Demologie*). Während die Völkerkunde die Menschheit in ihre durch Abstammung und Geschichte bedingten Zweige gliedert, jeden der letzeren aber nach allen Richtungen seines geistigen Lebens schildert, geht die Bevölkerungskunde von einer einzelnen fest begrenzten Gemeinschaft aus, um an ihr zuerst successiv die einzelnen isolirteren Thatsachen für sich zu betrachten und sie sodann einer Prüfung in Bezug auf ihre wechselseitigen Beziehungen zu unterwerfen. In der Regel bezeichnet dabei die ethnologische Einheit, das Volk, das umfassendste Object der Untersuchung; selten nur erstreckt sich die letztere auf einen Complex von Völkern, viel häufiger schreitet sie zu engeren Scheidungen fort, indem sie die Bevölkerungen einzelner Provinzen, Städte, Ortschaften als nächste Objecte der Analyse betrachtet, aus denen nun ebenso allmählich ein Gesammtbild des ganzen Volkes sich aufbaut, wie dieses auf der andern Seite aus der successiven Untersuchung der einzelnen Lebensalter, Geschlechter, Berufskreise, Vermögensstände, Religionsgemeinschaften, Vereine, kurz aus allen den Lebenskreisen gewonnen wird, die, in der mannigfachsten Weise sich über einander lagernd, den Zustand einer socialen Gemeinschaft gestalten.

Es ist selbstverständlich, dass zwischen diesem ganzen Untersuchungsgebiet der Bevölkerungskunde und demjenigen der Völkerkunde zahlreiche Wechselbeziehungen stattfinden. Zunächst setzt die erstere bei der Stellung und vorläufigen Gliederung ihrer Aufgaben die Kenntniss der ethnologischen Thatsachen voraus; anderseits bilden aber ihre Resultate den werthvollsten Stoff für die ethnologische Untersuchung. Auf diese Weise unterstützen sich beide Gebiete gegenseitig durch eine Theilung der Arbeit, bei welcher der Bevölkerungskunde vorzugsweise das analytische, der Völkerkunde das synthetische Verfahren zufällt. Aber auch die erstere arbeitet keineswegs bloss mittelst der Analyse, vielmehr gehört diejenige Synthese, welche die Wechselbeziehungen der einzelnen zuerst isolirt untersuchten Erscheinungen zu bestimmen sucht, noch ganz in ihr eigenstes Gebiet. Da derartige Wechselbeziehungen, denen immer irgend ein Causalverhältniss zu Grunde liegt, an und für sich nur innerhalb einer zusammengehörigen und durch viel-

*) Der Ausdruck Demographie ist wohl zuerst von Engel und dann auch von Rümelin gebraucht worden. Vgl. des Letzteren Reden und Aufsätze, I, S. 261. Das Wort „Sociologie“ vermeide ich theils wegen seiner barbarischen Etymologie, theils um die Verwechslung mit der philosophischen Sociologie im Sinne August Comte's zu vermeiden.

fache Interessen an einander geknüpften Gesellschaft möglich sind, so bleibt hier die Untersuchung durchaus innerhalb der engeren Grenzen, welche der Bevölkerungskunde durch die Natur ihrer Aufgaben gesteckt sind. Diese beschränkende Natur der unserer Untersuchung zugänglichen Causalbeziehungen ist es auch, welche offenbar den Gedanken einer »universellen Gesellschaftslehre«, der für die demologischen Probleme eine ähnliche Allgemeinheit erstrebt, wie sie den ethnologischen zukommt, von vornherein in das Gebiet utopischer Träume verweist.

Da unter den beiden allgemeinen Gesellschaftswissenschaften die Bevölkerungskunde bereits einen specielleren Charakter besitzt, so schliessen die einzelnen Socialwissenschaften zunächst an sie sich an. Aus der gesammten Zahl in einander greifender Culturgebiete, welche die Bevölkerungskunde in ihrem Zusammenhang mit den physischen und geistigen Eigenschaften eines Volkes behandelt, greifen jene Einzelgebiete die besonders bedeutsamen und werthvollen heraus. Trotzdem würde man das Verhältniss dieser Gebiete durchaus falsch auffassen, wenn man etwa der Volkswirthschaftslehre und Rechtswissenschaft bloss die Aufgabe zuweisen wollte, gewisse in den allgemeinen Gesellschaftswissenschaften bereits behandelte Thatsachen und Lehren genauer ins einzelne zu verfolgen und auf das praktische Leben anzuwenden. Dies ist, auch abgesehen von der innigeren Beziehung, in welcher jene einer bestimmten historischen Entwicklung unterworfenen Einzelgebiete zur Geschichte stehen, keineswegs der Fall. Ethnologie und Demologie sind rein empirische Wissenschaften. Ueber die wirthschaftlichen, politischen und rechtlichen Zustände der Völker und der Bevölkerungen kann uns nichts Aufschluss geben als die Erfahrung, mag diese nun auf individuelle Thatsachen oder auf die Massenbeobachtung sich stützen. Dagegen ist die Analyse der wirthschaftlichen Erscheinungen, die Untersuchung der Staats- und Rechtsformen zum Theil ganz unabhängig von dieser Erfahrung, indem ein wichtiges Gebiet derartiger Untersuchungen lediglich auf bestimmte psychologische, ethische und logische Voraussetzungen gegründet ist. Eben darum sind alle jene speciellen Gebiete der Gesellschaftswissenschaft in hoch ausgebildetem Zustande vorhanden gewesen, lange bevor eine allgemeine Gesellschaftslehre existirte. In jedem jener Gebiete giebt es eine abstracte und eine concrete Behandlung der Probleme, von denen die erstere auf die thatsächlichen Zustände der Gesellschaft höchstens insoweit Rücksicht nimmt, als es zur Anpassung der allgemeinen Lehren an die concreten Bedingungen oder zur empirischen Bestätigung und Veranschaulichung der auf abstractem Weg gewonnenen Resultate nützlich scheint. Die allgemeine Gesellschaftslehre dagegen in ihren beiden Zweigen kann unmöglich ein anderes Object als die empirisch gegebenen Zustände der Gesellschaft besitzen, da sowohl die unterscheidenden Eigenschaften der Völker, mit denen sich die Ethnologie beschäftigt, wie die inneren Zustände der Bevölkerungen, welche die Demologie untersucht, selbstverständlich nur der Erfahrung entnommen werden können.

Wenn die philosophische Sociologie sich zuweilen als eine »Statik und Dynamik der Gesellschaft« betrachtete, welche zu den einzelnen Socialwissenschaften in einem ähnlichen Verhältnisse stehe wie die physische Mechanik zu den Naturwissenschaften, so tritt demnach die wirkliche Gesellschaftslehre auch insofern in einen scharfen Gegensatz zu dieser illusorischen Aufgabe, als bei ihr jenes Verhältniss vollständig sich umkehrt: hier ist die allgemeine Disciplin durchaus nur der concreten Wirklichkeit zugewandt, und die theoretische Speculation auf Grund abstracter Begriffspostulate beginnt erst mit der Trennung der Einzelgebiete. Denn diese Trennung selbst beruht schon auf einer Abstraction: der Staat, die Rechtsformen, das wirthschaftliche Leben, sie sind uns niemals isolirt, sondern immer in innigem Zusammenhang mit einander und mit andern gesellschaftlichen Zuständen und Vorgängen gegeben. So gestaltet sich hier ein eigenthümlicher Gegensatz zu den Naturwissenschaften, der mit den allgemeinen Gesetzen des geistigen Lebens auf das tiefste zusammenhängt. Schon die Psychologie ist zwar ebenso sehr grundlegend für die sämmtlichen Geisteswissenschaften wie die Mechanik für die Naturlehre, aber sie ist es durchaus nicht in ähnlichem Sinne: sie stellt nicht abstracte Voraussetzungen auf, die alles concrete Geschehen auf ein ideales Schema zurückführen, sondern sie erleuchtet die Thatsachen der Geschichte und Gesellschaft durch concrete und individuelle Erfahrungen, die eine generelle Bedeutung nun erst durch ihre historischen und socialen Anwendungen empfangen; ebendarum sind Geschichte und Gesellschaftslehre nicht nur Anwendungsgebiete, sondern gleichzeitig auch Hülfsquellen der Psychologie. Ein ähnliches Verhältniss wiederholt sich in anderer Weise zwischen den allgemeinen und den speciellen Gesellschaftswissenschaften. Jene liefern zwar nicht concrete Entwicklungen für die Thatsachen der letzteren, — solche sind immer nur in der Psychologie zu holen, wenn es sich um allgemeingültige Fragen handelt, und in der Geschichte, wenn specielle Entwicklungsbedingungen massgebend werden, — aber sie stellen den Disciplinen, welche die einzelnen Seiten des Gesellschaftslebens einer isolirten und darum zugleich abstracteren Behandlung unterwerfen, eine Fülle einzelner Thatsachen zur Verfügung, welche der Beobachtung der Eigenthümlichkeiten der Völker und ihres socialen Lebens in seinem ganzen Zusammenhange entnommen sind.

### b. Die Methodik der theoretischen Gesellschaftswissenschaften.

Für den socialen Zustand des Menschen sind die natürlichen Bedingungen, die er in sich selbst und in seiner Umgebung vorfindet, zunächst massgebend, und so ist es denn begreiflich, dass die Methodik der Gesellschaftswissenschaften, namentlich der Völkerkunde, nicht nur mit der

vergleichenden Methode der Naturforschung die nächsten Berührungspunkte darbietet, sondern vielfach auch selbst sich noch auf naturwissenschaftlichem Boden bewegt. Erhebt sich doch die Ethnologie auf der Basis der physischen Anthropologie, deren Hülfsmittel sie für die Feststellung der körperlichen Eigenthümlichkeiten der Rassen und Völker verwerthet. Aber schon darin verräth sich ihr abweichender Standpunkt, dass sie bei der Lösung ihrer eigenen Aufgaben historischen und socialen Thatsachen eine eingehende Rücksicht schenken muss. Hierher gehören namentlich die zwei Probleme, in deren Erledigung die wissenschaftliche Mission der Ethnologie besteht, das Problem der Abstammung und der Verwandtschaftsbeziehungen der einzelnen Völker, und das Problem der Veränderung des ethnologischen Charakters durch Natureinflüsse und Culturbedingungen. Beide Aufgaben stehen in nahem Zusammenhange, da die Lösung der ersten nicht selten durch die Momente, mit denen sich die zweite beschäftigt, erschwert oder völlig unmöglich gemacht wird. Desshalb können aber auch schon bei der Behandlung des an sich dem naturhistorischen Gebiet am nächsten stehenden genealogischen Problems historische und philologische Hülfsmittel nicht entbehrt werden. Neben den physischen Eigenschaften bildet die Sprache das hauptsächlichste Zeugniss gemeinsamer Abstammung, und ausser ihr können sogar die Gemeinsamkeit der Kunsterzeugnisse, der Sage und Sitte sowie die historische Tradition in Betracht kommen. Je vielgestaltiger diese Hülfsmittel sind, um so grössere Vorsicht erheischt ihre Benützung. Wie unzulänglich hier die ausschliessliche Verwerthung einer Gruppe von Merkmalen ist, dafür liefern gewisse auf Grund der Kraniometrie unternommene ethnologische Classificationen sowie die aus der Verbreitung gewisser Sagen, wie der Fluthsage, gezogenen Schlüsse warnende Beispiele. Im allgemeinen hat sich aus naheliegenden Gründen die Sprache als dasjenige Merkmal erwiesen, welches bei den Culturvölkern die sichersten Anhaltspunkte liefert, während bei den Naturvölkern den physischen Eigenschaften ein grösseres Gewicht beizumessen ist.

Ungleich schwieriger noch als die genealogische Frage gestaltet sich aber das Problem der ethnologischen Veränderungen. Hier geht zunächst die ethnologische mit der geographischen Untersuchung Hand in Hand, indem sie den Einfluss von Klima, Bodenbeschaffenheit, Oberflächengestaltung und Umgebung auf die physischen und geistigen Eigenschaften der Völker zu ermitteln sucht. Die grosse Schwierigkeit derartiger Untersuchungen liegt darin, dass kein anderer Weg als die Generalisation auf Grund vergleichender Beobachtungen für sie möglich, dass aber die Zahl der Thatsachen, welche der Generalisation zur Verfügung stehen, viel zu klein ist, um so mehr, da nicht selten entgegengesetzte Einflüsse zu der schon gewonnenen Regel Ausnahmen hinzutreten lassen. Hier bleibt dann nichts anderes übrig, als der Schwäche solcher Verallgemeinerungen durch eine psychologische Deduction zu Hülfe zu kommen, welche das Resultat von

vornherein als ein an sich wahrscheinliches erscheinen lässt*). Bei der Untersuchung des Einflusses der Culturbedingungen tritt sodann die Ethnologie in die unmittelbarste Wechselwirkung mit der Geschichte, auf die sie hier ebensowohl mit den Resultaten wie mit den Methoden ihrer Untersuchung angewiesen ist.

Weit charakteristischer haben sich die Methoden der Bevölkerungskunde gestaltet, entsprechend ihrer beschränkteren, der Ermittelung eines gegebenen socialen Zustandes zugekehrten Aufgabe. Sie bedient sich hauptsächlich zweier Methoden, die den allgemeinen Formen der comparativen Methode unterzuordnen sind, dabei aber doch bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten darbieten. Jede derselben knüpft wieder an eine Hauptfrage an: die erste an die Frage nach der Beschaffenheit und den qualitativen Beziehungen der specielleren socialen Verbände, in welche eine Gesellschaft zerfällt; die zweite an die Frage nach den quantitativen Verhältnissen, welche die einzelnen socialen Erscheinungen darbieten.

Die qualitative Methode der Socialwissenschaft ist eine Unterform der individuellen oder specifischen Vergleichung. Dass eine gegebene sociale Gemeinschaft in eine grosse Zahl engerer Verbände zerfällt, die zwischen den Staat als die umfassendste und das Individuum als die engste Einheit sich einschieben und in der mannigfaltigsten Weise über einander greifen, dies ist eine Thatsache, die sich der unmittelbaren Erfahrung aufdrängt, da jeder Einzelne jenen Verbänden theils selbst angehört, theils schon ohne sein Zuthun mit ihnen in Berührung tritt. Die Bevölkerungskunde geht von diesen natürlichen Wahrnehmungen aus und sucht sie durch planmässige Beobachtungen weiter zu führen. Als Material stehen ihr hierbei die individuellen Gesellschaftsäusserungen zu Gebote, in denen sich theils die Eigenschaften der einzelnen socialen Thatsachen, theils die Wechselbeziehungen, in denen sie mit einander stehen, enthüllen. Diese ganze Untersuchung besitzt zunächst einen qualitativen Charakter, oder wo quantitative Verhältnisse sich einmengen, da bleiben dieselben doch von jener unbestimmten Art, wie sie in den gewöhnlichen Urtheilen über die Häufigkeit der Ereignisse, über den grösseren oder geringeren Umfang der einzelnen socialen Verbände und in ähnlichen sich ausspricht. Als Ergebnisse solcher Beobachtungen bleiben bestimmte Abstractionen zurück, wie die Begriffe Volk, Staat und Gesellschaft selbst sie schon darstellen. Diese Abstractionen beziehen sich theils auf die einzelnen Gesellschaftsgruppen: die Familie, den Verein, die Gemeinde, die Religionsgenossenschaft, die Stände und Classen, theils auf die socialen Ereignisse: das Geborenwerden und Sterben, die Gesundheit und Krankheit, die Bewegung der Güter, die Unglücksfälle, das Verbrechen, die Ein- und Auswanderung u. s. w. So gestaltet sich einerseits ein System der Ge-

*) Beispiele siehe bei Fr. Ratzel, Anthropogeographie, Stuttgart 1882, S. 41 f.

sellschaftsbegriffe, anderseits entwickeln sich allgemeine Vorstellungen über die Veränderungen der socialen Zustände, über die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung derselben, für welche die Anschauungen der Mechanik, wie sie in dem von Quetelet gebrauchten Namen einer »socialen Physik« Ausdruck gefunden haben, immerhin eine gewisse Analogie bieten, eine Analogie freilich, die ihre Gültigkeit verliert, sobald man sie über jene äussere Unterscheidung von Gleichgewicht und Bewegung hinaus auf die zu Grunde liegenden Begriffe oder den Charakter der hier geltenden Gesetze auszudehnen sucht.

Die beiden Begriffsformen, deren Abstraction die quantitative Vergleichung veranlasst, führen theils auf psychologische, theils auf historische Erklärungsgründe zurück. Unter ihnen besitzen die ersteren einen allgemeingültigen Charakter, sie entspringen aus allgemein menschlichen Bedürfnissen und Neigungen; die letzteren schliessen zwar, wie das Geschichtliche überhaupt, psychologische Motive nicht aus, sie fordern aber deren Anwendung unter den singulären Bedingungen, wie sie bei der Entwicklung einer jeden einzelnen socialen Gemeinschaft wirksam gewesen sind. Zugleich fordert die vergleichende Betrachtung der socialen Systeme und Zustände eine ethische Beurtheilung heraus. Durch die Vereinigung dieser Momente vermag die Gesellschaftslehre schon auf dem Boden qualitativer Untersuchung, ohne irgendwie von der quantitativen Methode Gebrauch zu machen, den Charakter eines wissenschaftlichen Systems zu gewinnen, wie dies manche neuere Darstellungen lehren, in denen dann entweder der historische oder der ethische Gesichtspunkt überwiegt*).

Als eine Nebenform der qualitativen Methode kann die in einzelnen Anwendungen sehr alte, erst in neuerer Zeit aber planmässig ausgebildete Methode der biologischen Analogien betrachtet werden. Sie geht von der Aehnlichkeit aus, welche zwischen der Gliederung der Gesellschaft und der physischen Organisation des lebenden Körpers besteht, indem sie an den bekannteren und anschaulicheren Eigenschaften der letzteren die analogen Verhältnisse der ersteren zu verdeutlichen sucht. Schäffle, der sich derselben in seinem umfassend angelegten Systeme der Gesellschaftslehre hauptsächlich bediente, hat ausdrücklich betont, dass es sich bei ihr nicht sowohl um eine Erklärung als um eine Veranschaulichung

---

*) So z. B. in Lorenz v. Stein's „Gesellschaftslehre" (Bd. 2 seines Systems der Staatswissenschaft) und in Ihering's „Zweck im Recht", dessen Betrachtungen vielfach über das Gebiet der Rechts- auf das allgemeinere der Gesellschaftslehre übergreifen. Die Statistik und Populationistik, welche Stein im ersten Bande seines Systems vereinigt, sind übrigens dem von uns festgehaltenen allgemeineren Begriff der Gesellschaftslehre ebenfalls zuzurechnen. Der Verf. selbst versteht unter der letzteren bloss die Lehre von den Gesellschaftsclassen, in die er ausserdem die Elemente der socialen Ethik aufnimmt.

der gesellschaftlichen Erscheinungen handeln könne*). Immerhin wird man ihr auch für die Forschung insofern einen heuristischen Werth zuschreiben dürfen, als die biologische Analogie unter Umständen auf bisher unbekannte Beziehungen socialer Thatsachen aufmerksam machen kann. Doch wird selbstverständlich erst der wirkliche Nachweis der Beziehung entscheidend sein, und wo der letztere nicht gelingt, da wird dann umgekehrt das negative Resultat zur Feststellung der wesentlichen Unterschiede zwischen physischer und socialer Organisation mit zu verwerthen sein, Unterschiede, an denen es, wie Schäffle selbst hervorhebt, ebensowenig wie an den Aehnlichkeiten fehlt. Voraussichtlich wird die Methode der biologischen Analogien auch in der Zukunft hauptsächlich als Darstellungsmittel Verwendung finden, wo sie geeignet ist, derjenigen Anschauung Ausdruck zu geben, welche auf den Zusammenhang der im Staate vereinigten Gesellschaftssysteme Werth legt, während jene Ansichten, die in der Politik oder Wirthschaftslehre dem individuellen Interesse den Vorzug einräumen, geflissentlich derartigen Vergleichungen aus dem Wege gehen.

Die quantitative Methode der Socialwissenschaft setzt die Ergebnisse der qualitativen voraus. Ausgehend von der durch jene gewonnenen Unterscheidung der Gesellschaftsgruppen und der hauptsächlichsten Classen socialer Ereignisse sucht sie für beide durch eine möglichst exacte Sammlung von Beobachtungen numerische Werthe zu gewinnen, in welchen ein Mass für den Umfang der Gesellschaftsgruppen und für die Häufigkeit der socialen Ereignisse enthalten ist. Diese numerische Auswerthung wird vielfach als die Aufgabe einer besonderen Wissenschaft, der Statistik, betrachtet. In diesem Sinne genommen bezeichnet jedoch der Name »Statistik« kein selbständiges Wissenschaftsgebiet, sondern nur eine Methode, die immer neben andern Methoden, namentlich neben und nach der qualitativen Vergleichung, angewandt werden muss. Wollte man, im Anschlusse an die ursprüngliche Bedeutung des Wortes**), die Statistik allgemein als »Staatskunde« definiren, so würde man sich damit von dem nun einmal stehend gewordenen Sprachgebrauch allzuweit entfernen, nach welchem der Ausdruck »statistische Methode« eine allgemeinere, von dem Anwendungsgebiet unabhängige Bedeutung angenommen hat, während das Wort »Statistik« speciell die quantitative Ermittelung der Thatsachen im Gebiet der Bevölkerungskunde bezeichnet. Die eigentliche Bedeutung der statistischen Methode liegt hiernach darin, dass sie quantitative Massenbeobachtung ist. Zu einer solchen werden wir aber überall da genöthigt, wo es sich um die Untersuchung complexer Erscheinungen handelt, bei denen eine Regelmässigkeit erst hervortritt, sobald wir eine grössere Zahl einzelner Fälle zu einem Gesammt- oder Durchschnittswerthe vereinigen. Es

*) Schäffle, Bau und Leben des socialen Körpers, I, S. 53 f.; IV, S. 505 f. Vgl. auch die zweite Aufl. des nämlichen Werkes, I, S. 8.

**) Vgl. Wappäus, Allgemeine Bevölkerungsstatistik, II, S. 549 f.

liegt auf der Hand, dass die socialen Thatsachen vorzugsweise zu diesen Erscheinungen gehören. Zugleich ist es augenfällig, dass die Regelmässigkeiten, welche sich als die Resultate solcher numerischer Massenbeobachtungen ergeben, unmittelbar über die causalen Beziehungen der Erscheinungen noch gar keine Aufschlüsse enthalten, und dass sie daher jedenfalls nicht in demjenigen Sinne als Gesetze bezeichnet werden können, in welchem wir auf die allgemeinsten causalen Beziehungen der physikalischen oder psychologischen Erfahrung diesen Begriff anwenden. Wenn man aber den Ausdruck »Gesetze« für die statistischen Regelmässigkeiten überhaupt verworfen hat*), so ist dagegen zu bedenken, dass schon auf naturwissenschaftlichem Gebiete die Nöthigung entstanden ist, neben den causalen oder eigentlichen Naturgesetzen empirische Gesetze zu unterscheiden, bei denen lediglich eine functionelle Beziehung zwischen zwei Thatsachen vorliegt, ohne dass jedoch diese Beziehung als eine causale anzusprechen wäre; so z. B. wenn man die Wärmeleitung in einem Stabe durch eine functionelle Beziehung zwischen Temperatur und Länge darstellt. (Vgl. S. 172.) Ganz im selben Sinne haben nun die statistischen Regelmässigkeiten das Recht, empirische Gesetze genannt zu werden. Auch bei ihnen findet im allgemeinen eine functionelle Beziehung zwischen zwei Grössen statt, von denen die eine durch eine bestimmte Theilung des Raumes oder der Zeit, die andere durch die numerische Auswerthung gewisser socialer Ereignisse gewonnen wird. So erscheint bei der Bestimmung der Sterblichkeitsziffer für die verschiedenen Bezirke eines Landes die erstere als Function des Raumes, wogegen sie bei der Untersuchung ihrer Verschiedenheiten während der einzelnen Jahresmonate als Function der Zeit auftritt. Auf diese Weise werden in den empirischen Gesetzen der Statistik gerade so wie in denjenigen der Physik an Stelle des einen Gliedes der causalen Factoren eines eigentlichen Naturgesetzes in der Regel abstracte Raum- oder Zeitgrössen eingeführt, deren Wahl nach den jeweils vorhandenen Bedingungen sich richtet. Von den empirischen Naturgesetzen findet in dieser Hinsicht nur die in den Verhältnissen der Massenbeobachtung begründete an und für sich unerhebliche Abweichung statt, dass hier weniger als auf physikalischem Gebiet an eine wirklich stetige Abstufung der Veränderlichen des Raumes und der Zeit gedacht werden kann, sondern dass stets ein sprungweiser Uebergang zwischen benachbarten Raum- und Zeitgebieten erforderlich ist. Dabei können zugleich, namentlich wenn geographische Bezirke als die Urveränderlichen auftreten, die Bedingungen solche sein, dass auch für die zu Grunde liegende Beziehung selbst keinerlei Stetigkeit vorausgesetzt wird. Noch mehr ist dies der Fall, wenn die statistische Methode, wozu sie von bestimmten Gesichtspunkten aus genöthigt ist, andere als räumliche oder zeitliche Grössen als Urveränderliche ihrer empirischen Functionen einführt,

---

*) Vgl. Rümelin, Reden und Aufsätze, I, S. 18 f.

wenn sie also z. B. die Mortalität der Gewerbe, die Vertheilung der Verbrechen nach dem Berufsstand numerisch zu bestimmen sucht. Hier, wo eine discontinuirliche Aenderung der beiden Variabeln eintritt, und wo also nicht einmal mehr der mathematische Begriff der Function anwendbar ist, hat jedenfalls der Begriff eines empirischen Gesetzes die äusserste für ihn mögliche Grenze erreicht. Trotzdem werden wir denselben, so lange überhaupt eine Abhängigkeit zwischen zwei numerisch veränderlichen Werthen vorliegt, um so mehr noch statuiren dürfen, als eine scharfe Grenze zwischen solchen an sich discontinuirlichen und den stetig vorauszusetzenden Veränderungen kaum zu ziehen ist, auch der Charakter der Regelmässigkeiten in beiden Fällen im wesentlichen der nämliche bleibt. Ja die Regelmässigkeiten der zweiten Art weisen meist viel unmittelbarer auf bestimmte causale Beziehungen hin, als jene der ersten, bei denen die socialen Massenerscheinungen bloss als Functionen des Raumes oder der Zeit auftreten. Nur ein einziger Fall ist denkbar, auf den selbst in dieser weitesten Fassung der Begriff eines empirischen Gesetzes absolut unanwendbar bliebe. Er würde dann vorliegen, wenn eine statistische Thatsache ganz isolirt, ohne Zusammenhang mit andern Thatsachen gleicher oder ähnlicher Art gegeben wäre. Derartige isolirte Thatsachen kommen aber, seit die Statistik in methodischer Weise geübt wird, kaum mehr vor. Höchstens könnte das so genannte »Gesetz der grossen Zahlen« selbst hierher gerechnet werden, welches die allgemeine Beobachtung ausdrückt, dass die Massenerscheinungen eine numerische Regelmässigkeit zeigen, und welches darum die Bedeutung einer Abstraction, nicht aber die eines Gesetzes besitzt.

Die empirischen Gesetze weisen, wie überall, so auch im Gebiet der socialen Massenerscheinungen auf causale Gesetze zurück. In der naturwissenschaftlichen Forschung bilden die empirischen Gesetze ein wichtiges Hülfsmittel zur Auffindung der Ursachen, wenn auch nicht das einzige, da schon in der Physik die Deduction aus allgemeinen Voraussetzungen zum Theil unabhängig vollzogen wird und die empirischen Regelmässigkeiten erst nachträglich zur Bestätigung der Theorie Verwendung finden. Von ähnlicher Art, nur abweichend meistens durch den minder exacten Charakter der vorausgehenden Deductionen, ist nun die Rolle, die den empirischen Gesetzen der Socialwissenschaft zukommt. Insoweit dieselben überhaupt einer causalen Deutung zugänglich sind, ist diese niemals aus ihnen selbst zu gewinnen, sondern aus den psychologischen, historischen und, wenn es sich um die physische Seite des Menschen handelt, aus den physiologischen und physikalischen Thatsachen, welche theils die allgemeingültigen, theils die für einen bestimmten Zeitpunkt massgebenden Erklärungsgründe für das Dasein des Menschen in der Gesellschaft enthalten. Wenn z. B. die Statistik zeigt, dass die Eheschliessungen zunehmen, sobald die Getreidepreise sinken, oder dass sich der Baarvorrath an Metallgeld zu vermindern pflegt, wenn der Zinsfuss in einem Lande abnimmt, während

er in den umgebenden Ländern unverändert bleibt, so sind die psychologischen Thatsachen, welche diese Gesetze erklären, lange vor ihrer statistischen Nachweisung bekannt gewesen, und schwerlich wäre man zu der letzteren gelangt, wenn nicht die geschichtliche Erfahrung vielfach schon auf jene causalen Beziehungen aufmerksam geworden wäre. So kann man denn wohl mit Grund bezweifeln, ob es überhaupt ein einziges causales Gesetz giebt, welches durch die sociale Statistik direct aufgefunden wurde. Höchstens kann dieselbe auf ursächliche Beziehungen aufmerksam machen, deren eigentliche Auffindung sie dann der Psychologie und Geschichte überlassen muss. In den allermeisten Fällen ist aber jedenfalls das Verhältniss das umgekehrte: ein Gesetz ist qualitativ längst bekannt oder aus den allgemeinen Eigenschaften der menschlichen Natur erschlossen, und die Massenbeobachtung liefert nur die numerische Bestätigung. Wo nicht in dieser Weise vorausgehend oder mindestens nachfolgend die psychologische und historische Interpretation sich mit der statistischen Untersuchung verbindet, da behalten die von der letzteren gefundenen Regelmässigkeiten stets den Charakter empirischer Gesetze, d. h. sie stellen Beziehungen fest zwischen Erscheinungen, die an sich durchaus nicht in unmittelbarer causaler Verbindung stehen. Es entspricht theils dem jugendlichen Zustand der socialen Wissenschaft, theils der Schwierigkeit ihrer Aufgaben, dass die meisten ihrer Gesetze von dieser Art sind. Nur die wirthschaftlichen Gesetze bilden in dieser Beziehung eine Ausnahme. Die verhältnissmässig exacte Ausbildung der abstracten Wirthschaftstheorie hat es gestattet, dass dieselbe der Statistik mit fest bestimmten Voraussetzungen gegenübertrat. Freilich bringt es aber zugleich die Natur dieser Voraussetzungen mit sich, dass die statistischen Gesetze, die aus der concreten Wirklichkeit geschöpft sind, meistens nicht unmittelbar zur Messung der wirthschaftlichen Kräfte selbst dienen können, ja dass manchmal in Folge des Einflusses andersartiger Motive die Beobachtung mit der abstracten Theorie nicht übereinstimmt. Für die eigentliche Bevölkerungskunde, von welcher sich die Wirthschaftslehre aus den angedeuteten theoretischen sowie aus praktischen Gründen als besondere Disciplin abgezweigt hat, besteht der Werth der numerischen Regelmässigkeiten der socialen Erscheinungen unmittelbar viel weniger in der Aufhellung ursächlicher Beziehungen als in der eindringenden Erkenntniss des physischen und moralischen Zustandes der Bevölkerungen. Insofern aber für die Erklärung jener Veränderungen, in welchen das geschichtliche Leben der Völker besteht, die Erkenntniss ihres Zustandes ein wesentliches Hülfsmittel ist, während hinwiederum gegebene Zustände zum Theil in geschichtlichen Bedingungen ihre Erklärung finden, werden hier mehr und mehr die empirischen Gesetze der Socialwissenschaft ein werthvolles Material abgeben für das causale Verständniss der Geschichte. Diese muss sich dann ihrerseits mit allen den Wissenschaften verbinden, welche die Eigenschaften des Menschen berühren, also nächst der Psychologie insbesondere mit der Erd-

und Völkerkunde, um die in den statistischen Thatsachen zum Ausdruck gelangenden Zustände einer gegebenen Bevölkerung allmählich einer causalen Interpretation zugänglich zu machen. Dabei ist es aber ein Irrthum, wenn man meint, desshalb, weil die statistischen Thatsachen selbst eine annähernd exacte Form besitzen, müsse nun auch jene Interpretation zu einer solchen führen. Schon in den schwierigeren Gebieten der Naturforschung, wie der Meteorologie oder Biologie, bieten sich vielfach Erscheinungen dar, die zwar selbst durchaus exacte Massbestimmungen zulassen, deren causale Erklärung aber, auch wenn sie möglich ist, nur einen qualitativen Charakter besitzen kann. Wir vermögen z. B. aufs genaueste die an einem gegebenen Ort bestehenden Verhältnisse von Luftdruck, Temperatur, Windrichtung u. dergl. zu bestimmen, ohne an eine numerische Auswerthung der Bedingungen denken zu können. Noch mehr wird voraussichtlich die Erklärung der statistischen Thatsachen stets eine qualitative bleiben, nicht bloss in Folge der Beschaffenheit der Wissenschaften, auf welche die Bevölkerungskunde sich stützen muss, sondern auch in Folge des eigenthümlichen Verfahrens der Abstraction und Generalisation, dessen sie sich zum Behuf der Aufstellung ihrer empirischen Gesetze bedient. Causale Gesetze von exactem Charakter lassen sich überall nur dann gewinnen, wenn die numerisch festgestellten Wirkungen einzelne Thatsachen sind, zu denen nun andere einzelne Thatsachen als numerisch festzustellende Ursachen gefunden werden können. Nun besitzen aber die Thatsachen der statistischen Massenbeobachtung niemals diese Beschaffenheit. Die Statistik verwendet grosse Zahlen, nicht um die mehr oder minder erheblichen Abweichungen einzelner Beobachtungen, deren jede aber immerhin schon das ganze gesuchte Gesetz enthält, zu finden, sondern weil bei ihrem Untersuchungsobject das Gesetz überhaupt sich nur auf eine grosse Zahl einzelner Thatsachen bezieht. Ueber die normale Lebensdauer des Menschen, die durchschnittliche Zahl der Geburten, Todesfälle, Heirathen oder Verbrechen in einer Bevölkerung lehrt die Beobachtung des einzelnen Menschen schlechterdings gar nichts, und das empirische Gesetz, das sich hier bei der Massenbeobachtung herausstellt, ist erst das Gesammtresultat einer ungeheuren Menge einzelner causaler Bedingungen, die sämmtlich von einander verschieden sein können. Darum können auch irgend welche Fragen, die sich auf das Individuum als solches beziehen, unmöglich durch die Massenbeobachtung entschieden werden. Die Thatsache, dass für einen vierzigjährigen Mann die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit besteht, zehn weitere Jahre zu leben, kann massgebend sein für eine Lebensversicherungsgesellschaft, die es bei ihren Berechnungen nur mit Massen zu thun hat, nicht aber für den Einzelnen selbst. Niemand wird nach den Resultaten der Verbrecherstatistik die Neigung eines bestimmten Individuums zu einzelnen Formen der Gesetzesübertretung bemessen wollen. Wenn die Statistik trotzdem nicht selten ihre Abstractionen auf das Individuum bezieht, indem sie die durchschnittliche Körper-

grösse, Lebensdauer, Vermögenslage desselben innerhalb eines bestimmten Bevölkerungskreises angiebt, so ist dieser »mittlere Mensch« eine Abstraction, deren Bedeutung nur darin besteht, dass sie am einfachsten eine Vergleichung des Zustandes verschiedener Bevölkerungen ermöglicht, wobei freilich diese Vergleichung eine sehr unvollkommene bleibt, wenn nicht mindestens ausserdem ähnliche Zahlwerthe für die Grösse der Schwankungen sowie für die Maxima und Minima einer Beobachtungsreihe angegeben werden. Während aber bei der Ermittelung physikalischer Gesetze diese letzteren Zahlwerthe in der Regel nur ein Mass für die Genauigkeit der Beobachtung abgeben, bilden sie hier integrirende Bestandtheile des Gesetzes selbst.

Unter Berücksichtigung dieser wesentlichen Differenzpunkte, welche übrigens in andern Gebieten, die sich der Massenbeobachtung bedienen, wie z. B. in der Meteorologie und medicinischen Aetiologie, in ähnlicher Weise wiederkehren, ist die quantitative Untersuchung der socialen Erscheinungen lediglich eine Anwendung der generischen Vergleichungsmethode. Zunächst scheidet sich hierbei das statistische Verfahren deutlich in drei Stadien: in ein erstes, welches der Herbeischaffung des Materials bestimmt ist, in ein zweites, welchem die Ordnung dieses Materials und die Ermittelung der Durchschnittswerthe und der für die nähere Beurtheilung charakteristischen sonstigen Grössen, wie der Maxima und Minima, der Oscillationszahlen, zufällt, und endlich in ein drittes, welches sich mit der Combination der Einzelergebnisse beschäftigt, um hierdurch zur Aufstellung bestimmter empirischer Gesetze zu gelangen. Diese Combination ist aber wieder in zwei verschiedenen Formen möglich. Bei der ersten beschränkt sie sich auf die Verbindung von Zahlen, die zu einer und derselben Thatsachenreihe gehören, die aber nach räumlichen oder zeitlichen Gruppen oder nach beiden zugleich geordnet werden: hier sind die resultirenden Gesetze den im engeren Sinne so genannten empirischen Gesetzen der Physik analog, wo ebenfalls Raum und Zeit die Urveränderlichen der Functionen bilden; der Ausdruck eines solchen Gesetzes enthält unmittelbar keinen Hinweis auf etwaige causale Beziehungen. Bei der zweiten Form dagegen werden zwei neben oder unabhängig von einander ermittelte Thatsachenreihen, die innerhalb der nämlichen räumlichen und zeitlichen Grenzen gegeben sind, zu einander in Beziehung gesetzt. Hier weisen correspondirende Veränderungen, sobald sie mit einer gewissen Regelmässigkeit auftreten, unmittelbar auf causale Beziehungen hin, in welchen die betreffenden Erscheinungen entweder zu einander oder zu einer und derselben dritten Reihe von Thatsachen stehen. Die Herstellung der causalen Verbindung selbst muss aber dann, wie schon oben bemerkt, stets auf andere Hülfsquellen zurückgreifen, die theils der Psychologie, theils der Geschichte angehören.

Indem die statistische Massenbeobachtung auf diese Weise aus einer complexen Erscheinungssumme einzelne Thatsachenreihen herausgreift, wird sie von Beobachtungen und Abstractionen geleitet, welche der qualita-

tiven Untersuchung der Socialerscheinungen angehören. Die hierauf folgende Verwerthung der Beobachtungen ist den nämlichen Regeln unterworfen, die überall da gelten, wo es sich um die Ermittelung von Durchschnittswerthen und ihren Schwankungen sowie von Verhältnisszahlen handelt, welche die relative Häufigkeit von Thatsachen messen sollen. In allen diesen Beziehungen sind die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie massgebend, deren Anpassungen an den vorliegenden Fall sich leicht aus den oben geltend gemachten allgemeinen Gesichtspunkten ergeben*). Neben den arithmetischen Methoden spielen hier ausserdem geometrische Darstellungen der aufgefundenen empirischen Gesetze als Hülfsmittel der Veranschaulichung und bis zu einem gewissen Grade auch bei der Auffindung regelmässiger Beziehungen eine nicht unwichtige Rolle. Der specifische Charakter des statistischen Verfahrens findet bei ihnen seinen Ausdruck darin, dass nicht immer einfache Curven, bei denen die Zeit oder der Raum als lineare Abscissen dienen, die zweckmässigsten Hülfsmittel sind, sondern dass man sich häufig veranlasst findet, den linearen Ordinaten Flächen, am häufigsten Rechtecke, zu substituiren, deren Inhalt dem numerischen Durchschnittswerth der betreffenden Thatsache entspricht**). Denn in der Regel beziehen sich die Durchschnittswerthe auf ein ausgedehntes Zeit- oder Raumgebiet, nicht auf einen blossen Zeit- oder Raumpunkt. Ausserdem wird auf diese Weise eine anschaulichere Versinnlichung von Durchschnittswerthen verschiedener Thatsachen, die in Relation zu einander stehen, möglich. In noch andern Fällen erscheint endlich die einfache cartographische Darstellung, die sich verschiedener Färbungen, Schraffirungen und anderer Zeichen zur Hervorhebung der räumlichen Vertheilung bestimmter Thatsachen bedient, als das zweckmässigste Hülfsmittel. Indem diese Methoden im allgemeinen der Uebertragung in die analytische Functionsform sich gänzlich entziehen, zeigen sie zugleich augenscheinlich, dass in vielen Fällen die Aufstellung eines geeigneten abstracten mathematischen Ausdrucks für die empirischen Gesetze der Massenerscheinungen unmöglich oder mindestens zwecklos sein würde.

### c. Die sociale Ethik.

Die Untersuchung der concreten socialen Thatsachen, in welchen Ethnologie und Bevölkerungskunde ihre Aufgabe finden, leitet unvermeidlich zu der Frage über, wie der Bestand der menschlichen Gesellschaft im ganzen oder in einem gegebenen Theile beschaffen sein müsse, um den geistigen Eigenschaften des Menschen und der aus diesen Eigenschaften abgeleiteten

*) Vgl. W. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. Br. 1877, S. 13 f.

**) Vgl. G. Mayr, Die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben. München 1877, S. 70 f.

sittlichen Bestimmung desselben zu entsprechen. Bei dieser Frage handelt es sich nicht mehr um ein Sein, sondern um ein Sollen. Mit ihr wird daher der Boden einer socialen Ethik betreten, welche jenen beiden theoretischen Gebieten der allgemeinen Gesellschaftslehre als praktischer Zweig hinzugefügt werden kann. Indem sie unter den socialen Thatsachen die ethisch bedeutsamen aussucht, um sie nicht nur einer sittlichen Werthbestimmung zu unterwerfen, sondern auch Regeln des socialen Daseins an sie zu knüpfen, die von dem Boden der Wirklichkeit weit sich entfernen können, bereitet in ihr jene abstracte Behandlung der Probleme sich vor, welche dann in den allgemeinen Theilen der speciellen Socialwissenschaften weitergeführt wird. Die sociale Ethik scheidet sich aber von diesen Einzelgebieten theils durch ihre umfassendere Berücksichtigung der gesammten Beziehungen des socialen Lebens, theils durch die strengere Durchführung der ethischen Werthbestimmung, da sie nicht in gleicher Weise mit den mannigfachen Unzulänglichkeiten des realen Lebens zu rechnen hat, wie alle die Wissenschaften, die sich auf den äusseren Verkehr und die äussere Organisation der Gesellschaft beziehen. Immerhin wird anzuerkennen sein, dass auch dieser Verkehr und diese Organisation von ethischen Forderungen aus ihre Richtung empfangen. So tritt daher gerade den speciellen Gesellschaftswissenschaften, deren Entstehung grossentheils in einem ethischen Interesse wurzelt, die sociale Ethik als die allgemeinere und zugleich als die normgebende Wissenschaft gegenüber. Auch in diesem Verhältniss liegt wieder ein eigenthümlicher Gegensatz zu den Naturwissenschaften. In ihnen besitzen die praktischen Gebiete immer zugleich den concretesten Charakter. In der Gesellschaftslehre sind dagegen die theoretischen Zweige am meisten der concreten Wirklichkeit zugekehrt, die praktischen abstrahiren nicht nur von manchen realen Thatsachen in Folge der überwiegenden Bedeutung, die sie einzelnen unter ihnen bemessen, sondern sie stellen sogar abstracte Forderungen auf, die sich nirgends in der Vergangenheit oder Gegenwart verwirklicht finden, und mit denen sie sich darum an die Zukunft wenden. So gestaltet sich was für die theoretische Gesellschaftslehre ein unmögliches Beginnen, für die praktische zur Pflicht. Der tiefere Grund jener Richtung auf die Zukunft liegt aber darin, dass das eigentliche Object der Ethik überhaupt nicht das Handeln als äusseres Geschehen, sondern der menschliche Wille ist, der hinter diesem Handeln steht, und dessen Motiven die Ethik nicht bloss untersuchend und erkennend sondern normgebend gegenübersteht. Freilich darf dabei nicht übersehen werden, dass die Normen des Willens zugleich zu den psychologischen Gesetzen der menschlichen Natur gehören, vor andern Gesetzen nur durch die Werthbestimmung ausgezeichnet, die ihnen anhaftet, und durch die Hinweisung auf das zukünftige Geschehen, das sich in Folge dieser Werthbestimmung mit ihnen verbindet. Darzuthun, wie und warum solche Gesetze sich zu Normen gestalten müssen, dies eben ist die wissenschaftliche Aufgabe der Ethik, und durch ihre Lösung soll sie das Zwischenglied bilden zwischen der

theoretischen Gesellschaftslehre und den einzelnen Socialwissenschaften, die neben den theoretischen sämmtlich zugleich praktische, ethische Zwecke verfolgen. Die sociale Ethik erfüllt diesen Beruf, indem sie die Erscheinungen der Gesellschaft nach den Normen der individuellen Ethik, welche zugleich die allgemeine ist, beurtheilt und auf ihre Umgestaltung in der durch die letztere angegebenen Richtung hinweist. Auch die sociale Ethik ist daher eine allgemeine oder philosophische Wissenschaft. Ihr Bereich ist nicht ein einzelnes Erfahrungs- oder Abstractionsgebiet, sondern ihre Bestrebungen werden von der allgemeinen Frage nach der sittlichen Bestimmung des Menschen geleitet. Zwar wirft diese Frage ihre Reflexe auf alle einzelnen Geisteswissenschaften; eben desshalb aber kann sie von keiner einzigen unter ihnen erschöpfend beantwortet werden. So ist die Ethik aus ähnlichen Gründen wie die Erkenntnisslehre eine philosophische Wissenschaft, und insbesondere die sociale Ethik ist die wahre Philosophie der Gesellschaft, denn sie ist die einzige, welche möglich ist.

Die Untersuchung geht hier von zwei sich ergänzenden Fragen aus. Die erste bezieht sich auf den wirklich gegebenen, die zweite auf den nach allgemeinen ethischen Normen herbeizuführenden Zustand einer socialen Gemeinschaft. Dort werden die Ergebnisse der Bevölkerungslehre verwerthet, um aus ihnen empirische Zeugnisse für die sittliche Bestimmung des Menschen zu gewinnen; hier werden aus den Grundsätzen der allgemeinen Ethik die Folgerungen entwickelt, welche für die ethische Gesellschaft als solche massgebend sein sollen.

Die Anwendung der theoretischen Gesellschaftslehre auf die Ethik gleicht in manchen Beziehungen, in ihrer Berechtigung wie in ihren Gefahren, der sie ergänzenden ethischen Verwerthung der Geschichte. So gewiss es ist, dass das historische Geschehen eine ethische Seite darbietet, für die Geschichtsbetrachtung die werthvollste, ebenso sicher lässt sich der allgemeinen Gesetzmässigkeit, welche die Massenbeobachtung in Bezug auf den Zustand der Gesellschaft und die Wechselwirkung ihrer Factoren nachweist, die ethische Bedeutung nicht absprechen. Aber diese Bedeutung darf hier wie dort nicht sowohl in den einzelnen Thatsachen und deren Motiven als in den Ideen gesucht werden, welche den Zusammenhang der Thatsachen beherrschen. In letzterer Hinsicht ist nun die vor jeder wissenschaftlichen Reflexion sich aufdrängende Existenz der Gesellschaft an sich die ethisch wichtigste Thatsache, weil sie von vornherein den Einzelnen mit seinem sittlichen Streben auf das Ganze hinweist, dem seine persönlichen Lebenszwecke zumeist auch dann dienen, wenn sie nur individuelle zu sein scheinen. Zu dieser gewaltigen Thatsache bieten die Ergebnisse der Bevölkerungslehre höchstens nachträgliche Belege, die in ihrer Deutung nach dem Eindruck sich richten, den die Thatsache der socialen Gemeinschaft selbst auf den Einzelnen hervorbringt. Die Statistik hat darum gleich bereitwillig individualistischen und socialistischen, naturalistischen und idealistischen Anschauungen als Stütze dienen müssen. So bewährt es sich

auch hier, dass die individuelle Ethik der socialen die Richtung anweist. Das sittliche Bewusstsein bringt der Beurtheilung der Thatsachen den Gesichtspunkt ihres ethischen Werthes entgegen, und dieser Gesichtspunkt ist kein unabänderlich feststehender; seine Schwankungen geben sich in der Verschiedenheit der ethischen Lebensauffassungen deutlich zu erkennen. An dieser Stelle ist es nun die erkenntnisstheorethische Betrachtung, die der ethischen unterstützend zur Seite tritt. Wenn dieselbe auf jedes einzelne Erkenntnissobject das Postulat der Erkennbarkeit anwenden muss, ohne es jemals anders als indirect, nämlich aus seinem Erfolg, beweisen zu können, so ist sie eben dadurch genöthigt, dieses Postulat auch auf die allgemeine Ordnung der Dinge auszudehnen, wie sie zunächst in den causalen Beziehungen der Natur und dann auf der Grundlage des Naturgeschehens in den zweckvollen Beziehungen der Geschichte und der Gesellschaft sich darstellt. Hier wie überall hat aber die Forderung des Erkennens vor allem eine objective Bedeutung. Auf das subjective Begreifen der in der Erfahrung gegebenen Thatsachen muss unter Umständen als auf ein ideales, in der Wirklichkeit niemals ganz zu erreichendes Ziel verzichtet werden. Dass die Thatsachen der Erfahrung an sich jenem begreifenden Verständnisse unseres Geistes zugänglich sind, welches überall in der Verbindung der Thatsachen und ihrer Zurückführung auf gewisse ursprüngliche Voraussetzungen besteht, an dieser Forderung muss festgehalten werden, weil sie die Bedingung für die Existenz der Wissenschaft ist. Und in ihr liegt die Voraussetzung eingeschlossen, dass keine einzelne Thatsache und kein Zusammenhang von Thatsachen für jene allgemeine Ordnung der Dinge, deren begreifendem Verständniss unser Erkennen zustrebt, bedeutungslos sei. Das völlig Bedeutungslose wäre immer zugleich ein absolut Unbegreifliches. Von der Voraussetzung der Bedeutsamkeit ausgehend werden wir zugleich nach dem Umfang der Thatsachen und ihrer Verbindungen das Mass ihrer Bedeutung abschätzen müssen. Unter diesem Gesichtspunkte nun erscheint es logisch sinnlos anzunehmen, dass der Werth der Geschichte der Menschheit in der Wirkung bestehe, welche sie auf das individuelle Leben ausübt, oder dass der Werth der Gesellschaft auf der Förderung beruhe, welche durch sie das einzelne Dasein empfängt. Es erscheint logisch sinnlos und darum ethisch absurd, dass Geschichte und Gesellschaft an sich selbst gar keine Bedeutung besitzen sollen, sondern dass die Bedeutung dieser gewaltigen Thatsachencomplexe sich in ihren verhältnissmässig unerheblichen individuellen Einflüssen erschöpfe. Ein solcher Alderitismus lässt die kosmologische Teleologie des vorigen Jahrhunderts eigentlich weit hinter sich, obgleich er immer noch die verbreitetste Lebensauffassung ist. Mit dieser Erwägung ist jeder egoistischen Ethik, wie sehr sie sich immerhin in wohlklingende Humanitätsphrasen einhüllen mag, der Stab gebrochen. Das einzelne Dasein verliert nicht an Werth, wenn dem Ganzen, das uns in Geschichte und Gesellschaft gegeben ist, eine um ebenso viel grössere Bedeutung beigelegt wird, als es gewaltiger und umfassender ist.

Es bedarf nicht der näheren Ausführung, in welchem Sinne der erweiterte Gesichtskreis, zu welchem auf diese Weise die sociale Ethik erhebt, auf die individuelle zurückwirken muss. Nur der freiere, den nichtigen Streitigkeiten eudämonistischer und rigoristischer Secten entrückte Standpunkt, welchen dieselbe auf diese Weise gewinnt, setzt sie in den Stand, nun auch umgekehrt der socialen Ethik wieder ihre Hülfe zu leisten, indem sie, der Führung des sittlichen Gefühls folgend, ethische Normen für den Zustand der Gesellschaft zu gewinnen sucht. Mit der Erfüllung dieser Aufgabe tritt die Ethik in nächste Beziehung zu den speciellen Gesellschaftswissenschaften. Unter ihnen ist freilich nur für die Rechtslehre und allenfalls noch für die Staatswissenschaft diese Grundlage der Ethik jetzt schon anerkannt. Für die Nationalökonomie, deren Gegenstand an und für sich das egoistische Interesse dauernder fesselt, bereitet sich ein ähnlicher Umschwung der Anschauungen allmählich vor. Um so gewaltiger wird er voraussichtlich in seinen Wirkungen sein, da die wirthschaftlichen Verhältnisse vielleicht den grössten Einfluss auf den ethischen Zustand der Gesellschaft besitzen.

Indem wir nunmehr einer kurzen logischen Würdigung dieser Wissenschaftsgebiete uns zuwenden, müssen wir uns hier auf die Hervorhebung der hauptsächlichsten leitenden Gesichtspunkte beschränken. Die speciellere Methodik würde, da sie die eingehende Erörterung zahlreicher Begriffe voraussetzt, die Grenzen einer allgemeineren logischen Darstellung weit überschreiten.

## 2. Die Methoden der Volkswirthschaftslehre.

### a. Die allgemeinen Richtungen der Volkswirthschaftslehre.

Aus der Zahl einzelner Probleme, welche der Bestand der Gesellschaft mit sich führt, sondert die Volkswirthschaftslehre diejenigen aus, welche sich auf die Entstehung, den Verkehr und Verbrauch der materiellen Güter beziehen. Das Bewusstsein von dem Umfang und der Bedeutung dieser Probleme hat sich verhältnissmässig spät unter der Wirkung bestimmter geschichtlicher Einflüsse entwickelt, und die wissenschaftlichen Anschauungen sind daher zunächst von diesen Einflüssen bestimmt worden. Indem die Erweiterungen des Verkehrs und der Handelsbeziehungen, welche im Laufe des 16. und 17. Jahrhunderts eingetreten waren, dem Gelde als dem allgemeinen Tauschmittel eine erhöhte Aufmerksamkeit zuwandten, regten sie die Erörterung der Frage an, durch welche Einflüsse der Geldvorrath eines Landes, den man als den Werthmesser seines Wohlstandes betrachtete, vermehrt werden könne. Die von diesem Gesichtspunkte geleiteten Untersuchungen, die von Adam Smith den Namen des »Merkantilsystems« erhielten, forderten aber allmählich eine Reaction heraus, welche, auf den

bloss instrumentalen Charakter des Geldes hinweisend, ebenso einseitig die zu den unerlässlichsten Lebensbedürfnissen erforderlichen Güter, diejenigen des Bodenertrags, bevorzugte. So entstand das »*physiokratische System*«, das endlich zu dem so genannten *Industriesystem Adam Smith's* überführte, welches neben der landwirthschaftlichen Production auch der gewerblichen und commerciellen Industrie ihre Stelle anzuweisen suchte, um in dem Begriff der *nützlichen Arbeit* die Grundlage zu finden, von welcher aus eine eingehende wissenschaftliche Analyse der bisher fluctuirenden Begriffe von Werth, Preis, Geld, Capital und Volkswohlstand möglich wurde.

Diese Entwicklung brachte es mit sich, dass sich die Volkswirthschaftslehre zunächst in der Form einer *abstracten Wirthschaftstheorie* entwickelte. Indem man die einzelnen Factoren der Güterbewegung, die sich nach einander der Untersuchung dargeboten hatten, nicht nur von den sonstigen socialen Thatsachen, mit denen sie in der Wirklichkeit stets verbunden sind, sondern auch von allen concreten politischen und historischen Bedingungen löste, mussten die Begriffe und Gesetze, zu denen man gelangte, einen abstracten Charakter annehmen. Erst später suchte man, zum Theil unter dem Einflusse ähnlicher geistiger Strömungen innerhalb der Rechtswissenschaft, die concrete Untersuchung nachzuholen, bei der nun vorzugsweise die geschichtlichen Bedingungen der nationalen wirthschaftlichen Zustände und Vorgänge in den Vordergrund traten. Aus solchen Bestrebungen ist die *historische Nationalökonomik* der neueren Zeit hervorgegangen.

Neben diesen beiden Richtungen, die, abgesehen von ihrem Zusammenhang mit der Entwicklung der volkswirthschaftlichen Forschung, in dem auf allen Gebieten wiederkehrenden Verhältniss abstracter und concreter Untersuchung ihren Rechtsgrund besitzen, bestehen noch andere Gegensätze, die in *ethischen* Anschauungen wurzeln, aber in der Regel mit den vorigen nahe zusammenhängen. Wird bei der Betrachtung socialer Vorgänge dem *Individuum* der überwiegende Werth beigemessen, so muss das *egoistische* Interesse gerade bei den volkswirthschaftlichen Erscheinungen um so mehr in den Vordergrund treten, als sich diese direct nur auf die Verhältnisse der *materiellen* Güter des Lebens beziehen. Wird dagegen als das Hauptobject der wirthschaftlichen Erscheinungen die *Gesellschaft* betrachtet, so gewinnen die sittlichen Zwecke der letzteren den Vorzug. Da nun aber diese und der Nutzen des Einzelnen mannigfach in Streit gerathen, so kann es auch zwischen den entsprechenden Richtungen der Wirthschaftslehre an solchem nicht fehlen. So bekämpft in der That der *Individualismus*, der die Volkswirthschaft der Privatwirthschaft unterordnet, den *Collectivismus*, welcher der Gesammtwirthschaft eigene Zwecke setzt, denen das individuelle Interesse nachstehen muss. Das starke Selbstgefühl des englischen Geistes hat die grossen Nationalökonomen, welche diese Nation hervorgebracht, im allgemeinen der individualistischen

Richtung geneigt gemacht, wobei zugleich diese und die abstracte Methode der Untersuchung sich gegenseitig förderten. Denn das egoistische Interesse bleibt ewig dasselbe; es wechselt höchstens nach Zeit und Gelegenheit mit den Mitteln seiner Befriedigung. Die Privatwirthschaft hat daher keine Geschichte, oder was man so nennen könnte fällt nicht in das Gebiet der eigentlich wirthschaftlichen Vorgänge. Auf diese Weise ist es keine zufällige Verbindung, wenn die historische Richtung der Nationalökonomik, wie sie sich namentlich in Deutschland entwickelte, im allgemeinen zugleich auf die ethischen Interessen der Gesammtheit einen höheren Werth legt.

### b. Die abstracte Wirthschaftstheorie.

Vermöge einer natürlichen Anwendung der isolirenden Abstraction greift man bei der Untersuchung der wirthschaftlichen Erscheinungen zunächst dasjenige Motiv des menschlichen Handelns heraus, welches erfahrungsgemäss auf die Production und den Umlauf der materiellen Güter vom allgemeinsten Einflusse ist. Dieses Motiv ist der Eigennutz. Die abstracte Untersuchung betrachtet demnach die Gesellschaft als eine Summe in Verkehr stehender Individuen, deren jedes von dem Wunsche beseelt werde, möglichst viel Güter durch nützliche Arbeit zu erwerben und wieder nutzbringend zu verwerthen; sie abstrahirt aber von allen andern Neigungen, welche in der Wirklichkeit diesem Wunsche entgegenwirken können. Diese Abstraction führt von selbst zu der weiteren, dass die Unterschiede in der wirthschaftlichen Beanlagung der Menschen absichtlich ignorirt werden, indem man einen idealen Zustand voraussetzt, in welchem jedes Individuum in jedem Augenblick nicht nur eine richtige Erkenntniss seines eigenen Interesses und der für dasselbe erspriesslichsten Hülfsmittel sondern auch den Willen besitze, dieser Erkenntniss gemäss zu handeln. Es ist selbstverständlich, dass die so angenommenen wirthschaftlichen Kräfte nur dann ungestört sich entfalten können, wenn keinerlei politische Einrichtungen denselben Schranken auferlegen, wenn also der Staat in keiner Weise dem aus denselben entspringenden Wechselverkehr der Privatwirthschaften hemmend im Wege steht. Freier Verkehr und Abwesenheit wirthschaftlicher Vorrechte pflegt daher die dritte Voraussetzung zu sein, welche als Postulat zu den beiden in axiomatischer Form vorangestellten Hypothesen der Alleinherrschaft des Eigennutzes und der wirthschaftlichen Vollkommenheit der Individuen hinzukommt.

Die abstracte Theorie von Werth und Tausch, Angebot und Nachfrage, Capitalbildung und Credit beruht im wesentlichen auf den genannten Voraussetzungen. Indem hierbei von der Qualität der Werth- und Tauschobjecte, von den Formen der Production und Capitalisirung und also auch von der verschiedenen socialen Stellung der Individuen ganz abgesehen werden kann, gewinnt die Untersuchung einen Charakter logischer Allge-

meinheit, welcher, da alle jene Begriffe eine quantitative Beschaffenheit besitzen und in bestimmten Relationen zu einander stehen, zur mathematischen Formulirung der Schlussfolgerungen herausfordert. In der That ist eine solche mehrfach mit Erfolg versucht worden*). Sie hat den Vorzug, dass sie zu vollkommen präcisen Definitionen nöthigt, verwickelte Schlussfolgerungen übersichtlicher gestaltet und manche Irrungen vermeiden lässt, welche bei der unbestimmteren logischen Form der gewöhnlichen Darstellung leicht sich einstellen können.

Aehnlich wie die Mechanik durch Determination ihrer abstracten Voraussetzungen allmählich einen Uebergang zu den concreten Thatsachen der Physik gewinnt, so sucht nun auch die abstracte Wirthschaftstheorie mittelst der Hinzunahme weiterer Voraussetzungen sich den wirklichen Erscheinungen des wirthschaftlichen Lebens zu nähern. Dies ist geschehen durch bestimmte Annahmen über die Formen der nützlichen Arbeit und ihre Vertheilung, sowie über das Verhältniss der Bevölkerungszunahme zu dem Wachsthum der Güter. Hierbei verbindet sich aber bestimmter noch als bei den allgemeineren wirthschaftlichen Axiomen mit der Abstraction die Hypothese, um Voraussetzungen aufzustellen, welche sich nirgends in der concreten Wirklichkeit erfüllt finden. So trennt die Abstraction die Berufskreise in gewisse Classen, ohne die innerhalb derselben stattfindenden oft sehr wichtigen Unterschiede zu beachten, und zu dieser Eintheilung kann ausserdem die Annahme hinzutreten, dass jedes Individuum nur einem wirthschaftlichen Beruf angehöre, z. B. Grundeigenthümer, Capitalist oder Arbeiter, niemals aber dieses zugleich sei, eine Annahme, der selbstverständlich alle Erfahrung widerstreitet. Um eine allgemeine Beziehung zwischen der Bewegung der Bevölkerung und der Grundrente aufstellen zu können, bediente sich Malthus der beiden Voraussetzungen, dass der Boden an Ausdehnung absolut beschränkt sei und daher einen wachsenden relativen Aufwand von Capital und Arbeit erforderlich mache, um seinen Ertrag zu steigern, und dass die natürliche Neigung den Menschen antreibe, seine Gattung ins unbegrenzte zu vermehren, so lange sich diesem Trieb keine Hindernisse entgegenstellen, zwei Hypothesen, welche zu der Folgerung führten, dass, wie die Grösse der Bevölkerung durch den Ertrag des Bodens, so die Minimalhöhe des Lohnes durch die Noth regulirt werde. Hier ist in den Voraussetzungen das Gebiet der Abstraction gänzlich verlassen und lediglich die Hypothesenbildung übrig geblieben. Dabei ist die erste Hypothese ebenso unverificirbar wie ihr Gegentheil**),

---

*) Léon Walras, Mathematische Theorie der Preisbestimmung der wirthschaftlichen Güter. Stuttgart 1881. W. St. Jevons, Theory of political economy. London 1871.

**) Dieses Gegentheil wird von dem amerikanischen Nationalökonomen Carey vertheidigt, dessen Anschauungen in Deutschland durch Dühring vertreten werden.

weil sich über die zukünftige Entwicklung der Bodenproduction selbstverständlich nichts aussagen lässt; die zweite aber ist thatsächlich falsch, und sie entfernt sich naturgemäss um so mehr von der Wahrheit, je näher die andere Voraussetzung der abstracten Wirthschaftstheorie, dass jedes Individuum eine vollkommene Erkenntniss seines eigenen Interesses besitzt, nahe daran ist verwirklicht zu sein.

Vergleicht man diese Abstractionen und Hypothesenbildungen mit den Voraussetzungen der allgemeinen Mechanik, mit denen sie äusserlich die nächste Verwandtschaft besitzen, so fällt der Unterschied zu Ungunsten der abstracten Wirthschaftstheorie sofort in die Augen. Offenbar entsprechen die Annahmen der letzteren in viel geringerem Grade der Wirklichkeit, und sie setzen der allmählichen Annäherung an dieselbe durch Hinzufügung determinirender Bestimmungen grössere, in mancher Beziehung vielleicht unlösbare Schwierigkeiten entgegen. Die Abstractionen eines absolut starren Körpers, einer absolut beweglichen Flüssigkeit u. dgl. sind zwar weit entfernt jemals mit der Wirklichkeit übereinzustimmen. Aber die aus ihnen abgeleiteten Resultate bleiben doch immer in grösserer oder geringerer Annäherung auch für die wirkliche Erfahrung gültig, so dass es der Beobachtung verhältnissmässig leicht wird, aus der Art und dem Grad der stattfindenden Abweichungen selbst die weiteren Voraussetzungen zu finden, die in einem gegebenen Fall den mechanischen Abstractionen beigefügt werden müssen, um eine grössere Uebereinstimmung zu erzielen, und für diese Zugaben sind schliesslich wieder die nämlichen Axiome und Postulate gültig wie für die ursprünglichen Sätze. In einer ganz anderen Lage befindet sich die abstracte Wirthschaftstheorie. Hier bietet die Erfahrung nicht bloss Fälle dar, in denen die Erscheinungen irgendwie hinter den Voraussagen der Theorie zurückbleiben, sondern nicht selten solche, in denen sie in directem Gegensatz zu denselben stehen. Diese Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung lassen aber voraussichtlich nur theilweise durch die Einführung speciellerer Voraussetzungen sich ausgleichen. Denn bei den letzteren bleibt man immer auf die Hinzufügung objectiver Bedingungen beschränkt, wie der Güter- und Arbeitstheilung in einer Gesellschaft, bestimmter politischer Verhältnisse u. dgl.; die subjectiven Postulate der Alleinherrschaft des Eigennutzes und der wirthschaftlichen Vollkommenheit der Individuen lassen sich aber nicht abändern, ohne das Fundament der bestehenden Wirthschaftstheorie überhaupt zu beseitigen. Und doch sind gerade diese Postulate thatsächlich unrichtig; mindestens ist der Erfahrungskreis, innerhalb dessen sie als annähernd gültig betrachtet werden können, ein ausserordentlich beschränkter. Da aber der menschliche Wille nicht wie ein gestossener Körper unter der Einwirkung verschiedener Motive eine mittlere Richtung einschlägt, sondern einem herrschenden Motiv ausschliesslich zu folgen pflegt, ja durch eine solche Handlung auf seine eigenen künftigen Willensbestimmungen und unter Umständen selbst auf die von andern Individuen in gleichem Sinne ein-

wirkt, so ist es begreiflich, dass in vielen Fällen die Erscheinungen nicht bloss hinter den Voraussagen der Theorie zurückbleiben, sondern in vollem Gegensatze zu denselben stehen. Man könnte nun freilich versuchen, durch eine gründlichere Berücksichtigung der psychologischen Eigenschaften des Menschen auch jene subjectiven Voraussetzungen zu ergänzen. Aber der exacte Charakter der Theorie würde damit nothwendig aufgehoben. Denn dieser beruht gerade auf der Einfachheit der Voraussetzungen. Sobald man der Mehrheit widerstreitender Motive und der thatsächlichen Ungleichheit der Menschen Rechnung tragen will, gelangt man zu variabeln Factoren, deren Wirksamkeit von Fall zu Fall sich verändert, so dass dieselbe höchstens nach jedem Ereigniss geschätzt, nicht aber als allgemeine Voraussetzung der Erklärung aller Ereignisse zu Grunde gelegt werden kann. Die abstracte Wirthschaftstheorie begiebt sich also, wenn sie diese Zugeständnisse macht, von selbst auf den Boden der historischen Nationalökonomik. Will sie auf ihrer Höhe bleiben, so ist es ihr allein freigestellt, an Stelle des Eigennutzes und der wirthschaftlichen Vollkommenheit andere Eigenschaften in ähnlicher Ausschliesslichkeit vorauszusetzen, die dann freilich zu ebenso einseitigen Folgerungen führen werden. So hat in der That Fourier seine Genossenschaften auf die Annahme gegründet, das Mitgefühl sei die einzige Triebfeder menschlicher Handlungen, und alle Menschen seien in gleichem Grade opferwillig für die Gemeinschaft. Hier war freilich der Widerspruch mit der Erfahrung so offenkundig, dass die Theorie von vornherein nur auf ein ideales Wirthschaftssystem der Zukunft bezogen werden konnte.

Dies führt uns auf einen zweiten Punkt, in welchem sich die abstracte Wirthschaftstheorie zu ihrem Nachtheil von den ihr methodisch verwandten Gebieten der Naturforschung unterscheidet. Die physikalische Beobachtung zieht der Gültigkeit der mechanischen Voraussetzungen unzweideutig ihre Grenzen, indem sie zugleich deutlich auf die Ergänzungen hinweist, deren dieselben bedürfen. Die Correctur, welche der abstracten Wirthschaftstheorie durch die Erfahrung zu Theil wird, ist weit weniger wirksam. Denn diese Theorie will nur zum Theil das Sein der Vorgänge erklären; sie bezieht sich zu einem nicht minder wesentlichen Theil auf das Sollen. Und gerade da, wo sie mit dem Sein in Conflict geräth, ist sie nun, vermöge jenes Glaubens an die Realität abstracter Voraussetzungen, dessen sogar der speculirende Mathematiker nicht ganz entbehrt, geneigt, dem Sein durch das Sollen nahzuhelfen: wenn die Erscheinungen den Gesetzen nicht gehorchen, so sollten sie es doch thun und werden es in Zukunft gewiss thun, wenn erst die Hindernisse beseitigt sind, die den gemachten Voraussetzungen widerstreiten. Als solche Hindernisse betrachtet man aber meistens nicht die relativ unveränderlichen Eigenschaften der menschlichen Natur, sondern hauptsächlich gewisse äussere, durch die Gesetzgebung leicht zu beseitigende Schranken, wie die Hemmnisse des Verkehrs und der Freiheit der wirthschaftlichen Arbeit. Das Postulat der abstracten Theorie, dass jedes

Individuum in seinem wirthschaftlichen Handeln unbeschränkt sei, wird auf diese Weise unmittelbar in eine praktische Forderung umgewandelt, zu deren Begründung man sich auf die Resultate der abstracten Theorie beruft. Uns beschäftigt hier nicht der materielle Inhalt dieser Forderung, welche ja gewiss eine grosse, wenn auch keine absolute Berechtigung hat. Hier ist nur auf den logischen Fehler hinzuweisen, den man begeht, indem man aus einer Anzahl gleich abstracter Voraussetzungen einen befriedigenden Zustand des wirthschaftlichen Gleichgewichts ableitet, um nun daraus zu folgern, dass diejenige Voraussetzung, deren Erfüllung in unserer Macht steht, praktisch verwirklicht werde, ohne danach zu fragen, ob auch die andern Voraussetzungen erfüllt seien. Wie unzulässig solche einseitige Anwendungen der Theorie sind, das hat denn auch der Erfolg thatsächlich gezeigt, indem die nämlichen allgemeinen Voraussetzungen zu praktischen Forderungen von ganz entgegengesetztem Inhalte führten. Die befriedigte »Selbstregulirung der egoistischen Interessen«, welche in der Selbsthülfe des Einzelnen und in der Staatsweisheit des »laissez faire et laissez aller« gipfelt, und das »eherne Lohngesetz«, welches die Hungergrenze als den Normalzustand der arbeitenden Massen betrachtet, diese beiden Lehren sind Kinder einer und derselben abstracten Theorie, der sie auch darin nacharten, dass sie die Vielheit der ethischen Motive des Handelns und die Verschiedenartigkeit der menschlichen Natur unbeachtet lassen.

Mit der Zurückweisung jener praktischen Nutzanwendungen ist nun aber keineswegs der Werth der Wirthschaftstheorie selbst aufgehoben. Vielmehr liegt die grosse Bedeutung derselben gerade darin, dass sie die isolirte Wirkung bestimmter Factoren des wirthschaftlichen Lebens untersucht und auf diese Weise die Analyse der complexen Erscheinungen, in welchen jene Factoren mit andern Bedingungen zusammenwirken, vorbereitet. Eine solche Analyse kann naturgemäss erst unternommen werden, wenn man sich zuvor mindestens über die Wirkungen der allgemeinsten und constantesten Bedingungen Rechenschaft gegeben hat. Die Ermittelung der realen Bedingungen des wirthschaftlichen Lebens in seinen einzelnen Erscheinungen kann selbstverständlich nur aus der Erfahrung geschöpft werden. Sie ist das Werk einer an der Hand der historischen und socialen Thatsachen unternommenen Induction, nicht einer Theorie, welche den Thatsachen vorausgeht. Aber auch hier tritt, in ähnlichem Sinne wie bei der physikalischen Beobachtung, die abstracte Theorie als Hülfsmittel der Induction auf. Nur ist nicht zu vergessen, dass in diesem Fall wegen der grossen Zahl realer Bedingungen, welche die Theorie unbeachtet lassen muss, die Voraussetzungen wie die Resultate derselben an sich einen durchaus hypothetischen Charakter besitzen, der zwar eine Anwendung zur Erklärung einzelner Erscheinungen des wirthschaftlichen Lebens nicht ausschliesst, dagegen eine unmittelbare Uebertragung auf die Wirklichkeit nicht gestattet. Darum fordert hier die theoretische Speculation eine inductive Ergänzung,

welche vorzugsweise auf die Verwerthung geschichtlich gegebener Thatsachen angewiesen ist.

### c. Die historische Nationalökonomik.

Da die concreten gesellschaftlichen Zustände stets die Ergebnisse geschichtlicher Entwicklung sind, so beruht die Erkenntniss derselben in erster Linie auf den Hülfsmitteln historischer Forschung. Von der überwiegenden Bedeutung dieser Hülfsmittel trägt die historische Nationalökonomik ihren Namen, ohne dass sie natürlich die sonstigen Quellen verschmähen darf, die der Untersuchung eines in der Gegenwart gegebenen Zustandes zu Gebote stehen. Insbesondere ist es die Statistik, welche hier die geschichtliche Untersuchung ergänzen muss. Erst durch eine solche Vereinigung der sämmtlichen Hülfsmittel, welche der Induction zur Verfügung stehen, tritt diese Richtung als concrete Wirthschaftslehre in einen vollen logischen Gegensatz zur abstracten Wirthschaftstheorie. Dabei ist für diesen Gegensatz die verschiedenartige Verwendung der statistischen Thatsachen besonders charakteristisch. Während diese in der Wirthschaftstheorie nur zur Verification und quantitativen Abschätzung der Ergebnisse dienen, die auf dem Wege logischer Deduction gewonnen sind, wobei freilich nicht selten die Uebereinstimmung ganz ausbleibt, betrachtet die concrete Wirthschaftslehre das statistische Material als Grundlage ihrer Inductionen. Damit hängt es zusammen, dass die abstracte Theorie von diesem Hülfsmittel zugleich einen beschränkteren Gebrauch macht: sie begnügt sich mit der Auslese jener Thatsachen der Wirthschaftsstatistik, welche auf die Ergebnisse ihrer Deductionen unmittelbar Bezug haben. Die concrete Untersuchung dagegen ist geneigt, die sämmtlichen Thatsachen zu verwerthen, die für den socialen Zustand bedeutsam sein können; darum schenkt sie neben der Wirthschafts- auch der Bevölkerungsstatistik ihre Aufmerksamkeit*). Mit Rücksicht hierauf ist der Ausdruck »historische Nationalökonomik« nicht mit Unrecht als ein allzu enger betrachtet worden; immerhin bleibt es ein bedeutsames Moment, dass hier die historische Forschung das Centrum bildet, um welches sich die übrigen Hülfsmittel gruppiren. Insbesondere fällt überall da, wo man ein causales Verständniss gegebener wirthschaftlicher Zustände zu gewinnen sucht, der geschichtlichen Entwicklung die Hauptaufgabe zu, während die Statistik nur dazu dient, jene Zustände selbst in ihrem Detail festzustellen. Ueberdies ist die letztere wegen der kurzen Dauer ihrer methodischen An-

*) So widmet z. B. Roscher der Bevölkerungslehre ein eigenes Capitel seiner Grundlagen der Nationalökonomie, und ähnlich bringt Stein im ersten Bande seines Systems der Staatswissenschaft die Statistik und Populationistik in unmittelbare Verbindung mit der Volkswirthschaftslehre.

wendungen auf Zustände beschränkt, die der Gegenwart angehören oder ihr nahe liegen, während für die Erkenntniss der wirthschaftlichen Zustände der Vergangenheit wiederum die Hülfsmittel der historischen Forschung mit ihren im allgemeinen bloss qualitativen Ergebnissen an deren Stelle treten müssen *).

In doppelter Beziehung erweitert und vertieft nun die historische Nationalökonomik die Aufgaben der wirthschaftlichen Forschung. Indem sie den concreten Bedingungen des wirthschaftlichen Lebens nachgeht, findet sie, dass dieselben theilnehmen an dem Flusse des geschichtlichen Werdens, und es erwächst ihr so die Pflicht, die wirthschaftlichen Erscheinungen von den allgemeineren Vorgängen der Culturgeschichte abzusondern und in ihren ursächlichen Beziehungen zu den politischen und sittlichen Zuständen historisch zu verfolgen. Als Resultat dieser Untersuchungen ergiebt sich eine Geschichte der Volkswirthschaft, welche ebenso sehr dazu bestimmt ist, der allgemeineren historischen Untersuchung specielle Gesichtspunkte für das Verständniss der historischen Vorgänge entgegenzubringen, wie der Erkenntniss der in der Gegenwart bestehenden wirthschaftlichen Zustände die Wege zu bereiten. In dieser Erkenntniss, in der mit den Hülfsmitteln der Historik und Statistik ausgeführten Untersuchung des volkswirthschaftlichen Lebens in seinem Zusammenhange mit den ethischen, rechtlichen und staatlichen Zuständen der Völker, besteht sodann die zweite, praktisch bedeutsamere Aufgabe, welche der systematischen Volkswirthschaftslehre zufällt. Sie verfährt systematisch, insofern sie die einzelnen wirthschaftlichen Erscheinungen in gewisse Gruppen gliedert, deren Verbindung und weitere Eintheilung von logischen Gesichtspunkten bestimmt wird. Auch dieses System beruht auf Abstraction; aber es ist nicht die isolirende, sondern die generalisirende Abstraction, welche hier, ähnlich wie in der systematischen Naturgeschichte, zur Ordnung der concreten Thatsachen erfordert wird. In Folge des Strebens nach einem causalen historischen Verständniss der Erscheinungen ist zugleich der genetische Standpunkt der Classification der vorherrschende. Er macht sich vor allem darin geltend, dass man in der Regel den Hauptphasen der wirthschaftlichen Güterbewegung, der Erzeugung, dem Umlauf, der Vertheilung und Verzehrung, die nächste Gliederung des Systems entnimmt. In der Durchführung des letzteren kommt dann auch die abstracte Wirthschaftstheorie zu ihrem Rechte. Sie dient überall, wo die Bedingungen für ihre Anwendung gegeben sind, zur Erklärung der concreten Erscheinungen. Aber schon die zahlreichen Fälle, in denen Theorie und Erfahrung mit einander in Streit gerathen, nöthigen zur Aufsuchung anderer theils in widerstreitenden ethischen Eigenschaften von

*) Vgl. W. Roscher, Geschichte der Nationalökonomik in Deutschland, S. 1035, und: Ueber das Verhältniss der Nationalökonomik zum klassischen Alterthum (Ansichten der Volkswirthschaft, 3. Aufl., I, S. 1 f.).

allgemeinerem Charakter, theils in den besonderen Culturbedingungen begründeter Ursachen. Auf diese Weise verbinden sich bei der systematischen Erforschung der concreten wirthschaftlichen Zustände die historische und statistische mit der psychologischen und ethischen Untersuchung, und insbesondere ist es die Psychologie, die in diesem inductiven Verfahren ihre Stellung als grundlegende Disciplin der Geisteswissenschaften wiedererobert, die sie in dem logischen Schematismus der abstracten Wirthschaftstheorie verloren hatte*).

Es ist übrigens leicht begreiflich, dass gerade in der systematischen Volkswirthschaftslehre, wo die abstracte Theorie und die concrete empirische Forschung immer bis zu einem gewissen Grade in einander eingreifen müssen, auch die Gegensätze der entsprechenden Richtungen nicht selten in einem eklektischen Verhalten eine gewisse Ausgleichung gefunden haben. Namentlich haben es die hervorragenden französischen und englischen Nationalökonomen der neueren Zeit, wie J. B. Say und J. St. Mill, obgleich sie im ganzen die Volkswirthschaftslehre als eine abstracte und logische Disciplin behandelten, im einzelnen an concreten Untersuchungen nicht fehlen lassen. Doch wurden von solchen Forschern, ihrer vorherrschenden Richtung gemäss, die der Bevölkerungslehre zugehörenden Thatsachen allein der Beachtung gewürdigt, und der für die causale Induction entscheidende geschichtliche Gesichtspunkt ganz ausser Augen gelassen. Auch mit Rücksicht hierauf ist daher der Name der »historischen Nationalökonomik« für die entschiedenere Richtung der concreten Forschung von bezeichnender Bedeutung.

Diese Richtung ist es, durch welche die Volkswirthschaftslehre überdies in eine innigere Beziehung gesetzt wird zu den andern auf der Basis historischer Forschung zur Entwicklung gelangten speciellen Gesellschaftswissenschaften, zur Rechts- und Staatslehre. Sind es doch neben den allgemeingültigen psychologischen Motiven und den besonderen Culturbedingungen besonders die rechtlichen und politischen Verhältnisse, in denen sich einerseits die ethischen Zustände der Völker spiegeln, und die anderseits auf deren wirthschaftliche Zustände einen unabhängigen Einfluss ausüben. Indem die historische Nationalökonomik der Deutschen diese mannigfachen Beziehungen pflegt, bleibt sie dem Ursprung getreu, welchen die volkswirthschaftlichen Studien in Deutschland genommen haben. Denn während dieselben an andern Orten bald von commerciellen, bald von philosophischen und logischen Betrachtungen ausgegangen sind, hat hier die Nationalökonomik ursprünglich von der Jurisprudenz sich abgezweigt.

---

*) Diese Beziehungen zu Psychologie und Ethik sind gut auseinandergesetzt von Gust. Schmoller, Ueber einige Grundfragen des Rechts und der Volkswirthschaft, 2. Aufl., Jena 1875, S. 31 f.

## 3. Die Methoden der Rechtswissenschaft.

### a. Die Entwicklung des Rechts.

Wie Sprache, Mythus und Sitte, so ist auch das Recht nicht aus willkürlicher Uebereinkunft hervorgegangen, sondern ein natürliches Erzeugniss des Bewusstseins, welches in den Gefühlen und Strebungen, die durch das Zusammenleben der Menschen erweckt werden, seine fortdauernde Quelle hat. Es fällt ursprünglich mit der Sitte zusammen und ist innig geknüpft an religiöse Anschauungen, indess die Sprache ihm die Symbole leiht, mit deren Hülfe seine Begriffe sich ausbilden und befestigen können. Aber verschieden von jenen ihm nahe verbundenen Aeusserungen des Geistes ist das Recht frühe schon aus diesem Fluss der natürlichen Entwicklung herausgetreten. Unter dem Zwang der Bedürfnisse des geselligen Lebens ist in ihm die sittliche Norm zuerst zur willkürlichen Satzung, hierauf diese zum Object logischer Reflexion geworden, und beide, Gesetzgebung und Wissenschaft, haben dann selbst eine rechtsbildende Kraft gewonnen.

Mit dem Uebergang zum Gesetz scheidet sich das Recht deutlicher von der Sitte, wenn auch zuvor schon in der zwingenderen Kraft der rechtlichen Normen diese Trennung sich vorbereitet, und daher die Gesetzgebung oft nur ausdrücklich feststellt, was rechtliche Geltung bereits thatsächlich besessen hat. Mit dieser Feststellung des Rechts beginnt aber zugleich der wichtigste Unterschied desselben von andern Geisteserzeugnissen. So frühe auch diese, allen voran Sprache und Mythus, in bleibenden Denkmälern der Literatur und der Kunst bewahrt worden sind, so hat dieser Vorgang doch die weitere Entwicklung nur durch jene unbewussten Wechselwirkungen beeinflussen können, in denen sich der individuelle Geist überall mit dem allgemeinen Denken befindet. Dagegen giebt es keinen Vorgang, der auf die Weiterbildung der Rechtsanschauungen selbst mit so unmittelbarer Gewalt eingewirkt hätte wie der Uebergang des Rechts in die Gesetzgebung. Und noch eigenthümlicher gestaltet sich das Verhältniss zur Wissenschaft. Für sie sind Sprache, Mythus und Sitte durchaus nur Gegenstände theoretischer Betrachtung; niemals kann diese auf die realen Vorgänge selbst einen nennenswerthen Einfluss gewinnen, oder wo ein solcher versucht werden mag, da muss er selbst den Weg des Rechts einschlagen, wenn er eine Wirkung äussern will. Die Jurisprudenz dagegen ist die in eminentem Sinne praktische Wissenschaft. Sie bringt die gegebenen Rechtssatzungen in eine systematische Form, welche den Umfang und die Richtigkeit ihrer Anwendungen sichert, während sie gleichzeitig die künftigen Acte der Gesetzgebung vorbereitet.

Aus diesen eigenthümlichen Beziehungen, welche zwischen Erkenntniss und Anwendung des Rechtes bestehen, ergeben sich die Gesichtspunkte für die Unterscheidung gewisser Stadien der Rechtsentwicklung. Das erste dieser Stadien gehört der praktischen Bethätigung der Rechts-

anschauungen an, wie sie in den sittlichen Vorstellungen eines Volkes ihre unmittelbare Quelle hat. Das *zweite* entspricht der Scheidung von Recht und Sitte in Folge der Aufstellung bestimmter Rechtssatzungen, in welchen bereits das Streben nach theoretischer Darstellung der Rechtsideen bemerkbar wird. Im *dritten* endlich werden die Rechtssatzungen Gegenstand einer systematischen wissenschaftlichen Untersuchung in Bezug auf die in ihnen zum Ausdruck gelangenden Rechtsbegriffe. Das erste dieser Stadien ist demnach das der *natürlichen Rechtsanschauungen*, im zweiten vollzieht sich die *Codification*, im dritten die *Systematisirung des Rechtes*.

Es ist bezeichnend für den stetigen Fluss der Rechtsentwicklung, dass diese drei Stadien nicht bloss *auf einander* gefolgt sind, sondern dass sie, sobald das letzte erreicht ist, fortan *neben einander* bestehen bleiben. Nachdem die Codification des Rechtes längst alle Gebiete des privaten und öffentlichen Lebens ergriffen, fliesst in dem Gewohnheitsrecht eine niemals ganz versiegende Quelle ursprünglicher Rechtsanschauungen. Beiden tritt aber die wissenschaftliche Systembildung lenkend und beschränkend gegenüber. Indem sie das Recht auf bestimmte Principien zurückführt, deren Anwendung unter speciellen Bedingungen eine logische Aufgabe ist, die dem einzelnen Fall überlassen bleiben kann, legt sie der Gesetzgebung heilsame Schranken auf; denn sie verhütet die willkürliche und zufällige Casuistik, in welche dieselbe verfällt, so lange sie allein durch die praktische Erfahrung geleitet wird. Und damit gleichzeitig gelingt es dem wissenschaftlichen System, allmählich die Gebiete des blossen Gewohnheitsrechts, wenn nicht den positiven Rechtssatzungen, so doch den allgemeinen Principien, aus denen dieselben entsprungen sind, unterzuordnen. So liegt die praktische Bedeutung der wissenschaftlichen Rechtsbildungen hauptsächlich in dieser Verallgemeinerung der Rechtsideen, welche immer zugleich, gegenüber den schrankenlosen Gestaltungen des Gewohnheitsrechts und der Gesetze, eine Vereinfachung ist.

Die Entwicklung durch diese drei Stadien hat sich nun für die einzelnen Rechtsgebiete in sehr verschiedener Zeit und bei verschiedenen Völkern in abweichender Weise vollzogen. Für die Ausbildung der Wissenschaft ist hier vor allem die Entwicklung des *römischen* Rechts massgebend geworden. Abgesehen von der bewunderswerthen Begabung für die klare praktische Auffassung der Rechtsideen ist es hauptsächlich die, freilich wieder durch specifische Anlage und politische Verhältnisse bestimmte, *Individualistische* Entwicklung des römischen Rechts, welche demselben seine universelle Bedeutung gegeben hat. Das öffentliche Recht blieb bei den Römern zu einem grossen Theil den Normen der Sitte überlassen, und, soweit es vorhanden war, entzog es sich durch seinen fragmentarischen Charakter der systematischen Bearbeitung. So ist es gekommen, dass noch heute nicht bloss das römische Recht den ausschliesslichen Charakter des *Privatrechts* besitzt, sondern dass sichtlich dieses die Rechtswissenschaft

überhaupt beherrscht. Nichts ist hierfür bezeichnender, als dass in einer nicht allzu fernen Vergangenheit in den Augen mancher praktischen Juristen gerade die wichtigsten Gebiete des öffentlichen Rechts, wie das Verfassungs- und Verwaltungsrecht, kaum zur eigentlichen Jurisprudenz gehörten. In der Sache ist diese aus der historischen Entwicklung der Wissenschaft begreifliche Vorstellung offenbar nicht begründet. Der Staat ist das umfassendere Rechtsgebiet, welches, je vielseitiger und schwieriger die socialen Beziehungen der Individuen geworden sind, um so mächtiger mit seinen Veranstaltungen auch in die Sphäre des Privatrechts eingreifen muss. Aber dass eine Rechtsbildung von dem universellen Charakter, wie ihn das römische Recht annahm, nur in der individualistischen Form geschehen konnte, wie sie allein innerhalb des Privatrechts durchführbar ist, begreift sich leicht. Verfassung und Verwaltung der Staaten sind in so vielfacher Weise von historischen Bedingungen abhängig, dass hier niemals auch nur annähernd die nämlichen Verhältnisse wiederkehren. Das Individuum ändert sich wenig, und die Triebe, von denen sein Leben in der Gesellschaft beherrscht wird, das Streben Eigenthum zu erwerben, den Besitz zu behaupten, für Verträge und andere freie Rechtshandlungen Sicherheit zu finden, diese Neigungen bleiben auch bei mannigfach wechselnden Culturverhältnissen unveränderlich. Hiermit hängt ein anderer, namentlich für die wissenschaftliche Entwicklung äusserst wichtiger Einfluss der individualistischen Beschaffenheit des römischen Rechtes zusammen. Für die Ausbildung abstracter Rechtsbegriffe sind die allgemein menschlichen Verhältnisse, die den Gegenstand des Privatrechts ausmachen, ungleich geeigneter als die theils mehr von concreten Bedingungen abhängigen, theils eine weit umfassendere historische Vergleichung erfordernden Thatsachen des öffentlichen Rechts. Die Begriffe der Person, des Eigenthums, der Familie und die mit diesen Begriffen zusammenhängenden Rechtsverhältnisse können zwar nach wechselnden Culturbedingungen variiren, aber ihr allgemeiner Charakter bleibt immer der nämliche. Zugleich stehen die einzelnen Rechtsgebiete mit dem Verhältniss des Individuums zur Gesellschaft in so unmittelbarem Zusammenhang, die Motive bestimmter Rechtsordnungen entspringen in so zwingender Weise aus den für das individuelle Interesse massgebenden Motiven, dass die Grundzüge des positiven Rechts sich als nothwendige logische Folgen der in den natürlichen Bedürfnissen des Menschen und in der Existenz geordneter Verkehrsverhältnisse liegenden Bedingungen ergeben. Auf dem Boden dieser individualistischen Rechtsauffassung vollzieht sich daher am leichtesten der Uebergang zu jener wissenschaftlichen Systematisirung der Rechtsbegriffe, welche sich thatsächlich im Anschlusse an das römische Privatrecht gebildet hat.

Ganz anders geschah die Entwicklung des Rechts bei den germanischen Völkern*). Hier spielt von Anfang an der sociale Verband eine grössere

---

*) Vgl. W. Arnold, Cultur und Rechtsleben. Berlin 1865, S. 225 f.

Rolle. Selbst über das Eigenthum steht nicht dem Einzelnen, sondern der Familie das nächste Verfügungsrecht zu; die wichtigsten Rechtsinstitute lehnen an die historisch gegebenen Gliederungen der Gesellschaft sich an. Pietät und Gemeinsinn halten hier dem eigennützigen Interesse die Wage. Daher im deutschen Recht auch für privatrechtliche Handlungen die Fülle poesievoller Symbole, die im römischen bis auf wenige dürftige Ueberreste verschwunden sind. Denn Pietät und Gemeinsinn können selbst den Verkehr des täglichen Lebens poetisch verklären; dieser Zauber verschwindet aber, wo nur noch die eigennützige Berechnung das Wort behält. Dagegen entziehen sich freilich dort die concreten Gestaltungen der Rechtsordnung jedem Versuch logischer Systembildung, während eine solche hier, wo die zwingende Logik des individuellen Interesses ihre Stimme erhebt, die zu jeder Zeit die nämliche ist, mit innerer Nothwendigkeit zu Stande kommt. Für diese Allgemeingültigkeit der individuellen Motive, der das römische Recht ebenso wohl seine logische Kraft, wie seine universelle Bedeutung verdankt, ist es bezeichnend, dass, als in unsern Tagen ein geistvoller Romanist den Versuch machte, die Anschauungen, die er aus der historischen Vertiefung in das römische Recht geschöpft, zu einer philosophischen Begründung der Rechtsbegriffe zu verwerthen, diese der nämlichen Idee einer Selbstregulirung der egoistischen Interessen ihn zuführte, deren sich die abstracte Wirthschaftstheorie zu bedienen pflegt*).

Dem Einflusse, welchen innerhalb der nationalen Rechtsbildung Gesetzgebung und Wissenschaft auf die natürliche Entwicklung der Rechtsanschauungen gewinnen, entspricht durchaus die eigenthümliche Form der Wechselbeziehungen, in welche die Rechtsbildungen verschiedener Völker mit einander getreten sind. Alle jene Wirkungen, welche in Sprache, Kunst und Literatur einzelne Culturvölker auf andere ausgeübt haben, lassen sich nicht entfernt der tiefgreifenden Wirkung des römischen Rechts auf die modernen Rechtsbildungen vergleichen. Denn diese Wirkung hat sich nicht auf dem langsamen Wege des natürlichen geistigen Verkehrs und durch den unmerklichen Eintritt einzelner fremder Vorstellungen in das Rechtsbewusstsein der Völker vollzogen, sondern das römische Rechtssystem ist als ein Ganzes in die moderne Rechtsentwicklung eingetreten, und sobald es Aufnahme fand, hat es die ihm gegenüberstehenden Rechtsbildungen zunächst völlig verdrängt, um dann erst in den allmählichen Umwandlungen, die es erfuhr, den Bedingungen der fremden Cultur und Sitte sich anzupassen. Dieses Ereigniss, eines der wunderbarsten in der Geschichte des Geistes, war nur durch den Einfluss möglich, welchen hier wie auf keinem andern Gebiete Wissenschaft und willkürliche Satzung ausüben.

---

*) Ihering, Der Zweck im Recht, Bd. I, S. 100 f. Vgl. hierzu oben S. 588. Uebrigens bleibt abzuwarten, in welchem Umfange Ihering im Fortgang seines Werkes dem von ihm neben dem Egoismus anerkannten Motiv der Selbstverleugnung einen Einfluss auf die Rechtsbildung einräumt.

Wie die systematische Anlage des römischen Rechts seine totale Aufnahme mit sich brachte, so war es durch seinen abstracten Charakter zu jener universellen Geltung befähigt, nach welcher die kosmopolitischen Bestrebungen des mittelalterlichen Kaiserthums und der Kirche verlangten. Darum kam die Macht der Gesetzgebung dem unter dem Einfluss der Wissenschaft entstandenen Rechtssystem zu Hülfe. Aber gerade weil das fremde Recht als ein Ganzes aufgenommen worden war, so musste nun jene Assimilation, die bei den stetig und allmählich wirkenden Cultureinflüssen anderer Art von selbst den Process der Aufnahme zu begleiten pflegt, hier in einer Jahrhunderte dauernden Entwicklung nachgeholt werden. In dieser Assimilation des fremden Rechts, welche unbrauchbare Bestandtheile ausscheidet, neue hinzufügt, andere umformt, um sie den specifischen Bedürfnissen der modernen Cultur anzupassen, sind wir noch heute begriffen. Wenn dieselbe vollendet ist, so wird wahrscheinlich das römische Recht als solches die herrschende Stellung, die es gegenwärtig in der systematischen Jurisprudenz einnimmt, verloren haben, um innerhalb des historischen Rechtsstudiums fortan den ersten Platz zu behaupten.

Der universelle Charakter, welchen das römische Recht theils durch seine eigene ursprüngliche Anlage, theils durch die angedeuteten geschichtlichen Bedingungen gewonnen, musste der Anschauung, dass es überhaupt ein universelles, für alle Menschen und Völker vermöge der ursprünglich gleichartigen Beschaffenheit der Menschennatur gleichartiges Recht gebe, fördernd entgegenkommen, wenn auch diese Anschauung in dem Streben nach einer allgemeingültigen philosophischen Erkenntniss der Rechtsideen eine selbständige Quelle hat. Der Umstand, dass sogar dem positiven Recht thatsächlich eine gewisse Uniformität zukam, liess den Gedanken an ideale Rechtsnormen von ganz allgemeiner Anwendbarkeit mindestens als zulässig erscheinen, wie sehr sich derselbe auch vielfach in directem Widerstreit gegen die Herrschaft des römischen Rechts Geltung verschafft hat. Und noch in anderer Beziehung hat die thatsächliche Rechtsentwicklung derartigen philosophischen Anschauungen, wie sie nachher nicht selten auch auf Sprache, Mythus und Sitte übertragen wurden, eine gewisse Stütze geliehen. Die Codification des Rechts beruht überall auf willkürlicher Satzung, und in nicht wenigen Fällen hat diese sichtlich den Charakter eines Vertrags, durch welchen der Kampf widerstreitender Gewalten beigelegt wird. Schon das römische Zwölftafelgesetz zeigt diesen Ursprung, der sich bei jedem Gesetzgebungsacte wiederholt, der nicht gerade aus dem Willen eines absoluten Machthabers hervorgeht. So hat die Vertragstheorie, die bei der Erklärung von Staat und Gesellschaft dereinst eine so grosse Rolle gespielt, ihre Quelle in der wirklichen Rechtsentwicklung. Sie begeht nur den grossen Fehler, dass sie die Entstehung der ursprünglichen Rechtsnormen mit der Codification des Rechtes verwechselt, und eine begreifliche Folge dieses Fehlers ist dann der andere, dass sie alles positive Recht als eine Summe willkürlicher Institutionen ansieht, die ebenso be-

liebig, wie sie entstanden sind, auch wieder beseitigt und durch andere angemessenere ersetzt werden könnten.

Auf diese Weise hat sich die so genannte naturrechtliche Theorie in den Widerspruch verwickelt, dass sie ein natürliches Recht verlangte, und dass sie sich gleichwohl der Meinung hingab, alles Recht sei künstlich entstanden, auch jenes natürliche Recht könne daher durch die Kunst der Gesetzgebung in das Leben eingeführt werden. Die Vertiefung in die wirklichen Rechtsquellen, wie sie die historische Richtung der Jurisprudenz angebahnt hat, musste zu einer vollständigen Umkehrung dieser Anschauung führen. Indem man hier auf die natürliche Entstehung des Rechtes hinwies, musste der Gedanke eines universellen Rechtes der Menschheit dem Reich jener philosophischen Träume überwiesen werden, in welches schon längst die Idee einer Universalsprache versunken war. Die historische Schule hat dann freilich wohl ihrerseits den Gedanken der natürlichen Rechtsbildung einseitig angewandt, indem sie geneigt war, die drei Stadien der natürlichen Rechtsentwicklung, der Codification und der Systematisirung als ein reines Nacheinander zu betrachten*). So entstand hier eine ihrem Wesen nach ebenfalls philosophische Rechtstheorie, welche mit der naturrechtlichen in den herkömmlichen Fehler der Geschichtsphilosophie verfiel, nicht die Vergangenheit sondern die Zukunft zum Gegenstand philosophischer Betrachtung machen zu wollen, ein Fehler, der meist mit dem andern verbunden ist, dass man die wirkliche Entwicklung nach einem a priori construirten oder einseitig abstrahirten Schema beurtheilt. (Vgl. oben S. 546.)

Indem nun die historische Jurisprudenz philosophischen Rechtstheorien eine aus den Auswüchsen des Naturrechts nur zu begreifliche Skepsis entgegensetzte und gleichwohl nicht selten zu allgemeinen Anschauungen gelangte, denen sich ein philosophischer Charakter nicht absprechen lässt, hat sie ein unverwerfliches Zeugniss dafür abgelegt, dass auch das Recht einer philosophischen Betrachtung, welche an die historische und die systematische sich anschliesst, schwer sich entziehen kann. In der That fallen gegenüber dieser Forderung alle Verirrungen der Rechtsphilosophie ebenso wenig ins Gewicht, als etwa die unvermeidlichen Irrthümer, welchen die historische Kritik ausgesetzt ist, der Geschichte ihre Existenz als Wissenschaft streitig machen können. Es liegt nur hier wie überall im Charakter der Philosophie, dass ihre Fehler nicht bloss einzelne Theile, sondern sofort das ganze Gebäude eines Systems unsicher machen. Speciell die Rechtsphilosophie befindet sich aber in dieser Beziehung noch in einer ungünstigeren Stellung als die Philosophie der Geschichte. Während die meisten Verirrungen der letzteren durch die kurze Bemerkung zurückzuweisen waren,

---

*) Savigny, Vom Beruf unserer Zeit für Gesetzgebung und Rechtswissenschaft, 2. Aufl., S. 31 f.

dass dieselbe kein anderes Object als die Geschichte selbst habe, dass sie also nur auf die wirklich geschehenen Thatsachen, nicht auf die Zukunft oder auf eine der Erfahrung unzugängliche Vergangenheit sich beziehen könne, ist die Rechtsphilosophie in einer andern Lage, weil die Rechtswissenschaft gleichzeitig eine historische und eine systematische Seite hat, welche letztere nicht bloss die auf einer bestimmten geschichtlichen Entwicklungsstufe gültigen Begriffe fixirt, sondern diese ausserdem gewissen Rechtsbegriffen von allgemeingültiger Bedeutung unterzuordnen sucht. Dazu kommt die praktische Richtung der Jurisprudenz, vermöge deren sie nicht bloss das geltende Recht systematisirt und analysirt, sondern auch, soweit es durch die Entwicklung der Rechtsideen und durch neu eintretende Culturbedingungen gefordert wird, umzugestalten strebt. Dieser praktischen Richtung wird auch die Rechtsphilosophie nicht ganz entgehen können. Obgleich sie ein für allemal auf das utopische Unternehmen verzichten muss, ein ideales Recht und einen idealen Staat zu construiren, welche in irgend einer mehr oder minder entfernten und darum unserer gegenwärtigen Erkenntniss unerreichbaren Zukunft in die Wirklichkeit treten sollen, so wird sie sich doch der Aufgabe nicht entziehen können, die wirklichen Rechtsbildungen an den allgemeingültigen sittlichen Normen zu messen, und daraus Schlüsse auf die ethische Weiterentwicklung des Rechtes zu ziehen, deren wirkliche Erfüllung ausserdem freilich von psychologischen, ethnologischen und historischen Bedingungen abhängt. Darum gehört nun aber auch die Erwägung der Frage, ob die Zeit zur Erfüllung bestimmter ethischer Postulate gekommen sei, nicht der philosophischen Betrachtung des Rechtes, sondern der praktischen Wissenschaft und der von ihr geleiteten Gesetzgebung zu.

Die philosophische Betrachtung des Rechtes wird hiernach in zwei Gebiete zerfallen: in ein historisches und in ein ethisches. Davon bildet das erste einen integrirenden Bestandtheil der philosophischen Geschichtsbetrachtung. Das zweite schliesst sich an die allgemeine Ethik an und benützt neben den systematischen Rechtsbegriffen die Thatsachen der socialen Ethik als Hülfsmittel. Während die Jurisprudenz die Rechtsnormen mehr nach ihrer äusserlichen Seite, theils in Bezug auf ihre historische Entstehung, theils in Bezug auf ihre Anwendung und ihren praktischen Nutzen untersucht, fällt die Erwägung ihres Gehaltes und ihrer sittlichen Berechtigung von selbst einer philosophischen Betrachtung anheim, denn sie ist nur auf der Grundlage einer allgemeinen ethischen Lebensauffassung möglich, wie eine solche die philosophische Ethik zu gewinnen sucht. Damit ist selbstverständlich nicht gesagt, dass die specifisch juristische Forschung ethischer Untersuchungen dieser Art entbehren müsse. Vielmehr ist nicht einzusehen, warum nicht ebenso gut der Jurist Ethiker sein soll, wie der Historiker mit der Kritik und Interpretation die philosophische Geschichtsbetrachtung verbindet; ja es ist im Gegentheil zu hoffen, dass in der Zukunft die philosophische Ethik des Rechts ebenso auf dem Boden

der positiven Rechtswissenschaft, wie die wahre Philosophie der Geschichte auf dem der historischen Forschung erblühen werde.

b. Rechtsnormen und Rechtsdefinitionen.

Die wissenschaftliche Bearbeitung des Rechts geht von derjenigen Gestaltung aus, welche die Rechtsanschauungen in Gesetzgebung und Gewohnheitsrecht gefunden haben. Der Inhalt beider besteht in Sätzen, welche für das gesellschaftliche Handeln der Mitglieder einer Rechtsgemeinschaft bestimmte Regeln entweder ausdrücklich feststellen oder als gültig voraussetzen. Diese Regeln sind die Rechtsnormen. Sie bilden die unmittelbaren Grundlagen des Rechts und daher auch die Ausgangspunkte für dessen wissenschaftliche Bearbeitung. Ihrer logischen Bedeutung nach sind sie den Axiomen der theoretischen Wissenschaften vergleichbar. Denn sie lassen wie diese keine Begründung durch andere Sätze zu, sondern entspringen unmittelbar aus der von dem sittlichen Gefühl geleiteten Rechtsanschauung; auch besitzen sie eine ähnliche Allgemeinheit, da sie alle einzelnen Rechtsanwendungen, aus denen sie durch verallgemeinernde Abstraction hervorgegangen sind, nun umgekehrt wieder als specielle Fälle unter sich enthalten. Jene Abstraction fällt freilich zum Theil schon in die frühesten Anfänge der Rechtsentwicklung. Erwerb, Schenkung, Mord, Diebstahl, Betrug, diese und andere Rechtsbegriffe haben in der Zeit des Dekalogs und der Zwölftafelgesetze ungefähr in der nämlichen Allgemeinheit, die wir ihnen heute beilegen, existirt, wie sehr auch die Vielgestaltigkeit ihrer Formen zugenommen hat.

Abgesehen von dieser Analogie der Bedeutung besteht aber eine tiefgreifende Verschiedenheit der Rechtsnormen von theoretischen Grundsätzen. Jene sagen nichts aus über das Sein der Dinge und der Ereignisse, sondern sie enthalten ein Sollen, einen Befehl, dessen Befolgung zunächst dem Willen der Handelnden überlassen bleibt, und dessen Nichtbefolgung von bestimmten Rechtsnachtheilen bedroht ist, deren Durchführung die Rechtsordnung nöthigenfalls auf dem Wege des Zwangs herbeiführt. Indem so den Normen, verschieden von den Naturgesetzen, nur eine bedingte, von der freien Willensentschliessung der Rechtssubjecte abhängige Nothwendigkeit zukommt, wird es erforderlich, dass den Grundnormen des Rechts gewisse Hülfsnormen zur Seite treten, welche nicht angeben, was Recht ist, sondern feststellen, wie die Rechtsordnung gegen die Verletzungen, von denen sie durch die Willensfreiheit der Einzelnen bedroht ist, geschützt werden soll. Es liegt in der Natur der Sache, dass die eigentlichen Rechtsnormen, die fast überall in allgemeingültigen ethischen Anschauungen wurzeln, von einer weit constanteren Natur sind als die von veränderlicheren Ansichten und äusseren Bedingungen abhängigen Hülfsnormen. Die Gebote »Du sollst nicht tödten«, »Du sollst nicht stehlen« haben, seit es Menschen giebt, als unveränderliche Rechtsnormen gegolten;

die Gesetze über die Bestrafung von Mord und Diebstahl aber haben mannigfach gewechselt.

Da die Gesetzgebung zunächst von praktischen Motiven bestimmt wird, so sind in ihr die Grundnormen und die Hülfsnormen des Rechts keineswegs in gleicher Vollständigkeit enthalten. Vielmehr werden gerade die ersteren vielfach stillschweigend oder in den an sich unwesentlicheren Hülfsnormen als selbstverständliche Bedingungen derselben vorausgesetzt. So bezeichnen nur die frühesten Formen der Strafgesetzgebung in der einfachen Form eines Verbots den Inhalt der strafbaren Handlung selbst, während sie die auf einer primitiven Culturstufe höchst einfache Form der Bestrafung unerwähnt lassen. Die neueren Strafgesetzgebungen dagegen enthalten überall nur die Hülfsnormen des Rechts; in ihnen bestehen eben die Strafgesetze, die nicht den Inhalt des Verbrechens zum Gegenstande haben, sondern die Art, wie dasselbe gesühnt werden soll*). Die nämliche Erscheinung bietet im allgemeinen das Privatrecht dar. Auch hier setzt die Gesetzgebung die Verhältnisse der Personen zu einander und zu den Besitzobjecten als thatsächlich gegebene voraus; nicht sie, sondern die Hülfsnormen, welche diese Verhältnisse gegen Störungen sichern und eingetretene Störungen wieder ausgleichen, bilden den eigentlichen Gegenstand der Gesetzgebung. Nur in denjenigen Gebieten des öffentlichen Rechts, in denen schon die normalen Verhältnisse der Rechtsordnung ein directes Eingreifen der staatlichen Gewalten verlangen, also namentlich in dem Verfassungs- und Verwaltungsrecht, besitzen fortan gewisse Grundnormen eine hervorragende Bedeutung auch für die praktische Rechtsübung. Für die wissenschaftliche Bearbeitung des Rechts ist nothwendig die Auffindung der Grundnormen desselben ein erstes Erforderniss. Ohne sie lässt sich die Bedeutung und der Zusammenhang jener Hülfsnormen, denen in der Gesetzgebung meistens die herrschende Rolle zukommt, ebenso wenig erkennen, wie sich die Massregeln der praktischen Heilkunde ohne ein gründliches Verständniss der physiologischen Gesetze beurtheilen lassen. Die Darstellung der Grundnormen ist aber natürlich um so schwieriger, je weniger dieselben in der Praxis der Gesetzgebung direct zum Ausdruck gelangt sind. Denn auch hier gilt die Regel, dass das scheinbar Selbstverständliche der eindringenden Erkenntniss grössere Schwierigkeiten bereitet, als was erst unter dem Einflusse verwickelter logischer Vorbedingungen entstanden ist. So sind über die Begriffe von Verbrechen und Strafe, Besitz und Eigenthum die Acten einer wissenschaftlichen Debatte, welche bis an die Fundamente dieser elementaren Rechtsbegriffe heranreicht, wahrscheinlich noch lange nicht geschlossen, während die meisten der spät entwickelten Principien des Verfassungs- und Verwaltungsrechts höchstens hinsichtlich ihrer praktischen Zweckmässigkeit, kaum aber in Bezug auf den Inhalt der in ihnen zum Ausdruck kommenden Rechtsanschauungen Gegenstände des Streites sein können.

*) K. Binding, Die Normen und ihre Uebertretung, I, S. 56 f.

In der Aufsuchung der Rechtsnormen schlägt die wissenschaftliche Untersuchung einen eigenthümlichen Weg ein, welcher von der Thatsache bestimmt ist, dass die Grund- wie die Hülfsnormen des Rechts auf gewissen mit mehr oder minder klarem Bewusstsein befolgten Rechtsanschauungen beruhen. Diese sind, wie alle Anschauungen, nicht in der Form logischer Allgemeinbegriffe, sondern in den Vorstellungen einzelner rechtlicher Verhältnisse gegeben, die freilich frühe schon nach Beziehungen der Aehnlichkeit geordnet, unter gemeinsame Bezeichnungen gebracht und in dieser verallgemeinerten Form von der Gesetzgebung geregelt werden. Aber der natürlichen Begriffsbildung, welche hier wirksam ist, fehlt es, so sicher sie auch durch einen glücklichen Instinct die verschiedenen Rechtsgebiete und Rechtsfälle im Ganzen zu ordnen weiss, durchaus an einer tieferen Einsicht in die Entstehung und den Inhalt der Rechtsbegriffe. Dennoch ist eine solche nothwendig, wenn eine erschöpfende Erkenntniss jener Grundnormen, in denen der ethische Gehalt der Rechtsordnung seinen Ausdruck findet, gewonnen werden soll. Zur Erreichung dieses Zieles bedarf es einer Analyse der Rechtsbegriffe, die theils in den bruchstückweise vorliegenden Grundnormen, theils in den in Gesetzen und gewohnheitsrechtlichen Satzungen gegebenen Hülfsnormen vorausgesetzt werden. Die Resultate dieser Analyse bestehen in den Rechtsdefinitionen. Ist die Analyse eine erschöpfende, so müssen die Definitionen in ihrem Zusammenhang so vollständig die Grundnormen einschliessen, dass eine ausdrückliche Formulirung der letzteren gar nicht mehr erforderlich ist. Die Definitionen enthalten aber zudem weit mehr, als die Normen selbst enthalten können, da vorzugsweise die Form der Definition es möglich macht, den Charakter der Thatsachen, welche Objecte der Rechtsnormen sind, genau anzugeben und sie von andern Thatsachen zu unterscheiden. Für die wissenschaftliche Bearbeitung kommt hierzu noch ein weiterer Vorzug. Obzwar die Norm vermöge ihrer imperativen Beschaffenheit die kürzere und eindrucksvollere Form ist, so entzieht sie sich doch durch eben diese Eigenschaft der Einreihung in einen systematischen Zusammenhang, während sich eine solche aus der Analyse der Begriffe, die in den Definitionen ihren Abschluss findet, von selbst ergiebt. Die Theorie wie die von wissenschaftlichen Gesichtspunkten geleitete Praxis des Rechts kann, wo es sich um den Inhalt der Grundnormen handelt, der Befehlsform entbehren; diese bleibt nur noch für jene Hülfsnormen erforderlich, welche für den Vollzug des Rechts bestimmte Regeln aufstellen, die als willkürliche Satzungen, die mit concreten Culturbedingungen zusammenhängen, eine andere Form überhaupt nicht gestatten. Je wünschenswerther es dagegen ist, dass die auf diese Aussentheile der Rechtsordnung herüberwirkenden inneren Rechtsnormen selbst für jede einzelne Anwendung mit voller Klarheit gegeben seien, um so unerlässlicher wird es, dass bei ihnen die ethische Form des Imperativs durch die logische der Definition ersetzt werde. So wird mit innerer Nothwendigkeit die Definition zur logischen

Grundform der Rechtswissenschaft. Aus ihr geht auf der einen Seite die Classification der Rechtsbegriffe hervor, indem die in den einzelnen Definitionen behandelten Begriffe in mannigfache Verhältnisse der Ueber- und Unterordnung und der Coordination treten; auf der andern Seite entspringt aus ihr die Rechtsdeduction, welche überall theils Rechtsdefinitionen, theils einzelne Thatsachen, die einem concreten, dem juristischen Urtheil unterworfenen Fall angehören, als ihre Prämissen verwerthet.

Indem die Jurisprudenz diese systematischen Formen keineswegs bloss zur Ordnung gegebener Begriffe und Resultate benützt, sondern sich ihrer neben der Analyse und der synthetischen Verknüpfung der Begriffe fortwährend in der Untersuchung selber bedient, ist sie die in eminentem Sinne systematische Wissenschaft. Durch diesen streng logischen Charakter ist sie der Mathematik vergleichbar. Aber während in der letzteren die Methoden der Untersuchung ihre vollkommenste Ausbildung gefunden haben, was dann erst auf die exacte Gestaltung auch der systematischen Formen zurückwirkte, liegt durchaus in diesen der Schwerpunkt der juristischen Forschung, wogegen es selbständige, von der fortwährenden Handhabung von Definitionen und Beweisen unabhängige Untersuchungsmethoden in ihr überhaupt nicht giebt. Dem entspricht ein charakteristischer Unterschied in der Anwendung der elementaren logischen Formen. Während die Mathematik fast nur mit Identitätsurtheilen und Begriffssubstitutionen operirt, ist die juristische Deduction durchaus beherrscht von dem Subsumtionsschlusse. Die concrete Erfahrung fordert zu ihrer Beurtheilung die Unterordnung unter bestimmte Rechtsdefinitionen, und nicht minder wird die theoretische Verbindung der letzteren ausschliesslich geleitet von dem Princip der Ueber- und Unterordnung. Der Grund dieser Gegensätze liegt schliesslich in der Natur der Begriffe, welche den Inhalt beider Wissenschaften bilden. Die mathematischen Begriffe ergeben sich aus den abstracten Verhältnissen der Anschauungsformen, und sie führen stets auf Elemente von einfachster anschaulicher Form zurück. Die Jurisprudenz entnimmt ihre Begriffe den verwickeltsten Verhältnissen des menschlichen Verkehrs und des willkürlichen Handelns. So ist die Mathematik nach der Natur ihrer Probleme die einfachste, die Jurisprudenz die complicirteste aller Wissenschaften. Aber dieser Contrast erstreckt sich nun vor allem auch auf die qualitativen Eigenschaften der Begriffe. In der Mathematik waltet die isolirende, in der Jurisprudenz die generalisirende Abstraction vor; jene bezieht sich auf subjective Anschauungsfunctionen, diese auf objective Verhältnisse der Erscheinungen. In den mathematischen Begriffen bleiben vermöge der Uniformität unserer Anschauungsformen stets die anschaulichen Elemente erhalten, und das Resultat der verwickeltsten Speculation lässt sich darum nöthigenfalls in eine anschauliche Form zurückübersetzen. Die Rechtsbegriffe bewahren vermöge der unendlichen Vielgestaltigkeit, welche die Erscheinungen der menschlichen Gesellschaft darbieten, immer ihre abstracte Natur, und sie lassen daher

keine andere Verbindung mit der concreten Erfahrung zu als die Subsumtion der letzteren, wobei man sich aber fortan bewusst bleibt, dass niemals der Begriff durch die Subsumtion erschöpft werden kann, ja dass es nicht einmal eine Anschauung giebt, welche als irgend zureichende logische Stellvertreterin des Begriffs gelten könnte. Darum ist in dem mathematischen Denken die abstracte Form der algebraischen Symbolik etwas Secundäres; sie gehört den äusseren Hülfsmitteln desselben an und dient der Verallgemeinerung der Untersuchungen, deren wirklicher Inhalt von durchaus anschaulicher Art bleibt. In dem juristischen Denken ist die abstracte Form das Primäre; jene Rechtsanschauung, aus welcher dereinst die Rechtsbegriffe entsprungen sind, gehört dem vorwissenschaftlichen Denken an, dem gegenüber die Arbeit der Wissenschaft darin besteht, ein System von Begriffen aufzustellen, die allgemein genug sind, dass sich das ganze Rechtsleben in sie einordnen lässt. Das mathematische Denken ist daher anschaulich in abstracten Formen, das juristische könnte man abstract in anschaulichen Formen nennen; denn der anschaulichen Bedeutung, die das gewöhnliche Denken den die Rechtsbegriffe bezeichnenden Worten beilegt, wird hier überall eine abstracte substituirt, welche nicht mehr in einer anschaulichen Thatsache, sondern in einer bestimmten, durch eine Definition festzustellenden Begriffsverbindung ihren Ausdruck findet.

Die Rechtsdefinition ist nun nicht bloss die Grundlage, auf welche die andern systematischen Rechtsformen zurückführen, sondern sie ist auch theoretisch wie praktisch die wichtigste unter diesen Formen. Indem sie aus den praktisch gültigen Rechtsanschauungen, sowie aus den vielfach nur in Gestalt secundärer Hülfsnormen vorliegenden Acten der Gesetzgebung als das nächste Resultat wissenschaftlicher Bearbeitung hervorgeht, vollzieht sich ein Vorgang, den man als »Präcipitation der Rechtssätze zu Rechtsbegriffen« bezeichnet hat*). Dieser Ausdruck deutet in der That ziemlich treffend die eigenthümliche Art der Abstraction an, um welche es sich hier handelt. Kein einziger der Rechtssätze, die bei einer Definition zusammenwirkten, ist als solcher in der letzteren enthalten, und doch lassen sie sich nicht nur sämmtlich aus ihr wiedergewinnen, sondern neben ihnen ergeben sich fast immer noch zahlreiche andere Rechtssätze, welche bei der von zufälligen Erfahrungen geleiteten praktischen Formulirung der Gesetze leicht übersehen werden. In der Definition vollzieht sich also eine Verdichtung der Rechtsbegriffe, welche gleichzeitig deren Anwendbarkeit nicht verengt, sondern erweitert, und die Anwendung auf den einzelnen Fall nicht erschwert, sondern erleichtert. Dieser Erfolg wird aber dadurch ermöglicht, dass, während die einzelnen Rechtserfahrungen in nebensächlichen Umständen mannigfach variiren, doch die wesentlichen Begriffselemente eine ausserordentlich grosse Constanz darbieten. Zum Vollzug jener Generalisationen, aus denen die Rechtsdefinitionen her-

*) Ihering, Geist des römischen Rechts, 2. Aufl., I, S. 37.

vorgehen, bedarf es daher keineswegs einer grossen Zahl von Erfahrungen, sondern wenige deutlich ausgeprägte Fälle, nöthigenfalls ein einziger, können genügen, um den Rechtsbegriff, der in ihnen verborgen liegt, in seiner vollen Schärfe und Allgemeinheit auszusprechen. In dieser Beziehung sind die Generalisationen der Jurisprudenz wiederum nur den verallgemeinernden Abstractionen der Mathematik vergleichbar, so unendlich verschiedenartig auch bei beiden der Inhalt der concreten Erfahrung ist. Aber was hier die grosse Einfachheit der mathematischen Anschauungsobjecte ermöglicht, das vollzieht sich dort gerade unter der Mitwirkung der unendlichen Complication der Thatsachen, welche um so mehr dazu nöthigt, zunächst durch eine tief eindringende Analyse und eine daran geknüpfte isolirende Abstraction alle Bestandtheile auszusondern, die für den Inhalt der Rechtsordnung gleichgültig sind. Dass sich diese Abstraction nicht mit einem Schlage vollzogen hat, lehrt die auf niedrigeren Entwicklungsstufen der Rechtsanschauung so verbreitete Trübung der Rechtsbegriffe durch zufällige Einflüsse der Sitte, eine Trübung, von welcher auch die spätere Entwicklung nicht ganz frei bleibt.

Die einzigen Führer durch solche Verirrungen sind schliesslich die sittlichen Normen, die, weil sie alle Einflüsse zufälliger Lebensgewohnheiten überdauern, immer mehr in den bleibenden Rechtsnormen zur Herrschaft gelangen müssen. Das Verhältniss der sittlichen Normen zu den Rechtsnormen ist aber weder ein solches der Identität noch der einfachen Ueberordnung. Die Rechtsordnung umfasst das ganze gesellschaftliche Leben der Menschen, und in diesem sind, wie in dem Einzelleben, die sittlichen Zwecke die höchsten, doch nicht die einzigen. Ihr dominirender Charakter kommt nur darin zur Geltung, dass zwar die sonstigen Rechtszwecke mannigfach mit einander in einen Conflict gerathen können, welcher durch eine Ausgleichung, die sich mit partiellen Erfolgen begnügt, vermieden werden muss, dass aber mit den sittlichen Zwecken ein solcher Conflict unmöglich oder nur so lange möglich ist, als die Rechtsordnung selbst an schweren Mängeln leidet. Den sittlichen Zwecken müssen alle andern sich beugen. Darum behält auch in den Gebieten des Rechts, die sich auf das sittlich Gleichgültige beziehen, das Ethische immerhin in prohibitiver Form seine normative Bedeutung, indem es von vornherein Rechtssatzungen ausschliesst, welche direct oder in ihren Folgen einen unsittlichen Inhalt bergen. Die positiven Normen, welche in diesen Fällen den Inhalt der einzelnen Rechtssätze bestimmen, bleiben die speciellen Zwecke der einzelnen Rechtsinstitute, die naturgemäss wieder alle Richtungen des Lebens umfassen können. Die Bestimmung dieser Zwecke und die Ableitung der aus ihnen sich ergebenden Rechtsbegriffe ist aber eine rein logische Aufgabe, die eine Abstraction aus den gegebenen Rechtsverhältnissen voraussetzt. Auf diese Weise gründen sich die Rechtsdefinitionen schliesslich auf eine doppelte Subsumtion, auf eine solche unter die ethischen Normen und auf eine andere unter die logischen

Gesichtspunkte, die sich aus der Erwägung der speciellen Rechtszwecke ergeben. Naturgemäss tritt in der Fassung der Rechtsdefinitionen die letztere Subsumtion in den Vordergrund, während die erstere meistens nur stillschweigend vorausgesetzt ist, darum aber nicht weniger auf den Inhalt der Sätze ihren massgebenden Einfluss ausübt. Diese logische Einseitigkeit der Rechtsdefinitionen ist es übrigens, die leicht die Aufmerksamkeit vorwiegend den speciellen Zwecken der Rechtsinstitutionen zuwendet und auf diese Weise, namentlich wenn die privatrechtlichen Begriffe in den Vordergrund gerückt werden, das Recht ausschliesslich unter den Gesichtspunkt des individuellen Nutzens stellt.

Auf den Rechtsdefinitionen erhebt sich die Classification der Rechtsbegriffe. Auch sie ist zunächst eine rein theoretische Aufgabe, die aber gleichwohl auf die praktische Rechtsübung und namentlich auf die Weiterentwicklung des Rechts nicht ohne Einfluss bleibt. Indem die systematische Verbindung der Rechtsbegriffe den einzelnen Rechtsinstituten die nach den logischen Folgen ihrer Zwecke zukommende Stellung anweist, giebt sie zugleich Rechenschaft über das Verhältniss dieser Zwecke selbst zu den sonstigen Grundlagen der Rechtsordnung und sichert für die Rechtsanwendung die richtige Subsumtion des einzelnen Falls unter die allgemeine Regel. Die logische Ausbildung der Classification ist in hohem Grade dadurch gefördert worden, dass die wissenschaftliche Entwicklung des Rechts von den privatrechtlichen Begriffen und zugleich von einer verhältnissmässig einfachen Form des gesellschaftlichen Lebens ausging. Die Gestaltungen des römischen Rechts ordnen sich fast von selbst unter systematische Gesichtspunkte. Die mannigfaltigeren Formen des Rechtslebens, welche an die Schöpfungen der modernen Cultur sich anlehnen, bieten in dieser Beziehung weit grössere Schwierigkeiten, die nur mit Hülfe der an den einfacheren Rechtsformen gewonnenen Vorbereitung einigermassen zu überwinden sind.

### c. Die Rechtsdeduction und der juristische Thatsachenbeweis.

Auf die Definitionen der Rechtsbegriffe und ihren systematischen Zusammenhang gründet sich die Rechtsdeduction. Sie hat zwei Hauptformen, deren erste und wichtigste in der Unterordnung gegebener einzelner Thatsachen unter die durch Definitionen festgestellten Rechtsbegriffe besteht. Da das Verhältniss der concreten Erfahrung zu den einzelnen Rechtsbegriffen nicht selten ein schwankendes ist, indem bald Zweifel entstehen können, welcher unter einer gewissen Anzahl verwandter Begriffe im gegebenen Fall anzuwenden sei, bald aber die einzelne Thatsache unter mehrere Begriffe fällt, deren Merkmale sie in sich vereinigt, so leistet hierbei zugleich die Classification der Begriffe wichtige Dienste. Gemäss der schon die juristischen Definitionen beherr-

schenden Form der Subsumtion beruht die Rechtsdeduction stets auf Subsumtionsschlüssen, und speciell im vorliegenden Falle ist es die classificirende Form des Schlusses, welche vorzugsweise benutzt wird. (Vgl. Bd. I, S. 299.) Die Thatsache aber, dass jede Rechtsdeduction nicht bloss eine Uebertragung fertiger Ergebnisse in ein systematisches Schema, sondern selbst eine Form der Untersuchung ist, verräth sich in der Benützung logischer Hülfsoperationen, welche hier eine analoge Rolle spielen wie etwa die geometrischen Constructionen in dem Euklidischen Beweisverfahren. Diese Hülfsoperationen sind Begriffsanalysen, welche an die feststehenden Definitionen sich anschliessen und zugleich auf die speciellen Umstände des zu beurtheilenden Falls Rücksicht nehmen. Demnach ist die juristische Begriffsanalyse im allgemeinen vergleichender Art: sie besteht in parallel laufenden Zergliederungen der in Anwendung kommenden Rechtsbegriffe und der zu beurtheilenden Thatsachen, und sie ist, insoweit sie sich auf die letzteren bezieht, meistens zunächst eine psychologische und dann erst eine logische, da nur auf Grund der psychologischen Erkenntniss einer Willenshandlung der für die Deduction in Betracht kommende logische Charakter derselben bestimmt werden kann.

Die zweite Form der Rechtsdeduction ist die Anwendung allgemeiner Rechtsbegriffe auf die Interpretation specieller Rechtsregeln. In diesem Falle handelt es sich zunächst um lediglich wissenschaftliche Fragen, die aber nicht selten aus Anlass einzelner Erfahrungen aufgeworfen werden und darum auch wieder auf die Beurtheilung specieller Thatsachen Einfluss gewinnen. Jede Rechtsdeduction solcher Art geht von der Voraussetzung aus, dass eine gegebene Rechtsordnung ein in sich widerspruchsloses System sein müsse, und dass daher, wo ein Widerspruch sich zu ergeben scheine, dieser wo möglich durch die Interpretation zu beseitigen sei. Die Interpretation geschieht nun aber auf dem Wege der Deduction aus Rechtsdefinitionen, wobei man sich des Postulates bedient, dass, wofern zwischen verschiedenen Rechtsdefinitionen ein Widerspruch vorzuliegen scheint, der allgemeineren der Vorzug einzuräumen sei. Bei coordinirten Definitionen entscheidet daher der Umstand, welche von ihnen mit allgemeineren Rechtsbegriffen übereinstimmt. Meistens treten übrigens solche Conflicte nicht zwischen den Rechtsdefinitionen selbst, sondern zwischen Rechtssätzen hervor, welche die Probe einer genauen begrifflichen Zergliederung noch nicht bestanden haben; und der scheinbare Widerspruch entspringt aus einer Vieldeutigkeit des Ausdrucks, welche durch die von allgemeineren Rechtsbestimmungen ausgehende Interpretation beseitigt wird. Die Interpretation selbst beruht wieder auf Subsumtionsschlüssen, in welche Begriffsanalysen als Hülfsoperationen eintreten. Als specielle Form überwiegt hier der exemplificirende Subsumtionsschluss.

Eine Art Zwischenform zwischen dieser und der vorigen Art der Rechtsdeduction bildet die Prüfung von Rechtsentscheidungen, wie

sie z. B. von der höheren Rechtsinstanz an den Urtheilen des ersten Richters geübt wird. Insofern es sich darum handelt, einen Rechtssatz von concreter Beschaffenheit an den allgemeinen Rechtsbegriffen zu prüfen, gehört das Verfahren der zweiten Form an; sobald aber dabei ausserdem eine Prüfung der Thatsachen selbst stattfindet, kommt zugleich die erste Form zur Anwendung.

Ganz zu scheiden von der Rechtsdeduction ist der juristische Thatsachenbeweis. Er dient dazu, jene Thatsachen, welche die erste Form der Deduction allgemeinen Regeln subsumiren soll, sicherzustellen und auf diese Weise den Stoff für die speciellen Rechtsdeductionen herbeizuschaffen. Demgemäss besitzt dieses Verfahren durchaus den Charakter eines Inductionsbeweises, und specifisch juristische Principien kommen bei ihm gar nicht zur Geltung, da mit der Feststellung des Thatbestandes erst die Anwendung der Rechtsbegriffe auf denselben beginnen kann. Der Charakter menschlicher Handlungen bringt es nun mit sich, dass eine derartige Induction unter Umständen höchst einfach und überzeugend, manchmal aber auch ausserordentlich schwierig und unsicher sein kann. Ersteres ist der Fall, wenn die Thatsache selbst durch eine grössere Zahl zuverlässiger Beobachter festgestellt ist, letzteres dann, wenn sie nur auf Grund mehrdeutiger Indicien vermuthet wird. Das aus praktischen Gründen begreifliche Streben, der hieraus entspringenden Unsicherheit zu steuern, hatte im Verein mit übertriebenen Vorstellungen von der rechtsbildenden Kraft der Gesetzgebung im älteren deutschen Recht zur willkürlichen Feststellung gewisser Merkmale geführt, deren Vorhandensein für die richterliche Annahme oder Verwerfung der Thatsachen entscheidend sein sollte. Diese formale Beweistheorie ist eine merkwürdig unlogische Abnormität innerhalb der sonst so logischen Jurisprudenz. Sie widerspricht so offenkundig allen Regeln der Induction, dass sie nur eine schwache Stütze in der Fiction findet, der Gesetzgeber müsse, um jeder Rechtsunsicherheit vorzubeugen, nöthigenfalls von Rechts wegen feststellen, was als Thatsache zu betrachten sei. Es wiederholt sich hier in anderer Form der nämliche Irrthum, der auf theoretischem Gebiete zu dem Streben geführt hat, für die singulären Thatsachen der Geschichte constante Kriterien der Gewissheit zu finden. (Vgl. oben S. 539.) Die neuere Rechtsübung ist daher im Anschlusse an die römische Auffassung überall zu einer materialen Beweistheorie übergegangen. Sie stellt den Grundsatz auf, dass jeder einzelne Fall aus sich selbst zu beurtheilen sei. Für die Entscheidung der Frage, von wem der Beweis zu führen, ob von den Organen der Rechtspflege selbst oder den rechtsuchenden Personen, und wie unter den letzteren die Beweislast zu vertheilen sei, werden hierbei Grundsätze der socialen Ethik und Gesichtspunkte praktischer Zweckmässigkeit massgebend, die sich einer allgemeineren logischen Betrachtung entziehen.

Beachtenswerth für die letztere ist nur die Thatsache, dass die erste der obigen Fragen zugleich als logisches Kriterium gedient hat, nach welchem

die in der älteren Rechtsentwicklung mannigfach ineinanderfliessenden Gebiete des öffentlichen Rechts und des Privatrechts sich scheiden. Gerade darum aber mag es zweifelhaft sein, ob diese Gebiete für alle Zeit in derjenigen Form einander gegenüberstehen werden, welche wesentlich im Anschlusse an die römische Rechtsentwicklung sich ausgebildet hat. Wenn das Gebot des öffentlichen Wohles das Verbrechen des Einzelnen der Privatklage des Beschädigten enthebt, um die Last des vollen Beweisverfahrens den Organen des Staats zuzuweisen, so ist es augenscheinlich, dass das nämliche Gebot zahlreiche Rechtsinstitute, die zunächst aus individuellen Unternehmungen entstanden sind, wenigstens theilweise der Willkür ihrer Urheber entziehen kann. Die Ausdehnung, welche auf diesem Wege der Entwicklung des öffentlichen Rechts in der Zukunft noch bevorstehen mag, wird aber sicherlich nicht von dem Kampf der individuellen Interessen, auf welche politische und sociale Parteien ihre Hoffnung zu setzen pflegen, sondern allein von der Vertiefung der ethischen Rechtsanschauungen bedingt sein. Denn vor allem das öffentliche Recht hat nicht in dem Eigennutz, sondern in dem Gemeinsinn seine fest gegründeten Wurzeln.

---

Viertes Capitel.

# Die Methoden der Philosophie.

## 1. Die empirische Methode.

Von dem Grundsatze ausgehend, dass alle Erkenntniss aus der Erfahrung entspringe, betrachten die Vertreter der empirischen Methode die Feststellung der Thatsachen der Erfahrung als eine Aufgabe, die der Philosophie mit allen andern Wissenschaften gemeinsam sei. Da sich nun aber mit dieser Aufgabe die speciellen Wissenschaften schon für den ganzen Umfang des menschlichen Wissens beschäftigen, so besteht auf diesem Standpunkte höchstens darin noch ein eigenthümliches Problem der Philosophie, dass sie jenen methodologischen Grundsatz aus der thatsächlichen Entwicklung der Erkenntniss zu beweisen sucht. Folgerichtig wird daher die Philosophie auf Erkenntnisstheorie reducirt, und der Werth der letzteren wird darin gesehen, dass sie theils die Unzulässigkeit anderer philosophischer Richtungen aufzeige, theils die etwa in den Einzelwissenschaften zur Geltung kommenden Bestrebungen nach Ueberschreitung der Erfahrung zurückweise. Hier berührt sich die empirische unmittelbar mit der kritischen Methode. Sie fällt mit dieser zusammen, so lange sie

sich nur bemüht, die Bestandtheile des Wissens zu sondern; sie erhält aber ihre selbständige Bedeutung in dem Augenblick, wo sie aus den empirischen Elementen allein Inhalt und Form der Erkenntniss zu gewinnen strebt. Da dieser Schritt mit Schwierigkeiten verbunden ist, indem er an den Methoden und Principien der Erfahrungswissenschaften selbst einem fortwährenden Widerstande begegnet, so ist es begreiflich, dass die Entwicklung der empirischen Denkweise zwar bis in die Anfänge der Philosophie zurückgeht, dass sie aber eine strengere Ausbildung spät erst erreicht hat. Anderseits ist sie seit Hume, dessen Untersuchungen des Substanz- und Causalbegriffs noch immer als unübertroffene Beispiele derselben dastehen, nicht wesentlich gefördert worden.

An diesen Beispielen erkennt man zugleich deutlich, dass die empirische Methode in einer Verbindung von Analyse und Abstraction besteht, wobei die letztere in der Elimination derjenigen Begriffselemente sich bethätigt, die nicht empirischen Ursprungs sind. Hierin zeigt sich nun aber sofort die Unzulänglichkeit der Methode. Die Gesetze des Denkens, nach welchen die Erfahrungselemente verbunden und geordnet werden, bleiben dahingestellt, und da eine völlige Abstraction von den transscendentalen Bedingungen doch nicht gelingt, so tritt an die Stelle einer sorgfältigen Untersuchung der letzteren die Einführung roher psychologischer Hülfsbegriffe, wie der Gewohnheit, der regelmässigen Coëxistenz und Aufeinanderfolge der Vorstellungen. Hinter allen diesen Hülfsbegriffen verhüllt sich die Idee einer bestimmten Regelmässigkeit der Erfahrung, die, welche Bedeutung man ihr auch beilegen, ob man sie als eine nothwendige oder zufällige ansehen mag, nur im Denken entspringen kann. Wie und unter welchen Bedingungen sie hier entspringt, darüber giebt aber die empirische Methode gar keine Rechenschaft. Die Aufgabe, die sie sich stellt, alle Erfahrungsbegriffe in ihre letzten Bestandtheile zu zerlegen, vermag sie also selbst niemals vollständig zu lösen.

## 2. Die dialektischen Methoden.

### a. Die antithetische Methode.

Wer sich die Entwicklung der älteren Speculation von den Eleaten bis auf Plato vergegenwärtigt, kann sich dem Eindrucke kaum entziehen, dass die kunstmässige Uebung des Denkens, wie sie hier zum ersten Mal entstanden ist, auf ihre Entdecker eine Art berauschender Wirkung ausgeübt haben müsse. Um so unwiderstehlicher aber erschien die Macht, die man den logischen Hülfsmitteln zutraute, je mehr ihr die Forderungen des Erkennens und Glaubens zu Hülfe kamen. Diesen Quellen verdankt der Platonismus seinen ungeheuren Einfluss auf künftige Zeiten. Zum ersten Male hat er das zuvor schlummernde Princip der dialektischen Methode

mit Bewusstsein verkündet. Dieses Princip lautet, dass die Wahrheit nur im begrifflichen Denken erfasst werden könne, während sie durch den sinnlichen Stoff der Erfahrung verhüllt und getrübt werde. So tritt dasselbe in schneidenden Gegensatz zu der Voraussetzung der empirischen Methode. Die Ausbildung, die es selbst gefunden, bleibt jedoch zunächst eine unvollkommene. Die Begriffe als solche, insofern sie eben Erzeugnisse des Denkens sind, gelten dem Platonismus als Abbilder des Wirklichen, ohne dass er es für nothwendig hält, gründlicher zu untersuchen, woher das Denken die Kraft nehme, jene Bilder hervorzubringen; ja diese nicht ganz abzuweisende Frage wird sogar geradezu in naiv empirischer Weise beantwortet, indem man die Begriffsbildung als Wiedererinnerung an die dereinst angeschauten idealen Urbilder auffasst. Nur ein wichtiger methodischer Grundsatz stellt sich der dialektischen Entwicklung der Begriffe alsbald hülfsbereit zur Verfügung: es ist der Grundsatz der antithetischen Begriffsbildung. Jedem A lässt sich, ohne dass es eines Herabsteigens zur Erfahrung bedürfte, ein non-A gegenüberstellen. Die Function der Verneinung verleiht also dem Denken die Kraft, aus sich selbst Begriffe hervorzubringen. So sind es die Eintheilung nach Gegensätzen und das apagogische Beweisverfahren, die von dieser ersten Gestaltung der dialektischen Methode in die Wissenschaft eingeführt werden, ohne dass es freilich um eine ausschliessliche systematische Anwendung derselben sich handeln könnte. Zugleich ist leicht ersichtlich, dass das antithetische Verfahren eine rein dialektische Begriffsbildung überall nur vortäuscht, indem dabei regelmässig ein Gegensatz angewandt wird, der irgendwie aus der Anschauung entnommen ist; und ebenso pflegt der apagogische Beweis, wie das Beispiel der Mathematik zeigt, bei der er in dieser frühen Zeit vorzugsweise cultivirt wird, am erfolgreichsten dann zu sein, wenn er unmittelbar anschauliche Verhältnisse in begriffliche Formen umwandelt. (Vgl. Abschn. I, S. 73.) So bewährt es sich überall bei der Anwendung dieser Methode, dass die in ihrem Princip vorausgesetzte Unabhängigkeit des Denkens von der Anschauung nirgends vorhanden ist.

### b. Die ontologische Methode.

Gegenüber dem naiven Apriorismus der älteren Speculation, welcher in dem Unterschied der Begriffe von den Sinnendingen ein zureichendes Zeugniss ihres überempirischen Ursprungs erblickte, um nur gelegentlich durch die Anwendung antithetischer Begriffsentwicklungen und Beweisführungen dieses Zeugniss zu verstärken, erhebt sich allmählich die Forderung, in der Constitution der Begriffe Merkmale aufzufinden, welche denselben die Denknothwendigkeit sichern, damit aber zugleich ihre Entstehung im Denken über allen Zweifel erheben. Es ist naturgemäss, dass man hierbei auf gewisse für die Erkenntniss- und Glaubensbedürfnisse besonders werth-

volle Begriffe den Hauptwerth legt, um so mehr da sie meist die Grenzen der Erfahrung zu überschreiten und also hierdurch schon ihren überempirischen Ursprung zu beweisen scheinen. In Descartes' Meditationen hat dieses Streben nicht den ersten, aber doch einen vorzugsweise charakteristischen Ausdruck gefunden. Das Interesse an den transscendenten Fragen brachte es mit sich, dass hier die speculative Theologie der Philosophie den Weg bereitete. Der ontologische Gottesbeweis des Anselmus von Canterbury wird durch Descartes nur unwesentlich modificirt und dann von Spinoza in eine abstractere philosophische Form gebracht. So entsteht jene classische Entwicklung des Substanzbegriffes, welche die Doppeleigenschaft der Definition und der Deduction in sich vereinigt. Diese Verbindung ist ein nothwendiges Ergebniss des Princips der ontologischen Methode, nach welchem das Kriterium der Wahrheit eines Begriffs in den logischen Eigenschaften besteht, welche ihm die Existenz sichern. Die Substanz ist die Causa sui; als solche ist sie ein Begriff, der sich selbst trägt, den man nur richtig zu definiren braucht, um seine Nothwendigkeit einzusehen, und dessen Aufhebung darum sofort einen Widerspruch im Denken erzeugen muss. Es ist klar, dass auf diese Weise der Schwerpunkt der Methode ganz und gar in die Definition fällt; aber es ist zugleich bemerkenswerth, wie daneben das antithetische Verfahren der älteren Dialektik als Hülfsmethode Verwendung findet, indem es in zahlreichen apagogischen Beweisen die zwingende Gewalt der ursprünglichen Definition anschaulich zu machen sucht, ohne zu derselben begrifflich etwas neues hinzuzufügen.

Wie die antithetische Methode den Apriorismus der alten, so beherrscht die ontologische den Rationalismus der neueren Philosophie. Die zwei hauptsächlichsten Anwendungen, welche die letztere Methode gefunden, entsprechen den zwei Hauptformen des Substanzbegriffs der rationalistischen Metaphysik, der absolut unendlichen und der absolut einfachen Substanz. Aehnlich wie Spinoza aus der Definition der Causa sui die erste, so sucht Leibniz in einer verwandten, freilich viel unvollkommeneren Weise aus dem Begriff des Zusammengesetzten die zweite zu gewinnen. Denn seine Begründung der Annahme einfacher Substanzen beruht allein auf dem Argumente, dass die Existenz des Zusammengesetzten nothwendig die des Einfachen voraussetze. Unvollkommen ist dieses ontologische Verfahren, weil das Zusammengesetzte nicht aus einer begrifflichen Nothwendigkeit abgeleitet, sondern einfach empirisch vorausgesetzt wird. Auch hierin verräth sich Leibniz' vermittelnder Standpunkt. Erst Herbart hat die strengere ontologische Deduction nachgeholt, indem er zu zeigen suchte, dass der Begriff des Seins nur als einfache Position gedacht werden könne. Seine Methode der Beziehungen, welche, Analyse und Abstraction verbindend, zur Reduction der widerspruchsvollen Erfahrungsbegriffe auf ihre letzten widerspruchsfreien Elemente dienen soll, ist ein hierbei zur Anwendung kommendes Hülfsverfahren. Da dasselbe rein begrifflichen Operationen

unmittelbar eine reale Bedeutung beilegt, so steht es unter der nämlichen Voraussetzung wie die Methode Spinoza's und unterliegt dem nämlichen Einwand wie diese, dem Einwande, welchen Kant schlagend in den Satz zusammenfasste, dass die unbedingte Nothwendigkeit eines Urtheils immer nur eine bedingte Nothwendigkeit der Sache beweist, auf die sich das Urtheil bezieht. Die ontologischen Beweise sind triftig, sofern es Objecte giebt, die den postulirten Begriffen entsprechen. Wird auf diese Weise den Resultaten der ontologischen Methode ein bloss hypothetischer Werth zugesprochen, so wird denselben damit freilich in den Augen ihrer Vertreter die Spitze abgebrochen, aber objectiv betrachtet wird ihnen doch keineswegs jede Bedeutung geraubt. Die Substanzbegriffe eines Spinoza und Leibniz behalten einen hypothetischen Werth. Wenn sie auf die Dauer dem philosophischen Bedürfnisse nicht genügt haben, so geschah dies nicht desshalb, weil ihnen die reale Nothwendigkeit fehlte, die ihnen ihre Urheber zuschrieben, sondern weil sie in Widersprüche verwickelten, sobald es sich darum handelte, eine Uebereinstimmung mit den sonstigen Postulaten der Erkenntniss herzustellen. Von diesem Gesichtspunkte aus wird aber auch jene unhistorische Ansicht hinfällig, welche in der ontologischen Methode schlechterdings nichts als eine Verirrung der Philosophie erblickt. Man übersieht dabei nicht bloss die Bedeutung, welche die Hypothesenbildung, die überall zunächst aus der Objectivirung bestimmter Forderungen des Denkens hervorgeht, für die Wissenschaft überhaupt besitzt, sondern es bleibt insbesondere auch der grosse und nicht selten fruchtbare Einfluss, welchen die rationalistische Denkweise ebenso sehr wie die ihr entgegengesetzte empiristische auf die Entwicklung der Einzelwissenschaften ausgeübt hat, ein vollkommenes Räthsel.

### c. Die Methode der immanenten Begriffsentwicklung.

Da die ontologische Methode den kritischen Einwürfen, welche namentlich mit Rücksicht auf die transscendente Natur ihrer Begriffe erhoben wurden, nicht Stand halten konnte, so war der Versuch gerechtfertigt, für das dialektische Verfahren neue Wege aufzufinden, die nun im wesentlichen in einer Vereinigung der antithetischen Methode Plato's mit der ontologischen des neueren Rationalismus bestanden. Abgesehen von einigen weiteren nicht zu allgemeinerer Geltung gekommenen Versuchen ähnlicher Richtung gehört hierher besonders die mit Fichte beginnende und in Hegel endende Entwicklung der neueren Speculation. Kein Anderer aber als Kant selbst ist es, welcher zuerst wieder auf die antithetische Methode der Alten zurückging, um sie durch eine Synthesis der Begriffe zu ergänzen. An einem Philosophen, welcher so mannigfache Seiten der Betrachtung darbietet wie Kant, ist jede Zeit geneigt, das ihrer eigenen Denkweise am nächsten liegende zu beachten. Die antiphilosophische Richtung der soeben vergangenen Zeit hat in Kant vorzugsweise den Kritiker gesehen und dabei

weder beachtet, dass Kritik immer nur der Anfang, nie das Ende der Wissenschaft sein kann, noch dass Kant selbst seine kritischen Untersuchungen nur als Vorläufer eines »doctrinalen« Systems betrachtet wissen wollte. Und wie sehr man auch zugeben mag, dass die Ausführung dieses Systems durch das hohe Alter des Philosophen verkümmert worden sei, über die allgemeine Richtung desselben kann nach dem Inhalt der Schriften über die Metaphysik der Natur und der Sitten und nach den in den kritischen Werken gegebenen Vorbereitungen kein Zweifel obwalten. Schon die Kritik Kant's ist eine ebenso einseitig rationalistische, wie diejenige Hume's eine einseitig empiristische gewesen war. Wie dieser von allen transscendentalen Bedingungen der Begriffe abstrahirt, um bloss deren empirische Elemente zurückzubehalten, so abstrahirt Kant umgekehrt von den letzteren, um bloss die ersteren einer Untersuchung zu unterwerfen. Die Empfindung ist ihm ein gegebener Stoff, nach dessen Entstehung, und nach dessen Beziehungen zu den Erkenntnisformen nicht weiter gefragt wird; sogar bei diesen wiederholt sich das einseitig rationalistische Interesse: nachdem die weitere kritische Scheidung in Anschauungs- und Begriffsformen vollzogen ist, beschränkt sich der Versuch einer Deduction ganz und gar auf die letzteren. Diese Deduction benützt für die Ordnung der Kategorien die antithetische Methode, von der Kant überdies in sinnreicher Weise und unter Herbeiziehung der apogogischen Beweisform in den Antinomien seiner transscendentalen Dialektik Gebrauch macht. Zugleich ist es die Deduction der Kategorien, in welcher die folgenreiche Ergänzung der Antithese durch die Synthese zum ersten Male in Anwendung kommt. Aber die Ausgangspunkte dieser Deduction ermangeln bei Kant noch der dialektischen Nothwendigkeit. Die Urtheilsformen werden lediglich als thatsächlich vorhandene aufgegriffen, ohne dass nach ihrem Zusammenhang mit den allgemeinsten Gesetzen des Denkens gefragt würde. Auf diese selbst, auf die Sätze der Identität, des Widerspruchs und des Grundes, in dieser ihrer logisch nothwendigen Reihenfolge zurückzugehen, ergab sich daher als eine unmittelbare Forderung, und mit ihr verknüpfte Fichte alsbald den Gedanken, jene logischen Grundsätze mit den einzelnen Acten des antithetisch-synthetischen Verfahrens in Beziehung zu bringen. So wurde das Identitätsaxiom zur ursprünglichen Thesis, die durch die Kraft der Verneinung von selbst den Satz des Widerspruchs als die Antithesis aus sich erzeuge, worauf endlich beide in dem Satz des Grundes als ihrer logischen Synthesis sich vereinigen. Zu diesem ersten Princip der Methode, welches auf die Platonische Dialektik zurückgeht, tritt aber als ein zweites das Postulat der ontologischen Methode, dass es einen ursprünglichen Begriffsinhalt geben müsse, welcher durch sich selbst Evidenz besitze. Fichte bestimmt als diesen Begriff zuerst das reine Ich, Hegel setzt an dessen Stelle den allgemeineren des reinen Seins. In beiden Fällen ist es eine absolute Abstraction, welche das Resultat herbeiführt. Dort soll von jedem zufälligen Inhalt des Selbstbewusstseins, hier von jedem wechselnden

Merkmal des zu Denkenden abstrahirt werden. So kann denn nur das reine Selbstbewusstsein oder das bestimmungslose Sein zurückbleiben. Diese ersten ontologisch nothwendigen Begriffe werden nun aber die Anfangspunkte jener antithetisch-synthetischen Begriffsentwicklung, in der durch eine den Begriffen selbst immanente Dialektik das System der Begriffe entstehen soll.

Wie diese Methode eine Verbindung der beiden vorangegangenen ist, so vereinigt sie auch ihre Fehler in sich. Mit der ontologischen verwandelt sie die hypothetische Nothwendigkeit der Begriffe in eine thatsächliche, und mit der antithetischen missbraucht sie die Function der Verneinung, um leeren Begriffsformen reale Anschauungen unterzuschieben. Beide Irrthümer steigern sich gegenseitig, und je mehr die Methode sich anheischig macht, ein lückenloses System des Wissens zu erzeugen, um so offenkundiger wird es, dass dieses System ein leerer Formalismus ist, welcher mit den Forderungen der wissenschaftlichen Erkenntniss überall in Streit geräth. Insbesondere ist es die Uniformität der Methode, welche mit der lebendigen Entwicklung des Wissens und mit dem Reichthum der wirklichen Methodik der Wissenschaften in schroffem Widerspruch steht. Hier aber offenbart sich zugleich in der Methode der immanenten Begriffsentwicklung nur am augenfälligsten eine Schwäche, die auch den andern Formen der dialektischen Methode gemein ist, und bei ihnen bloss wegen ihres mehr sporadischen oder vorzugsweise auf transscendente Begriffe gerichteten Gebrauches zurücktritt. Diese Schwäche besteht in dem Vorurtheil, dass es eine einzige philosophische Methode gebe, die für alle Probleme gleichmässig gültig sei, ein Vorurtheil, welches nothwendig immer zugleich mit dem andern verbunden ist, dass es eine specifisch philosophische Methode gebe, die von den sonstigen wissenschaftlichen Methoden verschieden sei. Nun können, wie unsere Untersuchung gelehrt hat, zwar im einzelnen die wissenschaftlichen Verfahrungsweisen je nach ihren Objecten mannigfach abweichen, aber gewisse fundamentale Methoden und bestimmte allgemeine Principien der wissenschaftlichen Forschung kehren überall wieder. Selbst die dialektischen Methoden stehen nicht ausserhalb derselben: sie beruhen auf Analyse und Synthese, Abstraction und Determination; aber sie wenden regelmässig diese Operationen in einer einseitigen, durch ihre Uniformität unfruchtbaren Weise an, während sie sich ausserdem durch die Vermengung von Hypothesen und Thatsachen, von begrifflicher Gliederung und wirklicher Entwicklung in die schwersten logischen Irrthümer und in die bedenklichsten Widersprüche mit den Ergebnissen der Einzelwissenschaften verwickeln. Um dieser gefahrvollen Lage, in welche sie durch die Verirrungen der dialektischen wie der einseitig empirischen Methode gerathen ist, zu entgehen, muss die Philosophie vor allem anerkennen, dass, wie sie mit den andern Wissenschaften ein gemeinsames Ziel hat, so auch keinerlei specifische Methoden ihr eigenthümlich sind.

## 3. Die Philosophie als Wissenschaftslehre.

Auf eine selbständige Aufgabe kann die Philosophie nur dann Anspruch erheben, wenn es ihr gelingt, die Stellung einer allgemeinen Wissenschaft zu behaupten. Nicht wenige unter ihren eigenen Vertretern scheinen gegenwärtig der Meinung zu sein, diese Stellung sei unhaltbar geworden. Die Philosophie als solche gilt ihnen als eine »verflossene Wissenschaft«. Die Psychologie habe sich zur selbständigen Erfahrungsdisciplin entwickelt, die Ethik werde von der socialen Statistik und von der Rechtswissenschaft in Anspruch genommen, um die sonstigen Grundbegriffe und Methoden sollen die Einzelwissenschaften sich selbst kümmern. Was bleibt dann dem Philosophen zu thun übrig, als zum Leichenbestatter der Philosophie zu werden, und als Nebenamt ein wenig abstracte Erkenntnisstheorie zu treiben?

In der That, diesem Programm, welches mit einem Schlage die Philosophie aus der reichsten in die ärmste, aus der umfassendsten in die beschränkteste aller Wissenschaften verwandelt, entspricht einigermassen ihre heutige Lage. Aber diese Lage ist eine unmögliche. Entweder muss die Philosophie überhaupt verschwinden, oder sie muss sich bemühen, Wissenschaftslehre in der wahren Bedeutung des Wortes zu sein.

Als Wissenschaftslehre hat Fichte seine Philosophie bezeichnet, und er hat darunter eine Wissenschaft verstanden, welche die Grundlage aller andern sei, ihnen vorausgehe und jeder einzelnen ihre Grundbegriffe und Grundsätze fertig überliefere. Eine Wissenschaftslehre dieser Art ist ein Ding der Unmöglichkeit, weil ihr das Object fehlt. Nothgedrungen geräth daher ein solcher Versuch auf den Abweg, eine Methode erfinden zu wollen, der das Unerreichbare zugemuthet wird, ihr Object selber hervorzubringen. Wissenschaftslehre kann die Philosophie nur in dem Sinne sein, dass sie umgekehrt die Methoden und Ergebnisse der Einzelwissenschaften als den eigentlichen Gegenstand ihrer Forschungen betrachtet. Ihr letztes Ziel bleibt dabei die Gewinnung einer Weltanschauung, welche dem Bedürfniss des menschlichen Geistes nach der Unterordnung des Einzelnen unter umfassende theoretische und ethische Gesichtspunkte Genüge leistet. Dieses Bedürfniss existirt heute wie immer, und keine andere Wissenschaft kann dasselbe befriedigen. Denn die Gesichtspunkte, zu denen die Einzelforschung gelangt, sind nothwendig einseitig und beschränkt. In nichts zeigt sich dies augenfälliger als in den Widersprüchen, die sich sogar zwischen einander nahe stehenden Wissenschaften in Bezug auf die ihnen gemeinsamen Begriffe herausstellen. Eben darum aber bedarf die Philosophie bei ihrer Untersuchung der allgemeinen wissenschaftlichen Principien des vollen Unterbaues der Einzelwissenschaften. Nur wenn sie sich auf ihn stützt, kann sie sich zugleich der Hoffnung hingeben, dass auch ihre Ergebnisse wieder klärend und fördernd auf die einzelne Forschung zurückwirken werden.

Hat demnach die Philosophie die Arbeit weiterzuführen, welche die Einzelwissenschaften begonnen, so liegt darin von selbst, dass es eine specifisch philosophische Methode nicht geben, sondern dass höchstens von einer eigenthümlichen Gestaltung der allgemeinen Methoden in ihr die Rede sein kann. In dieser Beziehung ist besonders auf die vorwiegende Betheiligung der Analyse und der Abstraction an der philosophischen Untersuchung hinzuweisen. Während die philosophische Analyse zur bestimmten Vergegenwärtigung aller Elemente eines Begriffs nöthigt, die von der durch praktische Zwecke bestimmten Einzelforschung oft nur unvollständig erkannt werden, vollzieht die philosophische Abstraction, unterstützt durch die vielseitige Kenntniss der Anwendungsformen, eine vollständigere Elimination unwesentlicher oder heterogener Elemente, als dies in der speciellen Untersuchung geschehen kann. Daneben darf endlich die wichtige Betheiligung der Induction, die hier wie überall die Wege der Deduction vorbereitet, nicht übersehen werden.

Auf eine eingehendere Schilderung der Eigenthümlichkeiten philosophischer Methodik können wir hier verzichten, da der ganze Inhalt des vorangegangenen Werkes als ein Beispiel derselben gelten möchte. Insbesondere in der zuletzt gegebenen Darstellung der Methodenlehre ist der Versuch gemacht worden, eine der Aufgaben zu bearbeiten, welche die Philosophie als Wissenschaftslehre zu lösen hat. Dieser Versuch wird sicherlich manche Spuren des Missverhältnisses zwischen dem umfassenden Zweck und dem beschränkten individuellen Vermögen an sich tragen. Aber so lückenhaft die Schilderung der einzelnen wissenschaftlichen Methoden und der Principien, auf denen sie beruhen, auch sein mag, so ist sie hoffentlich doch im Stande gewesen, von der Aufgabe der Wissenschaftslehre selbst und von den Methoden, welche dieser Aufgabe entsprechen, ein nicht allzu unähnliches, oder mindestens ein der Verbesserung fähiges Bild zu entwerfen.

---

**Druckfehler.**

Seite 5 Zeile 19 von oben statt solitären lies singulären.
Seite 251 Zeile 5 von oben statt der Kraftbegriffs lies des Kraftbegriffs.
Seite 445 Zeile 22 von oben statt Keimtheile lies Keimscheibe.

*Verlag von Ferdinand Enke in Stuttgart.*

Seit Januar 1882 erscheint:

# Humboldt.

**Monatschrift für die gesammten Naturwissenschaften.**

Herausgegeben von **Dr. Georg Krebs.**

**Monatlich ein Heft von 5 Quartbogen mit Abbildungen.**

Preis des Heftes 1 Mark.

Der 1. Band (Jahrg. 1882), sowie der im Erscheinen befindliche 2. Band, ist zum Preis von M. 12. — durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Im nämlichen Verlag ist kürzlich erschienen:

## Geschichte der Physik

von Aristoteles bis auf die neueste Zeit.

Von

**August Heller,**

Professor in Budapest.

**Zwei Bände.**

I. Band: **Von Aristoteles bis Galiläi.**

gr. 8. geh. M. 9. —

☞ **Der 2. Band befindet sich im Druck und wird in Bälde erscheinen.**

*Werke von Professor Dr. W. Wundt:*

## Die physikalischen Axiome

und ihre Beziehung zum Causalprincip.

Ein Kapitel aus einer Philosophie der Naturwissenschaften.

8. geh. M. 2. 40.

## Handbuch der medicinischen Physik.

*Mit 244 in den Text gedruckten Holzschnitten.*

gr. 8. geh. M. 10. —

## Lehrbuch der Physiologie des Menschen.

*Mit 170 in den Text gedruckten Holzschnitten.*

**Vierte umgearbeitete Auflage.**

gr. 8. geh. M. 16. —

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

H. HEINRICH
Buchbinderei
Rottenburg / L.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wundt, Wilhelm,

Logik eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung

Bd.: 2

1883

Ph.sp. 956 b-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11171395-3